

Лекция 1

§1. Граница и непрекъснатост на функции

1. Множество на реалните числа \mathbb{R} . Множеството на естествените числа \mathbb{N} се състои от числата 1, 2, 3, ... и т.н. Пишем $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$. Множеството на целите числа $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\}$, а множеството на рационалните числа $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N} \right\}$.

Множеството на рационалните числа образува числово поле, което по определение означава, че там са възможни двете операции събиране (изваждане) и умножение (деление), при което са изпълнени обичайните закони за комутативност, асоциативност и дистрибутивност. Делението е възможно за всяко рационално число, различно от нула. Всички тези числови множества се изобразяват върху числовата ос. Числовата ос е права линия, на която са отбелязани нулата и единицата, което еднозначно определя място на всяко друго естествено, цяло и рационално число.

В природата обаче има величини, които не се изразяват чрез рационални числа. Например дължината на хипотенузата на правоъгълен триъгълник с катети равни на 1, е равна на $\sqrt{2}$, която величина не е рационално число. Този факт е бил известен още на древните гърци. От друга страна величината $\sqrt{2}$ има добре определено геометрично място върху числовата ос. Такива числа се наричат ирационални, а съвкупността на всичките рационални и ирационални числа образува множеството на реалните числа \mathbb{R} . По този начин множеството на реалните числа се **идентифицира напълно** с числовата ос, затова реалните числа понякога ще наричаме точки. Множеството \mathbb{R} (както \mathbb{Q}) е числово поле – в него са възможни операциите събиране (изваждане) и умножение (деление), при което са изпълнени законите за комутативност, асоциативност и дистрибутивност. Делението е възможно за всяко реално число, различно от нула. Освен това в множеството \mathbb{R} (както и в \mathbb{Q}) съществува пълна наредба, т.е. за всеки две реални числа x и y е изпълнено точно едно от трите съотношения: $x < y$, $x > y$ или $x = y$. В множеството \mathbb{R} е валиден принципът за непрекъснатост (пълнота на \mathbb{R}), който ще бъде формулиран по-нататък и който не е в сила за рационалните числа.

Казва се че непразното числово множество A е **ограничено отгоре (отдолу)**, когато съществува константа M (m), за която $x \leq M$ ($x \geq m$) за всяко $x \in A$. Множеството се нарича ограничено, когато е ограничено отгоре и отдолу.

От всичките горни граници, най-голям интерес представлява най-малката, която (когато съществува) се нарича точна горна граница.

Определение 1.1. Числото M' се нарича точна горна граница за A , когато е горна граница за A , но всяко по-малко от него вече не е горна граница, т.е. когато $x \leq M'$ за всяко $x \in A$ и за всяко $\varepsilon > 0$ съществува $x_\varepsilon \in A$, такова че $M' - \varepsilon < x_\varepsilon \leq M'$. Числото m' се нарича точна долна граница за A , когато е долна граница за A , но всяко по-голямо от него вече не е долна граница, т.е. когато $x \geq m'$ за всяко $x \in A$ и за всяко $\varepsilon > 0$ съществува $x_\varepsilon \in A$, такова че $m' + \varepsilon > x_\varepsilon \geq m'$.

Точната горна граница на A се бележи $\sup A$, а точната долна граница $\inf A$.

Да припомним определенията за интервали: $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ – ограничен отворен интервал; $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$ – ограничен затворен интервал и т.н.

Всеки отворен интервал съдържа безбройно много рационални и безбройно много ирационални числа.

Околност на точката ξ се нарича всеки отворен интервал, който съдържа ξ . Под ε -околност на ξ ще разбираме симетричния интервал $(\xi - \varepsilon, \xi + \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$.

Принцип за непрекъснатост на реалните числа. Всяко непразно ограничено отгоре множество от реални числа има точна горна граница и всяко непразно ограничено отдолу множество има точна долна граница.

Принцип на Архимед. Множеството на целите числа не е ограничено отгоре.

Принципът за непрекъснатост не е в сила над множеството на рационалните числа. Например, ако A е множеството на всичките рационални числа, по-малки от $\sqrt{2}$, то A няма точна горна граница, понеже би трябвало $\sup A = \sqrt{2}$, но $\sqrt{2}$ не е рационално число.

