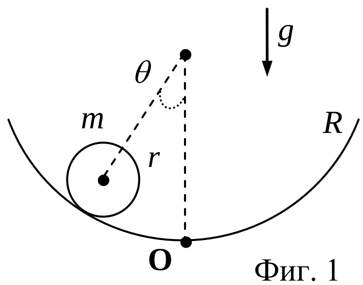
МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА
НАЦИОНАЛНА ОЛИМПИАДА ПО ФИЗИКА
Казанлък, 11–13 април 2014 г.
Решения на темата за 10.–12. клас – II етап

<u>Задача 1.</u> Търкалящо се кълбо



Фиг. 1

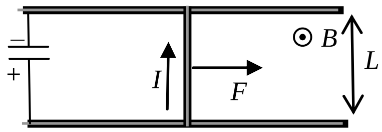
а) В началния момент кинетичната енергия на кълбото е нула, а потенциалната енергия спрямо т. **O** е $2mgr$. В момента, когато центърът на кълбото се намира в най-ниската точка от своята траектория, кинетичната енергия е равна по теоремата на Кьониг на сумата $\frac{mv^2}{2}+\frac{I\omega^2}{2}$, където $\omega=\frac{v}{r}$ е ъгловата скорост на кълбото спрямо моментната ос на въртене, която минава през допирната точка на кълбото със сферата, а потенциалната енергия е mgr. Като използваме закона за запазване на механичната енергия $\frac{mv^2}{2}+\frac{I\omega^2}{2}=mgr$, намираме, че $v=\sqrt{\frac{10gr}{7}}=1$ m/s. **[2 т.]**

б) По време на движението на кълбото нека да означим с θ малкия ъгъл, който сключва правата, която свързва центъра на кълбото с центъра на сферата, с правата, която свързва центъра на сферата с т. **O**, както е показано на фиг. 1. От втория принцип на механиката следва, че $ma=mg\sin\theta-f$, където a е големината на ускорението на центъра на кълбото, а f е силата на триене при търкаляне, която е свързана с ъгловото ускорение на кълбото ε спрямо моментната ос на въртене посредством уравнението $fr=I\varepsilon$. Като използваме, че $\varepsilon=a/r$, получаваме за ускорението на кълбото $a=\frac{mg\sin\theta}{m+I/r^2}=\frac{5g\sin\theta}{7}$.

Търкалянето е без хлъзгане, така че имаме следната връзка: $(R-r)\dot{\theta}=r\dot{\varphi}$, където φ е ъгълът на завъртане на кълбото около моментната ос на въртене. Като използваме също така определението: $\varepsilon=\ddot{\varphi}$, получаваме следното уравнение: $\ddot{\theta}=-\frac{5g\sin\theta}{7(R-r)}$, като отрицателният знак е следствие от факта, че ъгловото ускорение е в посока на намаляване на θ. Като използваме, че за малки ъгли $\sin\theta\approx\theta$, получаваме, че $\ddot{\theta}+\frac{5g\theta}{7(R-r)}=0$, т.е. кълбото извършва хармонични трептения с период $T=2\pi\sqrt{\frac{7(R-r)}{5g}}=1{,}7$ s. **[4 т.]**

<u>Задача 2</u>. Електромагнитно оръдие

А)



(0,5 т)

Б) $I_0 = \dfrac{U_0}{R}$ **(0,2 т)**

$F_0 = I_0 BL = \dfrac{U_0 BL}{R}$ **(0,2 т)**

$\boxed{a_0 = \dfrac{F_0}{m} = \dfrac{U_0 BL}{mR} = 100\,\mathrm{m/s^2}}$ **(0,6 т)**

В) $m\dfrac{dv}{dt} = IBL$ **(0,5 т)**

$I = -\dfrac{dq}{dt}$ **(0,5 т)**

$\Rightarrow mv = BL(q_0 - q) = CBL(U_0 - U)$ **(0,5 т)**

$U_\infty = v_\infty BL$ **(0,5 т)**

$\Rightarrow (m + CB^2L^2)v_\infty = CBLU_0$

$\boxed{v_\infty = \dfrac{CBLU_0}{m + CB^2L^2} = 45.5\,\mathrm{m/s}}$ **(1,0 т)**

Г) $\dfrac{dv_\infty}{dB} = CLU_0 \dfrac{m - CB^2L^2}{(m + CB^2L^2)^2} = 0$ **(0,5 т)**

$\boxed{\Rightarrow B = \dfrac{1}{L}\sqrt{\dfrac{m}{C}} = 0.316\,\mathrm{T}}$ **(1,0 т)**

$\boxed{v_{\max} = \dfrac{U_0}{2}\sqrt{\dfrac{C}{m}} = 79.1\,\mathrm{m/s}}$ **(1,0 т)**

<u>Задача 3</u>. Корпускулярни характеристики са енергията и импулса. Ще разгледаме процес с поглъщане на фонон. За падащия фотон енергията и импулса по големина са равни на $h\nu$ и $h\nu/\bar{c} = nh\nu/c$, за разсеяния фотон са $h\nu''$ и $h\nu''/\bar{c} = nh\nu''/c$, а за фонона – $h\Omega$ и $h\Omega/u$ **[1 т.].** От закона за запазване на енергията имаме

$$h\nu'' = h\nu + h\Omega \Rightarrow \nu'' = \nu + \Omega, \qquad \textbf{[1 т.]}$$

а от закона за запазване на импулса следват равенствата

$$(nh\nu''/c)\cos\theta = nh\nu/c + (h\Omega/u)\cos\alpha \Rightarrow (n\nu''/c)\cos\theta = n\nu/c + (\Omega/u)\cos\alpha, \qquad \textbf{[1 т.]}$$

$$(nh\nu''/c)\sin\theta = (h\Omega/u)\sin\alpha \Rightarrow (n\nu''/c)\sin\theta = (\Omega/u)\sin\alpha\,.$$ **[1 т.]**

Ъгълът между импулса на падащия фотон и импулса на разсеяния фотон е θ, а ъгълът между падащия фотон и фонона е α. Като изключим от горните уравнения ъгъла α и ν'' и отчетем условието $u << c/n$, получаваме квадратното уравнение

$$x^2 - \left(\frac{2nu}{c}\sin\frac{\theta}{2}\right)^2 x - \left(\frac{2nu}{c}\sin\frac{\theta}{2}\right)^2 = 0,$$ **[1 т.]**

където $x = \Omega/\nu$. Решението на уравнението е

$$x = \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{2nu}{c}\sin\frac{\theta}{2}\right)^2 + \sqrt{\left(\frac{2nu}{c}\sin\frac{\theta}{2}\right)^4 + 4\left(\frac{2nu}{c}\sin\frac{\theta}{2}\right)^2}\right\} =$$

$$= \left(\frac{2nu}{c}\sin\frac{\theta}{2}\right)\left\{\left(\frac{nu}{c}\sin\frac{\theta}{2}\right) + \sqrt{\left(\frac{nu}{c}\sin\frac{\theta}{2}\right)^2 + 1}\right\} \approx$$

$$\approx \frac{2nu}{c}\sin\frac{\theta}{2}.$$ **[1,5 т.]**

Тук е отчетено, че $nu/c << 1$, при което намираме

$$\Omega = \frac{2nu\nu}{c}\sin\frac{\theta}{2}.$$ **[0,5 т.]**