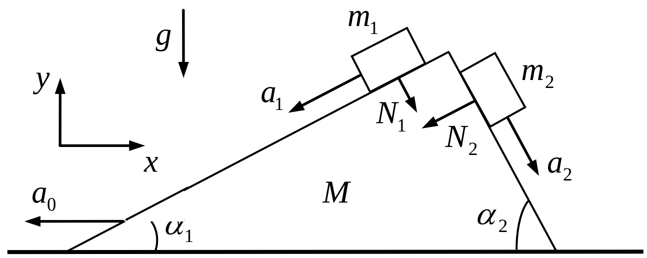
МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА
НАЦИОНАЛНА ОЛИМПИАДА ПО ФИЗИКА
Казанлък, 11 – 13 април 2014 г.
Решения на темата за 10. – 12. клас



<u>Задача 1.</u> Трупчета върху призма

А) В случая на неподвижна призма големините на силите, с които трупчетата действат на призмата, са $N_1 = m_1 g\cos\alpha_1$ **[0,5 т.]** и $N_2 = m_2 g\cos\alpha_2$ **[0,5 т.]** (посоките им са указани на фиг. 1). Хоризонталната компонента на сумата от техните вектори трябва да е равна на нула **[0,5 т.]**, за да е неподвижна призмата, което ни дава условието $m_1\cos\alpha_1\sin\alpha_1 = m_2\cos\alpha_2\sin\alpha_2$ **[1 т.]**, т.е. $\dfrac{m_1}{m_2} = \dfrac{\cos\alpha_2\sin\alpha_2}{\cos\alpha_1\sin\alpha_1} = \dfrac{\sin(2\alpha_2)}{\sin(2\alpha_1)}$. **[0,5 т.]**

Б) Параметрите са произволни, така че ускорението на призмата няма да има фиксирана посока. Нека приемем, че призмата ще се движи наляво. Ако тя се движи надясно, то a_0 ще бъде отрицателно, като няма да има промяна в получените изрази. Най-удобно е да се работи в отправна система, свързана неподвижно с призмата. **[1 т.]** По направленията, успоредни на наклонените равнини, ще имаме уравненията $m_1 a_1 = m_1 g\sin\alpha_1 - m_1 a_0\cos\alpha_1$ **[1 т.]** и $m_2 a_2 = m_2 g\sin\alpha_2 + m_2 a_0\cos\alpha_2$. **[1 т.]** Големините на силите, с които трупчетата действат на призмата, са $N_1 = m_1 g\cos\alpha_1 + m_1 a_0\sin\alpha_1$ **[0,5 т.]** и $N_2 = m_2 g\cos\alpha_2 - m_2 a_0\sin\alpha_2$. **[0,5 т.]** Вторият принцип на механиката, приложен към движението на призмата, дава $Ma_0 = N_2\sin\alpha_2 - N_1\sin\alpha_1$. **[1 т.]** От последните три уравнения следва, че $a_0 = \dfrac{m_2\sin\alpha_2\cos\alpha_2 - m_1\sin\alpha_1\cos\alpha_1}{M + m_1\sin^2\alpha_1 + m_2\sin^2\alpha_2} g$. **[1 т.]** Като заместим израза за a_0 в първите две уравнения, ще получим, че $a_1 = \dfrac{(M+m_1)\sin\alpha_1 - m_2\sin\alpha_2\cos(\alpha_1+\alpha_2)}{M + m_1\sin^2\alpha_1 + m_2\sin^2\alpha_2} g$ **[1 т.]**, а $a_2 = \dfrac{(M+m_2)\sin\alpha_2 - m_1\sin\alpha_1\cos(\alpha_1+\alpha_2)}{M + m_1\sin^2\alpha_1 + m_2\sin^2\alpha_2} g$. **[1 т.]**

В) Като заместим числените стойности на параметрите в изразите по-горе, ще получим $a_0 = 0{,}37$ m/s^2 **[0,5 т.]**, $a_1 = 4{,}7$ m/s^2 **[0,5 т.]** и $a_2 = 8{,}8$ m/s^2. **[0,5 т.]** a_0 е положително, така че призмата ще се движи наляво. **[0,5 т.]**