Теорема 1.1 (теорема за отделимост). Нека A и B са непразни числови множества, за които е изпълнено $x \leq y$ при всеки избор на $x \in A$ и $y \in B$. Тогава $\sup A \leq \inf B$ и следователно съществува (поне едно) ξ , например всяко ξ от интервала $[\sup A, \inf B]$, за което $x \leq \xi \leq y$ при всеки избор на $x \in A$ и $y \in B$, т.е. точката ξ разделя множествата A и B . Ако освен това, за всяко $\varepsilon > 0$ съществуват $x_\varepsilon \in A$ и $y_\varepsilon \in B$, за които $0 \leq y_\varepsilon - x_\varepsilon < \varepsilon$, то $\sup A = \inf B$ и следователно точката ξ е единствена $\xi = \sup A = \inf B$. ■

Теорема 1.1 е по същество еквивалентна на принципа за непрекъснатост.

Теорема 1.2 (на Кантор за вложените интервали). Нека е дадена безкрайна система от вложени интервали $[a_n, b_n]$, $n = 1, 2, 3, \dots$,

$$[a_1, b_1] \supseteq [a_2, b_2] \supseteq [a_3, b_3] \supseteq \dots \supseteq [a_n, b_n] \supseteq \dots$$

Тогава тяхното сечение съдържа поне една точка. Освен това, ако дължината на тези интервали клони към нула, то сечението се състои от единствена точка. ■

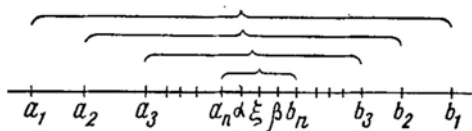


Рис. 1.1.

По-точният изказ на заключението на теоремата на Кантор е, че ако $\alpha = \sup\{a_1, a_2, \dots\}$ и $\beta = \inf\{b_1, b_2, \dots\}$, то $\alpha \leq \beta$ и следователно всяко $\xi \in [\alpha, \beta]$ принадлежи на сечението на всичките интервали (Рис. 1.1).

2. Числови редици. Числова редица се получава, когато на всяко естествено число n (номер) се съпостави реално число a_n – общ член на редицата. Редицата с общ член a_n ще означаваме с $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ или накратко $\{a_n\}$, понеже е ясно че редицата е безкрайна, а откъде започва номерацията е фактически без значение за начина, по който числовите редици се използват. Например, ако $a_n = \frac{1}{n}$, то първите няколко члена имат вида

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$$

а за редицата с общ член $a_n = \frac{n+1}{n}$

$$2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \dots$$

Когато между всичките индекси на една редица

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$$

изберем растяща подредица от индекси (която в частност може да съвпада с изходната)

$$n_1 < n_2 < n_3 < \dots < n_v < \dots$$

можем да разгледаме подредица на изходната

$$a_{n_1}, a_{n_2}, a_{n_3}, \dots, a_{n_v}, \dots$$

която бележим с $\{a_{n_v}\}_{v=1}^\infty$.

Редицата $\{a_n\}$ се нарича **ограничена** (отгоре/отдолу), когато нейни членове образуват ограничено (отгоре/отдолу) множество.

Точката ξ се нарича **точка на съгъстяване** за редицата $\{a_n\}$ когато всяка околност (ε -околност) на ξ съдържа безбройно много членове на редицата.

Ограничената редицата $\{a_n\}$ се нарича **сходяща**, когато има единствена точка на съгъстяване ξ . В този случай числото ξ се нарича граница на редицата и се означава $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \xi$ или $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \xi$.

Това определение за сходяща редица е еквивалентно на следното определение.

Определение 1.2. Казва се, че редицата $\{a_n\}$ е сходяща и клони към границата ξ когато всяка ε -околност на ξ съдържа всичките членове на редицата от известно място нататък, т.е. когато за всяко $\varepsilon > 0$ съществува индекс n_0 такъв, че $|a_n - \xi| < \varepsilon$, за всяко $n > n_0$.

Неравенството $|a_n - \xi| < \varepsilon$ е еквивалентно на $a_n \in (\xi - \varepsilon, \xi + \varepsilon)$, т.е. $\xi - \varepsilon < a_n < \xi + \varepsilon$. Точката ξ е точка на съгъстяване за редицата $\{a_n\}$ тогава и само тогава, когато съществува сходяща подредица $\{a_{n_v}\}$ с граница ξ . Нека редицата $\{a_n\}$ е сходяща и клони към границата ξ . Тогава всяка нейна подредица $\{a_{n_v}\}$ също е сходяща и клони към същата граница ξ .

