Лекция 10

§10. Несобствени интеграли. Числено пресмятане на интеграли

1. Несобствени интеграли. Досега при определяне на интеграла предполагахме, че подинтегралната функция $f(x)$ е ограничена и интервала на интегриране е краен. Тук ще разширим това определение по целесъобразност, произтичаща както от теорията така и от приложенията на интеграла. Понеже темата е твърде обширна, и е свързана с многобройни твърдения от частен характер, ще си послужим главно с примери. Да разгледаме интеграла

(10.1) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$.

Този интеграл е ***несобствен***, понеже подинтегралната функция $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x}}$ не е ограничена в интервала на интегриране $[0,1)$, тъй като $\lim_{x\to 1-0} f(x)=\infty$ (Рис. 10.1).

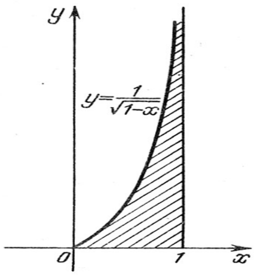

Рис. 10.1.

От друга страна, за всяко ξ, $0\le\xi<1$, интегралът $\int_0^{\xi}\frac{1}{\sqrt{1-x}}dx$ е добре определен, което дава основания да положим

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = \lim_{x\to 1-0}\int_0^{\xi}\frac{dx}{\sqrt{1-x}} = \lim_{\xi\to 1-0}\left[-2\sqrt{1-x}\Big|_0^{\xi}\right] = \lim_{\xi\to 1-0}\left[2-2\sqrt{1-\xi}\right]=2 .$$

В този случай казваме, че несобственият интеграл (10.1) има особеност в десния край на интервала. Лицето на неограничения трапец от рис. 10.1 се оказа крайно.

По същия начин можем да постъпим и с интеграла

(10.2) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$.

Този интеграл също е несобствен, тъй като подинтегралната функция $f(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ не е ограничена в интервала на интегриране $(0,1]$, тъй като $\lim_{x\to +0} f(x)=\infty$. От друга страна, за всяко ξ, $1\ge\xi>0$, интегралът $\int_{\xi}^1\frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$ е добре определен, което дава основания да положим

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \lim_{\xi\to +0}\int_{\xi}^1\frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \lim_{\xi\to +0}\left[\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}\Big|_{\xi}^{1}\right] = \lim_{\xi\to +0}\left[\frac{3}{2}-\frac{3}{2}\xi^{\frac{2}{3}}\right]=\frac{3}{2}.$$

В този случай несобственият интеграл (10.2) има особеност в левия край на интервала. И в двата случая казваме, че несобствените интеграли са ***сходящи***, защото границите чрез която се определят техните стойности съществуват (и са различни от $\pm\infty$). Несобственият интеграл с особеност в левия край на интервала

(10.3) $\displaystyle\int_1^3 \frac{dx}{x-1}$

обаче е ***разходящ***, тъй като границата чрез която се определя неговата стойност е ∞,

$$\lim_{\xi\to 1+0}\int_\xi^3 \frac{dx}{x-1} = \lim_{\xi\to 1+0}\left[\ln(x-1)\Big|_\xi^3\right] = \lim_{\xi\to 1+0}\left[\ln 2 - \ln(\xi-1)\right] = \infty .$$

Един несобствен интеграл сходящ, когато въпросната граница не само съществува, но и е различна от $\pm\infty$. За интеграла (10.3) можем да напишем

$$\int_1^3 \frac{dx}{x-1} = \infty ,$$

понеже това се съгласува с направените досега определения за граници. Може да се случи даден несобствен интеграл е разходящ, понеже границата, с която се определя, ***не съществува.***