Г) Трупчето се движи равноускорително без начална скорост, т.е. $d = a_2 t^2 / 2$. **[1 т.]** Оттук $t = \sqrt{2d/a_2} = 0{,}34\,\text{s}$. **[1 т.]**

<u>Задача 2.</u>

Част А. При начална температура T_1 от уравнението на състояние на всеки газ следва

$$p_1^A V_1^A = CT_1, \quad p_1^B V_1^B = CT_1, \qquad \textbf{[1 т.]}$$

откъдето получаваме

$$\frac{V_1^A}{V_1^B} = \frac{p_1^B}{p_1^A} = n. \qquad \textbf{[0.5 т.]}$$

Аналогично при крайна температура T_2 имаме

$$p_2^A V_2^A = CT_2, \quad p_2^B V_2^B = CT_2, \qquad \textbf{[1 т.]}$$

откъдето следва

$$\frac{V_2^A}{V_2^B} = \frac{p_2^B}{p_2^A} = x. \qquad \textbf{[0.5 т.]}$$

Тъй като обемът на цилиндъра е постоянен, в сила е равенството

$$V_1^A + V_1^B = V_2^A + V_2^B \quad \text{или} \quad V_1^A\left(1 + \frac{1}{n}\right) = V_2^A\left(1 + \frac{1}{x}\right), \qquad \textbf{[1 т.]}$$

а понеже силата на тежестта, действаща на буталото, се уравновесява от силите, породени от налягането, имаме

$$p_1^B - p_1^A = p_2^B - p_2^A \quad \text{или} \quad p_1^A(n-1) = p_2^A(x-1). \qquad \textbf{[1 т.]}$$

От почленното умножение на равенствата получаваме

$$p_1^A V_1^A \frac{n^2 - 1}{n} = p_2^A V_2^A \frac{x^2 - 1}{x}, \qquad \textbf{[1 т.]}$$

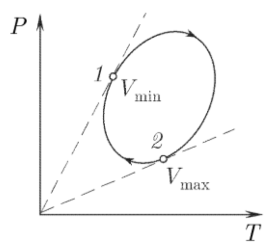
което можем да препишем във вид на квадратно уравнение

$$\frac{x^2-1}{x}=\frac{n^2-1}{n}\frac{T_1}{T_2}=\frac{n^2-1}{nk}\,, \qquad \textbf{[1 т.]}$$

откъдето намираме

$$x=\frac{n^2-1}{nk}+\sqrt{\left(\frac{n^2-1}{2nk}\right)^2+1}\,. \qquad \textbf{[2 т.]}$$

Част Б. А) Тъй като графиката на изобарния процес е част от права, минаваща през началото на $p-T$ диаграмата **[0,5 т.]**, търсените състояния (точки) се получават като общи точки на графиката на изобарен процес и цикличния процес **[0,5 т.]**. Понеже от уравнението на състояние на идеалния газ $p/T \sim 1/V$ **[1 т.]**, допирателната 1 определя обема $V_{\min}$, докато допирателната 2 – обема $V_{\max}$ (вж. фигурата).

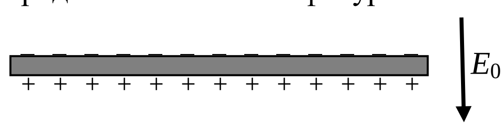


[2 т.]

Б) Газът се разширява в участъка $V_{\min} \to V_{\max}$ **[1 т.]**, а се свива в участъка $V_{\max} \to V_{\min}$. **[1 т.]**

__Задача 3.__ **Електростатична индукция**

А) Знаците на индуцираните заряди са показани на фигурата.