Например редицата с общ член $a_n = \frac{n+1}{n}$ е сходяща и клони към границата $\xi = 1$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = 1.$$

Да проверим този резултат следвайки определение 1.2. Нека $\varepsilon > 0$. За тази редица имаме $|a_n - \xi| = \frac{1}{n}$. Да фиксираме едно n_0 достатъчно голямо, че $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$. Тогава, за всяко $n > n_0$

$$\text{имаме } |a_n - \xi| = \frac{1}{n} < \frac{1}{n_0} < \varepsilon.$$

Редица, на която общият член не се променя се нарича **стационарна**. Очевидно всяка стационарна редица е сходяща, при което нейната граница е равна на общата стойност на общия член.

Всяка сходяща редица е ограничена.

Теорема 1.3 (Болцано-Вайерщрас). От всяка ограничена редица можем да изберем сходяща подредица. ■

От теоремата на Болцано-Вайерщрас следва, че всяка ограничена редица има поне една точка на съгъстяване, понеже границата на съответната сходяща подредица се явява точка на съгъстяване за редицата. Една ограничената редица обаче е сходяща, когато има точно една точка на съгъстяване.

Следващото твърдение съдържа основните правила за смятане със сходящи редици.

Твърдение 1.1. Нека

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \xi \text{ и } \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \eta.$$

Тогава:

1) Редицата с общ член $a_n b_n$ също е сходяща, при което

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = \xi \eta.$$

2) Редицата с общ член $a_n \pm b_n$ също е сходяща, при което

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \pm b_n) = (\xi \pm \eta).$$

3) Ако $\eta \neq 0$, то редицата с общ член $\frac{a_n}{b_n}$ също е сходяща, при което

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\xi}{\eta}.$$

Доказателство. За илюстрация ще докажем само 2). Нека $\varepsilon > 0$. По определение можем да намерим индекс n_1 , за който

$$|a_n - \xi| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad n > n_1.$$

Също така можем да намерим индекс n_2 , за който

$$|b_n - \eta| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad n > n_2.$$

Да изберем $n_0 > \max(n_1, n_2)$. Тогава при $n > n_0$ имаме

$$|(a_n \pm b_n) - (\xi \pm \eta)| < |a_n - \xi| + |b_n - \eta| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

и следователно числото $(\xi \pm \eta)$ изпълнява определението за граница на редицата с общ член $(a_n \pm b_n)$. ■

Както се вижда непосредствено от определения, свойствата свързани със сходимостта на дадена редица не зависи от поведението на нейните първи няколко члена, т.е. можем да променим (или да премахнем) някакъв фиксиран брой първи членове на редицата, без да се промени нейната сходимост.

Твърдение 1.2. Граничният преход запазва неравенствата, т.е. ако

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \xi \text{ и } \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \eta$$

и освен това, ако $a_n \leq b_n$ за всяко n (или за всяко n от известно място нататък), то за границите ξ и η е изпълнено аналогично неравенство $\xi \leq \eta$. ■

От строгото неравенство между членовете на редиците $a_n < b_n$ не следва строго неравенство между границите, т.е. не следва, че $\xi < \eta$.

Твърдение 1.3 (лема за двамата полицаи). Нека $a_n \leq c_n \leq b_n$ за всяка стойност на n (или за n от известно място нататък) и освен това редиците $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ са сходящи и имат обща граница ξ . Тогава редицата с общ член $\{c_n\}$ също е сходяща и клони към същата граница ξ . ■

Следващото понятие за *фундаментална редица* има основно значение.

Определение 1.3. Редицата $\{a_n\}$ се нарича фундаментална, когато $|a_n - b_m| \rightarrow 0$ при $n, m \rightarrow \infty$, т.е. когато за всяко $\varepsilon > 0$ съществува n_0 такава, че $|a_n - a_m| < \varepsilon$ при $n, m > n_0$.

Всяка сходяща редица е фундаментална. Обратното твърдение се нарича

Принцип за пълнота на \mathbb{R} . Всяка фундаментална редица от реални числа е сходяща.

Да отбележим, че този принцип не е валиден за множеството на рационалните числа. Принципът за пълнота е еквивалентен на принципа за непрекъснатост.

Определение 1.3 може да се изкаже по следния начин: редицата $\{a_n\}$ е фундаментална, когато за всяко $\varepsilon > 0$ може да се намери n_0 такава, че $|a_{n+p} - a_n| < \varepsilon$, за всяко $n > n_0$ и всяко $p \in \mathbb{N}$. Сега от принципа за пълнота се получава следния критерий за сходимост.

Теорема 1.4 (Коши). Редицата е сходяща тогава и само тогава, когато за всяко $\varepsilon > 0$ може да се намери n_0 такава, че $|a_{n+p} - a_n| < \varepsilon$, за всяко $n > n_0$ и всяко $p \in \mathbb{N}$.