Горните определения се ***съгласуват*** със случая, когато подинтегралната функция няма особеност, т.е. когато разглеждаме обичайния интеграл, който в контраст с термина "несобствен" можем да наречем условно "собствен". Наистина, нека функцията $f(x)$ е ограничена и интегруема в интервала $[a,b]$, $|f(x)| \le C$, $x \in [a,b]$. Тогава, за всяко ξ, $a < \xi < b$, имаме

$$\left|\int_a^\xi f(x)dx - \int_a^b f(x)dx\right| = \left|\int_\xi^b f(x)dx\right| \le C|b-\xi| ,$$

следователно

$$\lim_{\xi\to b-0}\int_a^\xi f(x)dx = \int_a^b f(x)dx \text{, аналогично } \lim_{\xi\to a+0}\int_\xi^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx .$$

Когато някоя от границите на интеграла е безкрайност, определението е аналогично. Например интегралът

(10.4) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2}$

е несобствен с особеност в десния край на интервала (Рис. 10.2).

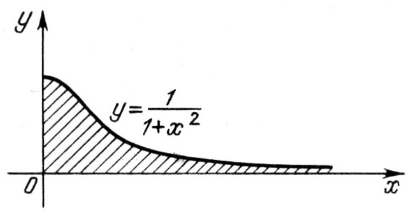

Рис. 10.2.

По определение

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{\xi\to\infty}\int_0^\xi \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{\xi\to\infty}\left[\operatorname{arctg} x\Big|_0^\xi\right] = \lim_{\xi\to\infty}\left[\operatorname{arctg}\xi - \operatorname{arctg} 0\right] = \operatorname{arctg}\infty = \frac{\pi}{2} ,$$

което показва, че интегралът (10.4) е сходящ. Лицето на неограничения трапец от рис. 10.2 също се оказа крайно.

Аналогично се постъпва за интеграли, в които лявата граница е $-\infty$.

За всички разглеждани по-горе несобствени интеграли (10.1), (10.2), (10.3) и (10.4), подинтегралната функция имаше граница (крайна или безкрайна) в особения край. Дадените определения за несобствен интеграл остават същите и когато такава граница не съществува.

Несобственият интеграл $\int_a^b f(x)dx$ се нарича ***абсолютно сходящ***, когато е сходящ несобственият интеграл $\int_a^b |f(x)|dx$. Ако един несобствен интеграл е абсолютно сходящ, то той е сходящ. Обратното в общия случай не е вярно. Например най-важният от теорията на редовете на Фурие несобствен интеграл, с особеност в десния край на интервала, понеже интервалът е неограничен отдясно,

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx$$

е сходящ, но не е абсолютно сходящ. Тук в левия край няма особеност, понеже подинтегралната функция има граница при $x \to 0$ (равна на 1).

Несобствен интеграл, който е сходящ, но не е абсолютно сходящ, се нарича ***условно сходящ***.

Абсолютно сходящите несобствени интеграли не се различават в основните си свойства от собствените интеграли. В рамките на една по-обща теория (интеграл на Лебег), между тях няма формални разлики. Условно сходящите несобствени интеграли обаче образуват самостоятелен клон на анализа, който не се явява частен случай на по-обща теория.

В много случаи е полезен следният критерий за абсолютна сходимост.

Теорема 10.1 ***(Вайерщрас).*** Нека в интервала на интегриране да е изпълнено неравенството $|f(x)| \le g(x)$, при което несобственият интеграл (в крайни или безкрайни граници) $\int_a^b g(x)dx$ е сходящ. Тогава несобственият интеграл $\int_a^b f(x)dx$ е абсолютно сходящ. ■

С помощта на тази теорема да изследваме за абсолютна сходимост интеграла

$$I = \int_0^1 \frac{\sin\left(\ln\left(x^3+1\right)\operatorname{tg} x\right)}{\sqrt{x}}dx .$$

Тук за подинтегралната функция имаме оценка

$$\left|\frac{\sin\left(\ln\left(x^3+1\right)\operatorname{tg} x\right)}{\sqrt{x}}\right| \le \frac{1}{\sqrt{x}},\ 0 < x \le 1 .$$

Ако в качеството на мажоранта положим функцията $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, ще получим, че интегралът I е абсолютно сходящ, понеже интегралът $\int_0^1 \dfrac{dx}{\sqrt{x}}$ е сходящ (неговата стойност е 2).