[1 т]

Електроните, като отрицателно заредени частици, започват да се движат в посока, противоположна на посоката на интензитета и се натрупват по горната повърхност на пластината. Върху долната повърхност остава некомпенсиран положителен заряд. **[1 т]**

Б) Зарядите се натрупват по повърхността, докато създаденото от тях поле $\mathbf{E}_{\mathbf{ind}}$ не компенсира изцяло външното поле:

$E_{\text{ind}} = E_0$ **[1 т]**

Електричното напрежение, дължащо се на това поле е:

$U = E_{\text{ind}}d = E_0 d$ **[1 т]**

Ако разгледаме двете повърхности на пластинката като плосък кондензатор, намираме за големината на натрупания заряд:

$Q = CU = CE_0 d$ **[1 т]**

където C е капацитетът на кондензатора. Като вземем предвид формулата за капацитет на плосък кондензатор, намираме:

$Q = \epsilon_0 S\, E_0$ **[1 т]**

Като заместим с числените данни, получаваме:

$Q = 8{,}85 \cdot 10^{-12}\mathrm{F/m} \cdot 10^{-3}\mathrm{m}^2 \cdot 3 \cdot 10^6\mathrm{V/m} \;\approx 2{,}7 \cdot 10^{-8}\mathrm{C}$ **[1 т]**

В) Върху горната повърхност са натрупани:

$N_{\mathrm{ind}} = \frac{Q}{e} = 1{,}7 \cdot 10^{11}$електрона **[1 т]**

Общият брой електрони в пластинката е равен на общия брой атоми N. За да го определим, първо определяме масата на пластината:

$m = \rho_w S\, d = 8{,}9 \cdot 10^{-3}\mathrm{kg}$ **[1 т]**

откъдето:

$N = \frac{m}{M} = \; 8{,}9 \cdot 10^{22}$електрона **[0,5 т]**

Окончателно намираме:

$\eta = \frac{N_{\mathrm{ind}}}{N} = \; 1{,}9 \cdot 10^{-12}$ **[0,5 т]**

т.е. индуцираните върху повърхността на метала електрони са на много порядъци по-малко от общия брой свободни електрони.

Г) Можем да разглеждаме пластината като проводник с дължина d и напречно сечение S, и съответно със съпротивление:

$R = \frac{\rho d}{S}$ **[1 т]**

Токът, който ще тече веднага след поставянето в електрично поле е:

$I = \frac{U}{R} = \frac{E_0 S}{\rho}$ **[1 т]**

или

$I = \frac{3 \cdot 10^6 \mathrm{V/m} \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}^2}{1{,}68 \cdot 10^{-8} \Omega \cdot \mathrm{m}} = 1{,}78 \cdot 10^{11}\mathrm{A}$ **[1 т]**

Д) Ако приемем, че в пластинката тече постоянен ток докато се установи електростатично равновесие, индуцираният заряд ще се натрупа за време:

$t = \frac{Q}{I} = \epsilon_0 \rho = 1{,}5 \cdot 10^{-19}\mathrm{s}$ **[1 т]**

Направената оценка е приблизителна, защото при натрупване на заряди върху повърхностите на пластинката, напрежението между тях намалява. Съответно токът намялява, докато стане равен на нула, когато натрупването на заряди се преустанови. **[1 т]**

<u>Задача 4.</u>

А) Големината на процепите на дифракционната решетка не оказва влияние върху положението на главните максимуми. **[0,5 т]**

Условието за дифракционни максимуми е $d\sin\theta = m\lambda$, където m е цяло число. **[0,5 т]**

За малки ъгли $\sin\theta \approx tg\theta \approx x_m / L_0$, където x_m е координатата на m-тия максимум при старото разстояние. **[0,75 т]**

Оттук следва, че $x_m = m\lambda L_0 / d$. **[0,25 т]**

Аналогично, за координатата x'_{m+1} на $(m+1)$-вия максимум при новото разстояние получаваме $x'_{m+1} = (m+1)\lambda L / d$. **[0,25 т]**

По условие $x'_{m+1} = x_m$. Следователно $\dfrac{(m+1)\lambda L}{d} = \dfrac{m\lambda L_0}{d}$ или $L = \dfrac{m}{m+1} L_0$. **[0,5 т]**

Максимумите от 5-ти порядък се получават при ъгли θ, за които $\sin\theta = \pm 5\lambda / d$. Необходимо е $\dfrac{5\lambda}{d} \le 1$. **[0,75 т]**