Ако една редица е фундаментална, то всяка нейна подредица също е фундаментална.

При известни уговорки, ролята на граници могат да изпълняват и символите ∞ или $-\infty$. В този случай за да правим разлика между крайни и безкрайни граници ще казваме, че редицата дивергира към ∞ или $-\infty$.

Казва се, че редицата $\{a_n\}$ **дивергира към ∞ ($-\infty$)**, когато всеки интервал от вида (E, ∞) ($(-\infty, E)$) съдържа всичките членове на редицата от известно място нататък, т.е. когато за всяко E съществува индекс n_0 , за който $a_n > E$ ($a_n < E$) при $n > n_0$. Означението за дивергиращи редици е същото като за сходящи редици, пишем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty (-\infty) \quad \text{или} \quad a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty (-\infty).$$

Например редицата с общ член $a_n = \frac{n^2}{n+1}$ дивергира към ∞ .

Определение 1.4. Казва се, че редицата е **монотонно растяща (намалвяваща)**, когато $a_{n+1} \geq a_n$ ($a_{n+1} \leq a_n$). Редицата се нарича строго монотонно растяща (намалвяваща), когато $a_{n+1} > a_n$ ($a_{n+1} < a_n$).

Монотонните редици имат благоприятни свойства относно сходимостта.

Теорема 1.5. Нека редицата $\{a_n\}$ е монотонно растяща и ограничена отгоре. Тогава тя е сходяща и освен това клони към точната си горна граница $\sup\{a_n\}$. Аналогично, ако редицата $\{a_n\}$ е монотонно намалвяваща и ограничена отдолу, то тя е сходяща, при което клони към точната си долна граница $\inf\{a_n\}$. ■

Ако една монотонно растяща редица не е ограничена отгоре, то тя по определение дивергира към ∞ , следователно монотонно растящите редици "винаги" клонят към някаква граница, крайна или безкрайна. Аналогично свойство имат и монотонно намалвяващите редици.

Да докажем следното

Твърдение 1.4 (неравенство на Бернули). За всяко $x > -1$ и всяко естествено число n е изпълнено неравенството

$$(1+x)^n \geq 1+nx.$$

Доказателство. Доказателството ще проведем по индукция. При $n=1$ неравенството става очевидно понеже се свежда до $1+x \geq 1+x$. Да допуснем, че е вярно за някое $n \geq 1$. Ще докажем, че от това следва верността му за стойност на степента $n+1$. Наистина

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)(1+x)^n \geq (1+x)(1+nx) = 1+(n+1)x+nx^2 \geq 1+(n+1)x.$$

От доказателството се вижда, че неравенството е строго, когато $x \neq 0$. ■

Сега да разгледаме редиците

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad \text{и} \quad b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Твърдение 1.5. Редиците $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ имат следните свойства:

- 1) За всеки индекс n имаме $a_n < b_n$.
- 2) Редицата $\{a_n\}$ е строго монотонно растяща и ограничена отгоре, а редицата $\{b_n\}$ е строго монотонно намалвяваща и ограничена отдолу.
- 3) За всички индекси p и q е изпълнено неравенството $a_p < b_q$.

Доказателство. 1) Очевидно

$$b_n - a_n = \frac{1}{n} a_n > 0.$$

2) Да докажем първо монотонността. Ще докажем, че $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, като за тази цел ще използваме неравенството на Бернули. Имаме

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(\frac{1 + \frac{1}{n+1}}{1 + \frac{1}{n}}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{1}{n^2 + 2n + 1}\right)^n \\ &\geq \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{n}{n^2 + 2n + 1}\right) = \frac{n^3 + 3n^2 + 3n + 2}{n^3 + 3n^2 + 3n + 1} > 1 \end{aligned}$$

Аналогично се доказва, че $\frac{b_n}{b_{n+1}} > 1$. Сега можем да напишем

$$2 = a_1 \leq a_n < b_n \leq b_1 = 4,$$

т.е. и двете редици са ограничени.

3) Нека $n > \max(p, q)$. Тогава, според точка **2)** имаме

$$a_p < a_n < b_n < b_q. \blacksquare$$

Твърдение 1.6. Редицата $\{a_n\}$ и редицата $\{b_n\}$ са сходящи, при което клонят към една и съща граница, чиято стойност се нарича **неперово число**.