Полезно допълнение на теоремата на Вайерщрас е следното

Твърдение 10.1. Нека в интервала на интегриране (краен или безкраен) е изпълнено $0 \le f(x) \le g(x)$. Тогава, ако интегралът $\int_a^b g(x)dx$ е сходящ, то интегралът

$\int_a^b f(x)dx$ също е сходящ, следователно, ако интеграл $\int_a^b f(x)dx$ е разходящ, то интегралът $\int_a^b g(x)dx$ също е разходящ. ■

Ако подинтегралната функция е неотрицателна, то сходимостта и абсолютната сходимост означават едно и също. Условната сходимост е налице, когато подинтегралната функция си сменя знака по сложен начин.

С помощта на твърдение 10.1 можем да установим, че интегралът

$$I = \int_0^1 \frac{2+\cos(x^2+1)}{x}dx$$

е разходящ. Тук е налице неравенството

$$\left|\frac{2+\cos(x^2+1)}{x}\right| \geq \frac{1}{x},$$

а интегралът от минорантата $g(x) = \frac{1}{x}$ е разходящ.

Когато пресмятаме несобствени интеграли можем да използваме формулата на Нютон-Лайбниц, както и интегриране по части. Например да пресметнем несобствения интеграл

$$I = \int_0^1 x\ln x dx.$$

Имаме

$$I = \int_0^1 x\ln x dx = \lim_{\xi\to+0}\int_\xi^1 x\ln x dx = \lim_{\xi\to+0}\int_\xi^1 \ln x d\frac{x^2}{2} = \lim_{\xi\to+0}\left[\frac{x^2}{2}\ln x\Big|_\xi^1 - \int_\xi^1 \frac{x}{2}dx\right],$$

$$I = \lim_{\xi\to+0}\left[\frac{x^2}{2}\ln x\Big|_\xi^1 - \frac{x^2}{4}\Big|_\xi^1\right] = \lim_{\xi\to+0}\left[-\frac{\xi^2}{2}\ln\xi - \frac{1}{4} + \frac{\xi^2}{4}\right] = -\frac{1}{4},$$

понеже чрез правилото на Лопитал можем да пресметнем, че $\lim_{\xi\to+0}\frac{\xi^2}{2}\ln\xi = 0$.

Прилага се също и техниката на смяна на променливите. Например да пресметнем интеграла

$$I = \int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)^{3/2}}.$$

Полагаме $x = \mathrm{tg}\, t$, където $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$. Тогава $dx = \frac{dt}{\cos^2 t}$ и $x^2+1 = \frac{1}{\cos^2 t}$. След заместване намираме

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t dt = 1.$$

Несобственият интеграл

$$I = \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{x(2-x)}}$$

има особености и в двата края на интервала. За да установим неговата сходимост, го разделяме на два несобствени интеграла, всеки от които има само по една особеност,

$$I=\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{x(2-x)}}=\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(2-x)}}+\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x(2-x)}}=I_1+I_2 .$$

В този случай интегралът I е сходящ, понеже и двата несобствени интеграла I_1 и I_2 са сходящи (ако поне единият от тях беше разходящ, то и съставният интеграл щеше да е разходящ).

Най-важни за приложенията са несобствените интеграли, зависещи от параметър. Параметърът трябва да се схваща като друга променлива на подинтегралната функция. Да отбележим интегралите

$\Gamma(x)=\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt$ - ***гама функция*** на Ойлер,

$\mathrm{B}(x,y)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt$ - ***бета функция*** на Ойлер,

които имат многобройни приложения. От огромно значение за моделирането в техническите науки е преобразуването на Лаплас

$$L[f](p)=\int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt ,$$

което е определено за всяка (интегруема във всеки интервал $[0,\xi]$, $\xi\geq 0$) функция $f(t):[0,\infty)\to\mathrm{R}$, която удовлетворява изискване за ръст $|f(t)|\leq Ce^{\sigma t}$, $t\geq 0$, за някакви константи C и σ. В такъв случай преобразуването на Лаплас е определено за всяко $p>\sigma$.