Следователно, най-малката константа на решетката, за която това неравенство е изпълнено е $d = 5\lambda = 3\ \mu\text{m}$. **[0,5 т]**

б) Разликата в ходовете на лъчите, минаващи през два съседни процепа, за ъглите β_1 и β_2 е съответно $\Delta_1 = d\left(\sin\beta_1 - \sin\alpha\right)$ и $\Delta_2 = d\left(\sin\beta_2 - \sin\alpha\right)$ (алтернативно: допуска се $\Delta_{1,2} = d\left(\sin\beta_{1,2} + \sin\alpha\right)$ в случай, че е избрана другата страна на нормалата, като решението ще се промени по съответния начин). **[1 т]**

Условието за максимум е $\Delta = m\lambda$, където m е порядъкът на съответния максимум. **[0,5 т]**

Нека под ъгъл β_1 се наблюдава максимум от порядък m_0, а под ъгъл β_2 се наблюдава максимум от порядък $m_0 + 1$, т.е. следващият. **[0,75 т]**

Следователно е изпълнено $\left|\begin{array}{l} d\left(\sin\beta_1 - \sin\alpha\right) = m_0\lambda \\ d\left(\sin\beta_2 - \sin\alpha\right) = \left(m_0 + 1\right)\lambda \end{array}\right.$. **[0,75 т]**

Изваждаме почленно двете уравнения и получаваме $d\left(\sin\beta_2 - \sin\beta_1\right) = \lambda$, откъдето определяме константата на решетката $d = \lambda / \left(\sin\beta_2 - \sin\beta_1\right) \approx 0{,}83\ \mu\text{m}$. **[0,75 т]**

За максимум от произволен порядък m и за максимум от порядък m_0 имаме: $\left|\begin{array}{l} d\left(\sin\beta_m - \sin\alpha\right) = m\lambda \\ d\left(\sin\beta_1 - \sin\alpha\right) = m_0\lambda \end{array}\right.$, където β_m е ъгълът, под който се наблюдава максимума от m-ти порядък. Изваждаме почленно уравненията и заместваме израза за d, при което получаваме $\sin\beta_m = \sin\beta_1 + \left(m - m_0\right)\left(\sin\beta_2 - \sin\beta_1\right)$. **[1 т]**

Стойностите на m и m_0 трябва да са такива, че $\left|\sin\beta_m\right| \le 1$. **[0,75 т]**

Понеже $\beta_1 \approx 14^\circ$ и $\beta_2 \approx 74^\circ$, горното уравнение става $\sin\beta_m = 0{,}24 + 0{,}72\left(m - m_0\right)$. **[0,5 т]**

При $m - m_0 = 0$ имаме $\sin\beta_m = \sin\beta_1 = 0,24$, т.е. $\beta_m = \beta_1 \approx 14^{\mathrm{o}}$. **[0,75 т]**

При $m - m_0 = 1$ имаме $\sin\beta_m = \sin\beta_2 = 0,96$, т.е. $\beta_m = \beta_2 \approx 74^{\mathrm{o}}$. **[0,75 т]**

При $m - m_0 = -1$ имаме $\sin\beta_m = -0,48$, т.е. $\beta_m \approx -29^{\mathrm{o}}$. **[0,75 т]**

Други стойности на $m - m_0$ не са позволени. Наблюдават се три максимума. **[0,75 т]**

Алтернативно: могат да се получат други знаци за ъглите в зависимост от избраната посока на измерването им.

От условието за максимуми $d\left(\sin\beta - \sin\alpha\right) = m\lambda$ определяме порядъците на максимумите:

1) $m = 0$, $\beta = \beta_1 \approx 14^{\mathrm{o}}$ **[0,5 т]**

2) $m = 1$, $\beta = \beta_3 \approx -29^{\mathrm{o}}$ **[0,5 т]**

3) $m = -1$, $\beta = \beta_2 \approx 74^{\mathrm{o}}$ **[0,5 т]**

Ъгълът на падане е $\alpha = \beta_1 \approx 14^{\mathrm{o}}$. **[0,5 т]**