Доказателство. Редицата $\{a_n\}$ е сходяща и клони към точната си горна граница $\sup\{a_n\}$, понеже е монотонно растяща и ограничена отгоре, а редицата $\{b_n\}$ е сходяща и клони към точната си долна граница $\inf\{b_n\}$, понеже е строго монотонно намаляваща и ограничена отдолу. От друга страна ако положим $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$ и $B = \{b_1, b_2, b_3, \dots\}$, то за тези две множества, съгласно твърдение 1.5, **2)**, можем да приложим теоремата за отделимост, която заедно с факта

$$b_n - a_n = \frac{1}{n} a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

ни дава $\sup A = \inf B$, т.е. $\sup\{a_n\} = \inf\{b_n\}$, което доказва твърдението. \blacksquare

Общата граница на тези редици (числото на Непер) се бележи с e

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n,$$

което е ирационално число $e = 2.7182818284590452354\dots$ и представлява една от най-важните константи в математиката.

Числото e не само е ирационално, но и не се явява корен на нито един полином с цели коефициенти. Такива числа се наричат трансцендентни. Другата най-известна константа в математиката $\pi = 3.14159265358979323846\dots$ също е трансцендентно число. В десетична (и във всяка друга) бройна система, рационалните числа и само те се записват чрез крайна или периодична дробна част, т.е. в техния запис има проста закономерност. При ирационалните числа отсъства такава закономерност.

3. Граница и непрекъснатост на функция. Следващите определения касаят взаимното разположение на точка и множество. Нека $x \in \mathbb{R}$ и $E \subset \mathbb{R}$, $E \neq \emptyset$. Точката $x \in E$ се нарича **вътрешна** за E , когато се съдържа в E заедно с някоя своя ε -околност $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$. Точката x се нарича **външна** за E , когато е вътрешна за допълнението $E^c = \mathbb{R} \setminus E$. Точката x се нарича **гранична (контурна)** за E , когато не е нито вътрешна нито външна за E . Точката x се нарича **точка на съгъстяване** за E , когато всяка нейна ε -околност $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ съдържа точки от E , различни от x . Точката $x \in E$ се нарича **изолирана**, когато съществува някаква нейна ε -околност, която не съдържа други точки от A освен x .

Една гранична точка може да принадлежи или да не принадлежи на множеството. Точката x е външна за E , когато съществува някаква нейна ε -околност $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$, за

която $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \cap E = \emptyset$. Очевидно всяка изолирана точка е и гранична. От последното определение следва, че всяка точка е или вътрешна или външна или гранична относно дадено множество. Точката x е точка на съгъстяване за E тогава и само тогава, когато може да се намери редица $\{x_n \in E, x_n \neq x\}$, за която $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$.

Едно множество се нарича **крайно**, когато неговите елементи са краен брой и **безкрайно**, когато неговите елементи са безбройно много. Множеството $U \subset \mathbb{R}, U \neq \emptyset$, се нарича **отворено**, когато се състои само от вътрешни точки. Празното множество \emptyset също определяме като отворено. Множеството $F \subset \mathbb{R}$ се нарича **затворено**, когато неговото допълнение $F^c = \mathbb{R} \setminus F$ е отворено. Множеството $K \subset \mathbb{R}, K \neq \emptyset$, се нарича **компактно**, когато е затворено и ограничено. От горните определения следва, че множеството $U \neq \emptyset$ е отворено, точно когато за всяка негова точка $x \in U$ съществува някаква нейна ε -околност $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$, за която $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset U$. Единствените множества, които са едновременно отворени и затворени са цялото \mathbb{R} и празното множество \emptyset .

Всеки отворен интервал е отворено множество и всеки затворен интервал е затворено множество. Най-полезните примери за компактни множества са ограничените и затворени интервали.

Следващото твърдение характеризира затворените множества.

Твърдение 1.7. Едно множество $F \subset \mathbb{R}, F \neq \emptyset$, е затворено тогава и само тогава, когато съдържа всичките си точки на съгъстяване. Освен това, F е затворено тогава и само тогава, когато съдържа границите на всички свои сходящи редици, т.е. когато от $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \xi$ и $x_n \in F$ следва, че $\xi \in F$. ■

Произволно обединение на отворени множества е отворено множество. Произволно сечение на затворени множества също е затворено. В общия случай произволно сечение на отворени множества може да не бъде отворено, както и произволно обединение на затворени множества може да не бъде затворено. Сечението на краен брой отворени множества е отворено и обединението на краен брой затворени множества е затворено.

Да припомним, че множеството $K \subset \mathbb{R}$ е компактно, когато е едновременно ограничено и затворено. Следващата теорема има особено важна роля в анализа.