При определени условия може да се диференцира под знака на интеграла. За преобразуването на Лаплас се доказва, че функцията $L[f](p)$ има производни от всеки ред относно p (при $p>\sigma$), при което диференцирането може да се извърши под знака на интеграла, т.е.

$$\frac{d^n}{dp^n}L[f](p)=\int_0^\infty f(t)e^{-pt}(-t)^n dt .$$

2. Числени методи за интегриране. Определеният интеграл $\int_a^b f(x)dx$, където $f(x)$ е непрекъсната в интервала $[a,b]$, е число, което може да бъде намерено с помощта на формулата на Нютон-Лайбниц, ако е известна една примитивна на подинтегралната функция. Не винаги обаче може да се намери примитивна като краен израз от елементарни функции, даже когато $f(x)$ има сравнително прост вид. Забележителни примери за интеграли, при които примитивната не се получава като краен израз от елементарни функции са

$\int\frac{\sin x}{x}$ - ***интегрален синус***,

$\int\frac{\cos x}{x}$ - ***интегрален косинус***,

$\int\frac{dx}{\ln x}$ - ***интегрален логаритъм***,

$\int \sin x^2 dx$ и $\int \cos x^2 dx$ - ***интеграли на Френел***,

$\int e^{-x^2} dx$ - ***интеграл на Поасон***.

От друга страна интегралът е граница на интегралните суми, когато диаметърът на делението клони към нула и на тази основа може да бъде пресметнат с някаква точност. Съществуват различни методи за числено пресмятане на определен интеграл, някои от които ще бъдат описани по надолу.

Метод на правоъгълниците. Идеята на метода на правоъгълниците се корени в дефиницията на определен интеграл чрез суми на Риман. Нека функцията $f(x)$ е непрекъсната в интервала $[a,b]$ (Рис. 10.3). Тогава стойността на определения интеграл е равна на лицето на криволинейния трапец, което е приблизително равно на лицето на правоъгълника с основа сегмента $[a,b]$ и височина $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$, т.е.

(10.5) $$\int_a^b f(x)dx \approx f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a).$$

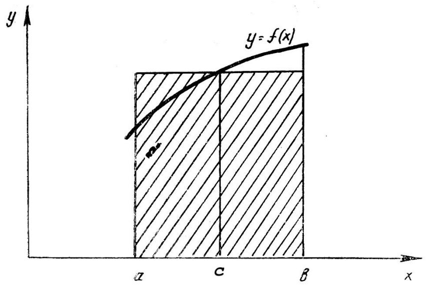

Рис. 10.3.

Да направим оценка за грешката, която се допуска, когато заменим интеграла с дясната страна от (10.5). За тази цел ще предположим, че функцията $f(x)$ има непрекъсната втора производна в интервала $[a,b]$ и нека константата M_2 е оценка отгоре за модула на тази производна, $M_2 = \max\limits_{a \le x \le b} |f''(x)|$. Полагаме $c = \frac{a+b}{2}$, точката c е среда на интервала. Съгласно формулата на Тейлор имаме

$$f(x) = f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{f''(\xi)}{2}(x-c)^2,$$

където ξ е някакво число от (a,b). След интегриране, последното приема вида

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)\int_a^b dx + f'(c)\int_a^b (x-c)dx + \frac{1}{2}\int_a^b f''(\xi)(x-c)^2 dx,$$

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a) + R, \text{ където } R = \frac{1}{2}\int_a^b f''(\xi)(x-c)^2 dx,$$

следователно грешката във формулата (10.5) е величината R. За модула на R е в сила оценката

(10.6) $$|R| \le \frac{1}{2}\int_a^b \left| f''(\xi)(x-c)^2 \right| dx \le \frac{M_2}{2}\int_a^b (x-c)^2 dx = \frac{M_2}{24}(b-a)^3.$$

