СЪЮЗ НА МАТЕМАТИЦИТЕ В БЪЛГАРИЯ
СЕКЦИЯ "ИВАН САЛАБАШЕВ" - СТАРА ЗАГОРА

Математически турнир "Иван Салабашев"

4 декември 2004 г.

Тема за 5 клас

(време за работа 120 минути)

След всяка от задачи от 1 до 10 има 4 отговора, само един от които е верен. Отговорът на всяка от задачите от 11 до 15 е число. За верен отговор на всяка от задачите от 1 до 5 се присъжда по 1 точка. За верен отговор на всяка от задачите от 6 до 10 се присъждат по 2 точки. За верен отговор на всяка от задачите от 11 до 15 се присъждат по 3 точки. За неверен или непосочен отговор не се присъждат точки. Не се разрешава ползването на калкулатори. Крайното класиране на всички участници в Турнира може да намерите на адрес www.math.bas.bg

Журито Ви пожелава приятна работа.

---

1. Ако 45 грама какао се разтварят в 150 милилитра вода, колко милилитра вода са необходими за разтварянето на 27 грама какао?

А) 80; **Б)** 85; **В)** 90; **Г)** 95.

2. Записани са двуцифрените числа, сборът на цифрите на всяко от които е равен на 3. Кое е най-малкото им общо кратно?

А) 84; **Б)** 210; **В)** 420; **Г)** 840.

3. Каква част от правоъгълника на чертежа е оцветена?

А) $\frac{2}{5}$; **Б)** $\frac{1}{3}$; **В)** $\frac{5}{12}$; **Г)** $\frac{2}{3}$.

4. Колко са възможните цифри a, за които числото $\overline{12a3}$ е кратно на 3, а числото $\overline{13a2}$ е кратно на 4?

А) 1; **Б)** 2; **В)** 3; **Г)** 4.

5. Колко триъгълника могат да се преброят на чертежа?

А) 10; **Б)** 12; **В)** 14; **Г)** 16.

6. Ако всяко от следните твърдения е вярно,

ако Силвия учи немски, то тя учи също английски и френски;
ако Силвия учи френски, то тя учи също или английски, или немски;
ако Силвия учи английски, то тя учи немски, но не учи френски.

колко езика изучава Силвия?

А) един; **Б)** два; **В)** три; **Г)** нито един.

7. Кое е най-малкото естествено число n, за което всяка от дробите

$$\frac{11}{n+17}\,,\quad \frac{12}{n+18}\,,\quad \frac{13}{n+19}\,,\quad \frac{14}{n+20}$$

е несъкратима?

А) 11; **Б)** 7; **В)** 6; **Г)** 5.

8. Иван и Емил едновременно и в различни посоки започват да обикалят стадиона. Те се уговарят да спрат, когато отново се срещнат на същото място. Иван прави една обиколка на стадиона за 2 минути, а Емил – за 1 минута и 20 секунди. Колко обиколки общо ще направят Иван и Емил?

А) 2; **Б)** 3; **В)** 5; **Г)** 7.

9. За един сезон ловна дружина отстреляла общо 130 диви патици, като един от ловците отстрелял една патица повече, отколкото останалите. През следващия сезон уловът им наброявал 220 диви патици, като петима от ловците отстреляли с по една патица повече от останалите. Колко са ловците в дружината?

А) 47; **Б)** 43; **В)** 13; **Г)** 15.

10. На колко е равен сборът на цифрите a и b, ако числото $\overline{ab3a}$ се дели на 9 и на 44?

А) 9; **Б)** 4; **В)** 10; **Г)** 15.

11. За да впечатли Любка с гадателските си способности, Дамян и дава лист, на който е записал предварително няколко двуцифрени числа. Той предлага на Любка да избере едно от тях и да му съобщи сбора от цифрите на това число. Разполагайки само с тази информация, Дамян може точно да каже кое число е избрала Любка. Колко най-много са числата на листа?