Теорема 1.6. Множеството $K \subset \mathbb{R}$ е компактно тогава и само тогава, когато от всяка негова редица може да се избере сходяща подредица, чиято граница принадлежи на K . ■

Тук ще разглеждаме функции $f: E \rightarrow \mathbb{R}, (f(x): E \rightarrow \mathbb{R})$, определени в някакво подмножество E на \mathbb{R} и приемащи реални стойности. Нека е дадена функцията $y = f(x)$, определена в множеството $E \subset \mathbb{R}$. Тогава множеството от точки $\Gamma(f)$ в декартовата равнина \mathbb{R}_{xy}^2 от вида (x, y) , където $x \in E$ и $y = f(x)$ се нарича **графика** на функцията $f(x)$.

Определение 1.5. Нека функцията f е определена в някакво множество $E \subset \mathbb{R}$ и x_0 се явява точка на съгъстяване за E . Числото A се нарича граница на функцията $f(x)$ при x клонящо към x_0 ($x \rightarrow x_0$) (или още граница на функцията $f(x)$ в точката x_0), когато за всяка редица от точки $\{x_n \in E, x_n \neq x_0\}$, за която $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$, редицата $\{f(x_n)\}$ клони към числото A . Пишем $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$.

В горното определение x_0 е точка на съгъстяване за E , следователно съществуват редици $\{x_n \in E\}$, такива, че всяко $x_n \neq x_0$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$. Да отбележим специално, че функцията $f(x)$ не се предполага определена в самата точка x_0 .

Съществуването на граница на функция може да се определи в термините на околности на x_0 и A .

Твърдение 1.8. Числото A е граница на функцията $f(x)$ при $x \rightarrow x_0$ тогава и само тогава, когато за всяко $\varepsilon > 0$ съществува δ такава, че $|f(x) - A| < \varepsilon$, винаги когато $|x - x_0| < \delta$ и $x \neq x_0$. ■

Твърдение 1.8 дава еквивалентно определение за граница на функция в точка и затова самото то може да се разглежда и като определение.

Например да разгледаме функцията

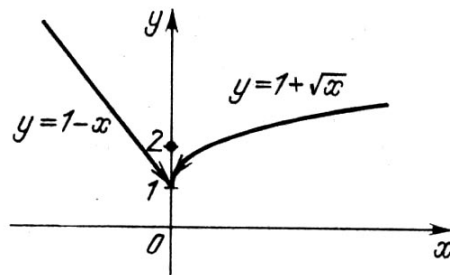


Рис. 1.2.

определена по следния начин (рис. 1.2)

$$y = f(x) = \begin{cases} 1 - x, & x < 0 \\ 2, & x = 0 \\ 1 + \sqrt{x}, & x > 0 \end{cases}$$

Да разгледаме точката $x_0 = 0$. Тук имаме $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 1$, което добре се вижда от рисунката, при което тази граница е различна от стойността на $f(x_0) = f(0) = 2$. Както и да се приближаваме към точката x_0 , със стойности по-малки от x_0 или със стойности по-големи от x_0 , се получава една и съща граница 1. Да разгледаме сега функцията знак

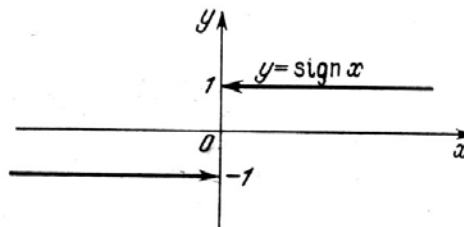


Рис. 1.3.

$\text{sign } x$, определена по следния начин (Рис. 1.3)

$$y = f(x) = \text{sign } x = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$

и нека отново $x_0 = 0$. В този пример, ако приближаваме x_0 със стойности по-големи от x_0 , се получава граница 1, а ако приближаваме x_0 със стойности по-малки от x_0 се получава граница -1 , което показва, че границата на функцията при $x \rightarrow x_0$ не съществува.

Примерът обаче показва, че е целесъобразно понятието граница на функция да се уточни чрез въвеждане на лява и дясна граница. Числото A се нарича **лява (дясна)** граница на функцията $f(x): E \rightarrow \mathbb{R}$ при x клонящо към x_0 , когато за всяка редица от точки $\{x_n \in E, x_n < x_0\}$ ($\{x_n \in E, x_n > x_0\}$), за която $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$, редицата $\{f(x_n)\}$ клони към числото A . Лявата (дясната) граница, когато съществува, се означава с $f(x_0 - 0)$, ($f(x_0 + 0)$). Пишем

$$\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = f(x_0 - 0) \left(\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = f(x_0 + 0) \right).$$

Тук означението $x \rightarrow x_0 - 0$ показва, че x клони към x_0 със стойности по-малки от x_0 , а означението $x \rightarrow x_0 + 0$ показва, че x клони към x_0 със стойности по-големи от x_0 . В последния пример имаме $f(x_0 - 0) = -1$ и $f(x_0 + 0) = 1$. За примера от рис. 1.2 имаме $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = 1$.