Нека $\tau = \{x_k\}_{k=0}^{n}$ е равномерно деление на интервала $[a,b]$ със стъпка $h = \dfrac{b-a}{n}$. За точките на делението, които се наричат още ***възли***, имаме $x_k = a + kh$, $k = 0,1,\ldots,n$. Според адитивното свойство на интеграла,

$$(10.7)\quad \int_a^b f(x)dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx + \int_{x_2}^{x_3} f(x)dx + \cdots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)dx .$$

За всеки от интервалите $[x_{k-1}, x_k]$, $k = 1,2,\ldots,n$, прилагаме формулата (10.5) и получаваме

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)dx = f\left(\frac{x_{k-1}+x_k}{2}\right)(x_k - x_{k-1}) + R_k ,$$

където, съгласно (10.6), $|R_k| \le \dfrac{M_2}{24}(x_k - x_{k-1})^3$, $k = 1,2,\ldots,n$. По условие $x_k - x_{k-1} = \dfrac{b-a}{n}$, следователно

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)dx = \frac{b-a}{n} f\left(\frac{x_{k-1}+x_k}{2}\right) + R_k , \text{ където } |R_k| \le \frac{M_2}{24n^3}(b-a)^3,\ k = 1,2,\ldots,n .$$

Сега (10.7) приема вида

$$(10.8)\quad \int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{n}\left[f\left(\frac{x_0+x_1}{2}\right) + f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) + f\left(\frac{x_2+x_3}{2}\right) + \cdots + f\left(\frac{x_{n-1}+x_n}{2}\right)\right] + R ,$$

където $R = R_1 + R_2 + \cdots + R_n$ е сумарната грешка. Тази грешка може допуска проста оценка отгоре

$$|R| \le |R_1| + |R_2| + \cdots + |R_n| \le \sum_{k=1}^{n} \frac{M_2}{24n^3}(b-a)^3 = \frac{M_2(b-a)^3}{24n^2} .$$

Самата формула на правоъгълниците се получава от (10.8) след отстраняване на остатъчния член R,

$$(10.9)\quad \int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\left[f\left(\frac{x_0+x_1}{2}\right) + f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) + f\left(\frac{x_2+x_3}{2}\right) + \cdots + f\left(\frac{x_{n-1}+x_n}{2}\right)\right].$$

Тази формула е удобна за пресмятане, но, както се вижда от оценката на остатъчния член R, за да се получи висока точност на пресмятане е необходимо да се използват голям брой възли. Например за да се получи грешка от порядък 0.0001 са необходими около 100 възела.

Метод на трапеците. Основната идея на този метод (Рис. 10.4) е, за приближена стойност на интеграла, която е лицето на криволинейния трапец, да се използва лицето на обикновения трапец, което е истинската стойност на интеграла в случая, когато функцията $f(x)$ е линейна.

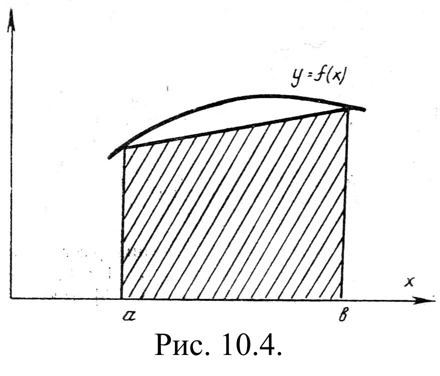

Рис. 10.4.