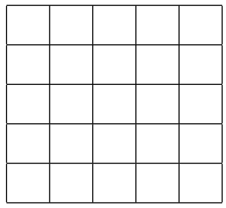
12. Числата

$$17, \quad 19, \quad 23, \quad 29, \quad 31, \quad 37$$

са разделени в две групи така, че сборът от числата в едната група може без остатък да се раздели на сбора от числата в другата. Какво частно ще се получи при това деление?

13. По колко начина може да се избере естественото число n така, че дробите $\dfrac{n}{48}$ и $\dfrac{n}{63}$ да бъдат правилни и съкратими?

14. Всяко от полетата на показания квадрат 5×5 е оцветено в един цвят. *Съседни* се наричат две полета, които имат поне един общ връх. Известно е, че измежду съседните полета на кое да е поле няма еднакво оцветени. Колко най-малко цвята са използвани?



15. Пирати откраднали буре с жълтици. Решили да ги разделят поравно, но след подялбата те се скарали и 100 пирати били изхвърлени зад борда (без техните жълтици, разбира се). Оставащите пирати си поделили отново жълтиците поравно и се оказало, че всеки има 2 пъти повече жълтици, отколкото при първата подялба. Но отново възникнал спор и още 40 пирати били изхвърлени зад борда, а оставащите си поделили техните жълтици. В крайна сметка на всеки пират се паднали със 7 жълтици повече, отколкото при първата подялба. Колко жълтици е имало в бурето?

Математически турнир "Иван Салабашев"

4 декември 2004 г.

Решения на задачите от темата за 5 клас

1. Отговор: В.Ако 45 грама какао се разтварят в 150 мililитра вода, то 9 грама какао се разтварят в 30 мл вода и следователно 27 грама какао се разтварят в 90 мл вода.

2. Отговор: В. Числата са 21, 12 и 30 и най-малкото им общо кратно е 420.

3. Отговор: В. Оцветеният правоъгълник се нанася три пъти в половината правоъгълник, а значи 6 пъти в правоъгълника и е $\dfrac{1}{6}$ от правоъгълника.
Двата оцветени триъгълника заедно образуват правоъгълник, който е половината от половината на дадения, т.е. те са $\dfrac{1}{4}$ от правоъгълника.
Общо, $\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{6}=\dfrac{5}{12}$.

4. Отговор: Б. От признака за делимост на числото $\overline{12a3}$ на 3 намираме четири възможности за $a=0,3,6,9$. Числото $\overline{13a2}$ се дели на 4 при $a=3,9$.

5. Отговор: Г. Триъгълниците, които не съдържат в себе си други от дадените триъгълници, са 6. Ще ги наричаме единични. Триъгълниците, съставени от 2 единични триъгълника, са 3. Триъгълниците, съставени от 3 единични триъгълника, са 6. Като преброим и дадения триъгълник, съставен от 6 единични, полчуаваме общо 16 триъгълника.

6. Отговор: Г. Ако Силвия учи немски, от първото твърдение следва, че тя учи и английски, и френски. Но ако учи английски, според третото твърдение, Силвия не учи френски; противоречие. Следователно тя не учи немски език. От третото твърдение тогава следва, че Силвия не учи английски. А след като не учи нито английски, нито немски, от второто твърдение следва, че тя не учи и френски.

7. Отговор: А. За да бъде дробта $\dfrac{12}{n+18}$ несъкратима е необходимо n да е нечетно число, което не се дели на 3.
При $n=1$ дробта $\dfrac{14}{n+20}=\dfrac{14}{21}$ е съкратима. При $n=5$ дробта $\dfrac{11}{n+17}=\dfrac{11}{22}$ е съкратима.
При $n=7$ дробта $\dfrac{13}{n+19}=\dfrac{13}{26}$ е съкратима. При $n=11$ всички дроби са несъкратими.

8. Отговор: В. Иван прави една обиколка за $2.60=120$ секунди, а Емил – за $60+20=80$ секунди. Съответно те минават през точката, от която са тръгнали, на всеки $120=2^3.3.5$ и $80=2^4.5$ секунди. Тъй като $\text{НОК}(120,80)=2^4.3.5$, Иван ще направи 2 обиколки, а Емил – 3 обиколки до срещата. Те правят общо 5 обиколки.