Верността на следното твърдение произтича непосредствено от определенията.

Твърдение 1.9. Нека x_0 е точка на сгъстяване за дефиниционното множество на функциите $f(x)$ и $g(x)$, $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$ и $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = b$. Тогава:

- 1) Функцията $f(x) + g(x)$ също има граница в x_0 , при което $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) + g(x)] = a + b$.
- 2) Функцията $f(x)g(x)$ също има граница в x_0 , при което $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x)g(x)] = ab$.
- 3) Ако $b \neq 0$, то функцията $\frac{f(x)}{g(x)}$ също има граница в x_0 , при което

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right] = \frac{a}{b}. \blacksquare$$

Аналогично твърдение е валидно за случая на лява (дясна) граница.

Функцията $y = f(x) = \sin \frac{1}{x}$, $x \neq 0$, няма граница в точката $x_0 = 0$, което добре се вижда от рисунката

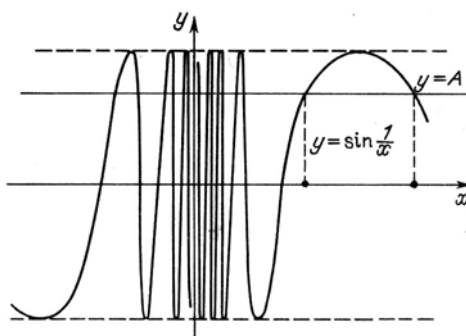


Рис. 1.4.

В този пример всяко $A \in [-1, 1]$ се явява точка на сгъстяване за стойностите на $f(x)$, когато x се мени във всеки интервал $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, $\delta > 0$.

Сега сме готови да дадем важното определение за непрекъснатост на функция.

Определение 1.6. Нека функцията $f(x)$ е определена в някакво множество $E \subset \mathbb{R}$ и $x_0 \in E$ се явява точка на сгъстяване за E . Казва се, че $f(x)$ е **непрекъсната** в точката x_0 , когато $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ (Рис. 1.5). По дефиниция приемаме, че ако x_0 е изолирана точка за E , то $f(x)$ е непрекъсната в x_0 .

Ако една функция $f(x)$ е непрекъсната във всяка точка от дефиниционното си множество E , то тя се нарича **непрекъсната в E** .

Функцията $f(x)$ се нарича непрекъсната отляво в точката x_0 , когато $f(x_0 - 0) = f(x_0)$ и непрекъсната отдясно, когато $f(x_0 + 0) = f(x_0)$. Ако една функция е непрекъсната в x_0 , то тя е непрекъсната както отляво, така и отдясно. Когато се казва, че $f(x)$ е непрекъсната в интервала $[a, b]$ се има предвид, че $f(x)$ е непрекъсната във всяка вътрешна точка $x_0 \in (a, b)$, непрекъсната отдясно в точката a и непрекъсната отляво в точката b .

При определението за непрекъснатост в точка се иска функцията да бъде дефинирана в тази точка и по този начин определението за непрекъснатост може да се изкаже в следния вид.

Твърдение 1.10. Функцията $f(x)$, определена в множеството E , е непрекъсната в точката x_0 (Рис. 1.5) тогава и само тогава, когато:

- 1) За всяка редица от точки $\{x_n \in E\}$, за която $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$, редицата $\{f(x_n)\}$ е сходяща и клони към $f(x_0)$.
- 2) За всяко $\varepsilon > 0$ може да се намери δ такава, че $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, когато $|x - x_0| < \delta$. ■

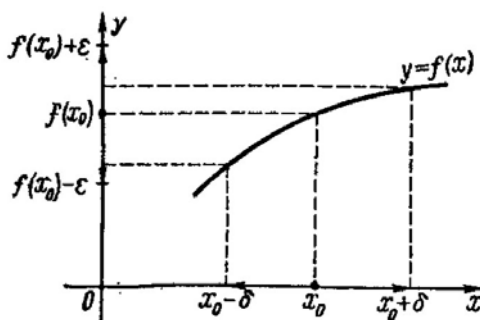


Рис. 1.5.

Твърдение 1.10 се видоизменя по очевиден начин за случаите на едностранна непрекъснатост (отляво или отдясно).