Линейната функция

$$L_1(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

интерполира $f(x)$ във възлите a и b, т.е. $L_1(a) = f(a)$ и $L_1(b) = f(b)$. Тя е частен случай на итерполационен полином на Лагранж, който в общия случай интерполира $f(x)$ в повече на брой възли. По метода на трапеците имаме

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b L_1(x)dx = (b - a)\frac{f(a) + f(b)}{2}.$$

Остатъчния член на формулата

$$\int_a^b f(x)dx = (b - a)\frac{f(a) + f(b)}{2} + R,$$

допуска следната оценка, $|R| \le \frac{M_2}{12}(b - a)^3$. Сега, разсъждавайки както при формулата на правоъгълниците, получаваме следната изчислителна формула,

$$(10.10)\ \int_a^b f(x)dx \approx \frac{b - a}{n}\left[\frac{f(x_0) + f(x_1)}{2} + \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} + \frac{f(x_2) + f(x_3)}{2} + \dots + \frac{f(x_{n-1}) + f(x_n)}{2}\right]$$

която се нарича ***формула на трапеците***. Остатъчният член (грешката) на тази формула се оценява отгоре по следния начин

$$|R| \le \frac{M_2(b - a)^3}{12n^2}.$$

Вижда се, че формулата на правоъгълниците и формулата на трапеците имат един и същ порядък на точност, даже в известен смисъл, формулата на правоъгълниците изглежда по-добра, понеже допуска два пъти по-малка оценка отгоре за грешката въпреки, че формулата на трапеците изглежда "по-остроумен" начин за намиране приближена стойност на интеграла. Причината за това се крие във факта, че при формулата на правоъгълниците ние всъщност заменяме интеграла с интеграл от функцията $l(x) = f(c) + f'(c)(x - c)$, която е формирана от първите две събираеми от формулата на Тейлор за развитие на $f(x)$ около точката $c = \frac{a + b}{2}$,

$$(10.11)\ \int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b l(x)dx.$$

Линията $l(x)$ е допирателна към графиката на $f(x)$ за $x = c$ (Рис. 10.3). Интегралът от дясната страна на (10.11) е всъщност лицето на трапеца с горна страна, получена от графиката на $l(x)$ за $x \in [a, b]$. Можем да приемем, че линейната функция $l(x)$ по-добре отразява поведението на $f(x)$, отколкото интерполационния полином $L_1(x)$.

Метод на параболите (формула на Симпсън). Тук функцията $f(x)$ се интерполира в три възела, a, b и $c = \frac{a + b}{2}$, чрез полинома

$$L_2(x) = f(a)\frac{(x - c)(x - b)}{(a - c)(a - b)} + f(c)\frac{(x - a)(x - b)}{(c - a)(c - b)} + f(b)\frac{(x - a)(x - c)}{(b - a)(b - c)},$$

за който непосредствено се проверява, че $L_2(a) = f(a)$, $L_2(c) = f(c)$ и $L_2(b) = f(b)$. Графиката на $L_2(x)$ е парабола, която минава през точките $(a, f(a))$, $(c, f(c))$ и $(b, f(b))$, затова и метода се нарича по този начин (тази парабола може да се трансформира в права линия, когато $f(x)$ е линейна функция) (Рис. 10.5).

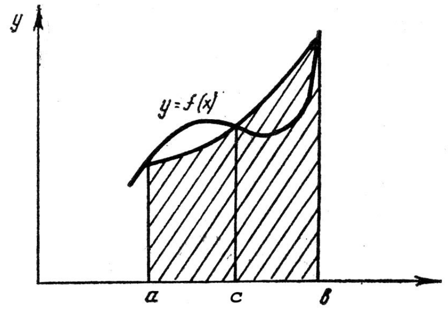

Рис. 10.5.

При метода на параболите

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b L_2(x)dx = \frac{b-a}{6}\left[f(a)+4f(c)+f(b)\right].$$

Ако приемем, че функцията $f(x)$ има непрекъсната четвърта производна в интервала $[a,b]$ и $M_4 = \max_{a\le x\le b}\left|f^{(4)}(x)\right|$, то остатъчният член във формулата

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{6}\left[f(a)+4f(c)+f(b)\right]+R$$