9. Отговор: Б. Броят на ловците е делител на $130-1=129=3.43$, а също и на $220-5=215=5.43$. Общите делители на двете числа са 1 и 43. Тъй като дружината включва поне пет ловци, тя се състои от 43 ловци.

10. Отговор: А. От признака за делимост на 4 имаме $a=2$ или $a=6$. При $a=2$ от признака за делимост на 9 намираме $b = 2$, но полученото число 2232 не се дели на 11. При $a = 6$ от признака за делимост на 9 намираме $b = 3$. Полученото число 6336 се дели на 11.

11. Отговор: 18. Сборът от цифрите на двуцифрено число е най-малко 1 (при 10) и най-много 18 (при 99). Следователно, ако на листа има повече от 18 числа, две от тях ще имат един и същ сбор на цифрите и ако Любка избере едно от тях, Дамян няма да знае със сигурност кое е то. Следователно Дамян може да запише най-много 18 числа на листа (всички с различен сбор на цифрите си).

12. Отговор: 2. Ако означим сборът от числата в едната група с a, сборът в другата ще бъде от вида $k.a$, където k е естествено число. Така общият сбор на числата ще бъде $a + k.a = 156$ и оттук следва, че a дели $156 = 2^2.3.13$. Тъй като нито едно от дадените числа не дели 156, ясно е, че всяка група съдържа най-малко две числа. Оттук $a \geq 17 + 19 = 36$, т.е. търсим по-големите от 36 (и по-малки от 156) делители на 156. Те са 78, 52 и 39.
Сбор 39 не може да се получи от две нечетни събираеми, а при събиране на три от дадените числа се получава поне $17 + 19 + 23 = 59$, повече от 39.
Да допуснем, че сборът на числата и в двете групи е 78, четно число. Тъй като дадените числа са нечетни, във всяка група има четен брой събираеми. Но $78-37 = 41$, следователно в групата, в която е 37, има още три числа. Техният сбор е най-малко $17+19+23 = 59 > 41$, противоречие.
Следователно $a = 52$ $(52 = 23 + 29)$ и оттук частното е $k = 2$.

13. Отговор: 17.Знаменателите се разлагат на прости множители по следния начин: $48 = 2^4.3$ и $63 = 3^2.7$. Общият им прост делител е 3.
Нека първо n е кратно на 3. Кратните на 3 числа, по-малки от 48, са 15.
Когато n не е кратно на 3, за да бъдат дробите съкратими, трябва n да бъде кратно на 2 и на 7, т.е. на 14. По-малките от 48 кратни на 14, които не се делят на 3, са 14 и 14.2.
И така, за n има $15 + 2 = 17$ възможности.

14. Отговор: 9. Тъй като има поле с 8 съседи, цветовете са не по-малко от 8. Тъй като всеки двама съседи имат общ съсед, то всеки двама съседи са оцветени различно (в обратен случай условието ще бъде нарушено за техния общ съсед). Следователно цветовете са поне 9. На рисунката е показано такова оцветяване, като цветовете са отбелязани с числата от 1 до 7.

1	2	3	1	2
4	5	6	4	5
7	8	9	7	8
1	2	3	1	2
4	5	6	4	5

15. Отговор: 600. Тъй като след изхвърлянето на 100 пирати зад борда оставащите получават 2 пъти повече жълтици, отколкото при първата подялба, то отначало пиратите са били два пъти повече, т.е. 200. Следователно след като още 40 пирати били изхвърлени зад борда, са останали 60 пирати. Те получили общо 60.7=420 жълтици повече, отколкото при първата подялба. Тези 420 жълтици при първата подялба са били поделени поравно между 140-те впоследствие изхвърлени пирати. Това означава, че всеки пират при първата подялба е получил по 420:140=3 жълтици, а следователно жълтиците са общо 3.200=600.

Задачите от тази тема са предложени от Невена Събева.