допуска следната оценка, $|R| \le \frac{M_4}{2880}(b-a)^5$. Нека $\tau = \{x_k\}_{k=0}^{2n}$ е равномерно делене на интервала $[a,b]$ (с $2n+1$ възела). Изведената по-горе формула ще прилагаме над интервалите $[x_0,x_2]$, $[x_2,x_4]$, ..., $[x_{2n-2},x_{2n}]$, които са n на брой, а средата на интервала $[x_{2k-2},x_{2k}]$ е точката x_{2k-1}, $k=1,2,\ldots,n$. По този начин получаваме следната съставна изчислителна формула на параболите

$$(10.12)\ \int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6n}\left[f(a)+2\left(f(x_2)+\cdots+f(x_{2n-2})\right)+4\left(f(x_1)+\cdots+f(x_{2n-1})\right)+f(b)\right].$$

Грешката на тази формула се оценява отгоре по следния начин, $|R| \le \frac{M_4(b-a)^5}{2880n^4}$, което прави формулата на параболите (10.12) значително по-добра от формулата на правоъгълниците (10.9) и формулата на трапеците (10.10).

Квадратурни формули на Гаус. При тези формули интегралът се пресмята по следния начин

$$(10.13)\ \int_a^b f(x)p(x)dx \approx w_1 f(x_1)+w_2 f(x_2)+\cdots+w_n f(x_n),$$

където x_1, x_2, ..., x_n, са възлите на формулата, а w_1, w_2, ..., w_n, са нейните тегла. Тук $p(x)>0$ е някаква (интегруема) теглова функция, свързана с естеството на конкретната задача, към която се прилага численото интегриране. Възлите и теглата се избират по такъв начин, че формулата да бъде точна за полиноми от възможно най-висока степен. При подходящ избор на тези параметри, може да се достигне до степен $2n-1$.

Ако поискаме формулата (10.13) да бъде точна за полиноми от степен по-малка или равна на $n-1$, или което е едно и също, да бъде точна за функциите 1, x, x^2, ..., x^{n-1}, то за теглата ще получим линейната система

$$w_1 + w_2 + \cdots + w_n = \int_a^b p(x)dx$$

$$w_1 x_1 + w_2 x_2 + \cdots + w_n x_n = \int_a^b x p(x)dx,$$

$$w_1 x_1^2 + w_2 x_2^2 + \cdots + w_n x_n^2 = \int_a^b x^2 p(x)dx,$$

… … …

$$w_1 x_1^{n-1} + w_2 x_2^{n-1} + \cdots + w_n x_n^{n-1} = \int_a^b x^{n-1} p(x)dx,$$

чиято детерминанта е от тип на Вандермонд и е различна от нула, понеже възлите се предполагат различни. Самите възли се избират нулите на n-тия ортогонален полином в интервала $[a,b]$, относно теглото $p(x)$. Казва се, че полиномите $Q_0(x) \equiv 1$, $Q_1(x)$, $Q_2(x)$, ..., $Q_n(x)$, ..., са взаимно ортогонални в интервала $[a,b]$, относно теглото $p(x)$, когато $\deg Q_k(x) = k$, за всяко $k = 0,1,2,\dots$, и

$$\int_a^b Q_k(x) Q_n(x) p(x)dx = 0,$$

при всяко $n = 1,2,\dots$ и всяко k, $0 \le k < n$. За намиране на тези ортогонални полиноми има разработени стандартни средства, свързани с процеса на ***ортогонализация по Грам-Шмид***.

Теорема 10.2. Нека възлите x_1, x_2, ..., x_n, са нулите на n-тия ортогонален полином $Q_n(x)$, а теглата w_1, w_2, ..., w_n, са избрани такива, че формулата (10.13) е точна за функциите 1, x, x^2, ..., x^{n-1}. Тогава тази формула е точна за всеки полином, чиято степен не надвишава $2n-1$. ■

С други думи ***алгебричната степен на точност*** на формулата е $2n-1$. Квадратурните формули н Гаус са много удобни за използване в практиката и дават изключително добра точност, когато подинтегралната функция не си мени знака твърде често.