Непрекъснатостта на функцията $f(x)$ в точката x_0 означава, че лявата и дясната граници на функцията в тази точка съществуват и двете са равни на стойността на функцията в x_0 , $A = f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = f(x_0)$ (Рис. 1.6)

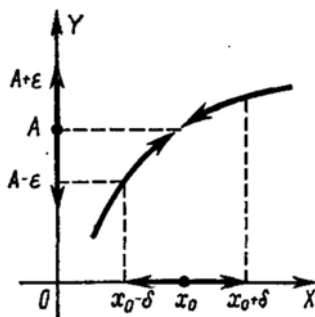


Рис. 1.6.

Когато функцията $f(x): E \rightarrow \mathbb{R}$ не е непрекъсната в точката $x_0 \in E$, казваме, че е прекъсната в x_0 . За примера от рис. 1.2, функцията е прекъсната в точката $x_0 = 0$, но тук нещата лесно (променяйки $f(x)$ само в една точка) могат да "коригират", полагайки $f(x_0) = 1$, което е общата стойност на лявата и дясната граници. В такъв случай се казва, че функцията се определя по непрекъснатост в точката, където лявата и дясната граници съществуват и техните стойности са равни. Изложеният подход обаче няма да помогне за функцията от примера от рис. 1.3, понеже в този случай $f(x_0 - 0) \neq f(x_0 + 0)$.

От определенията за непрекъснатост и от твърдение 1.9 следва, че ако $f(x)$ и $g(x)$ са непрекъснати в точката x_0 , то $f(x) + g(x)$, $f(x)g(x)$ и $\frac{f(x)}{g(x)}$ ($g(x_0) \neq 0$) също са непрекъснати в x_0 . Аналогично твърдение е вярно и когато $f(x)$ и $g(x)$ са непрекъснати в някакво множество E .

Композицията на непрекъснати функции също е непрекъсната функция. Нека е дадена функцията $\varphi(t): E \rightarrow \mathbb{R}$, която е непрекъсната в точката $t_0 \in E$ и да положим $x_0 = \varphi(t_0)$. Нека функцията $f(x): E' \rightarrow \mathbb{R}$ е непрекъсната в точката $x_0 \in E'$. Тогава съставната функция $F(t) = f(\varphi(t)): E \rightarrow \mathbb{R}$ е непрекъсната в точката t_0 . Наистина, да изберем едно $\varepsilon > 0$. Тогава съществува δ' такава, че $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, когато $|x - x_0| < \delta'$. От друга страна може да се намери δ такава, че $|\varphi(t) - x_0| < \delta'$, когато $|t - t_0| < \delta$. Тогава, ако $|t - t_0| < \delta$, то $|\varphi(t) - x_0| < \delta'$ и следователно $|F(t) - F(t_0)| < \varepsilon$. Последното по определение означава, че функцията $F(t)$ е непрекъсната в точката t_0 .

Функциите, които се получават от променливата x чрез краен брой композиции на основните елементарни функции и операциите събиране, умножение и деление се наричат **елементарни функции** на променливата x . **Елементарните функции са непрекъснати във всяка вътрешна точка на дефиниционната си област.**

4. Свойства на функции, определени в ограничен затворен интервал. Ако една функция е определена и непрекъсната над компактно множество, то тя е ограничена и равномерно непрекъсната. Една функция се нарича **ограничена** (отгоре/отдолу), когато множеството на нейните стойности е ограничено (отгоре/отдолу). Казва се, че функцията $f(x): E \rightarrow \mathbb{R}$, $E \subset \mathbb{R}$, е **равномерно непрекъсната**, когато за всяко $\varepsilon > 0$ може да се намери δ такава, че $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$, винаги когато $|x_1 - x_2| < \delta$, $x_1, x_2 \in E$.

Една функция може да бъде непрекъсната, но да не бъде нито ограничена нито равномерно непрекъсната. За пример да разгледаме функцията $f(x) = \frac{1}{x}: (0,1] \rightarrow \mathbb{R}$, която е непрекъсната в дефиниционното си множество $(0,1]$ но очевидно не е ограничена, понеже $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \infty$. Тази функция не е и равномерно непрекъсната. Да изберем $\varepsilon_0 = 0.5$ и да разгледаме числата $x_n = \frac{1}{n}$. Имаме $|x_n - x_{n+1}| = \frac{1}{n(n+1)}$, следователно колкото и малко да избираме $\delta > 0$, ще се намери индекс n , за който $|x_n - x_{n+1}| < \delta$. От друга страна винаги е изпълнено $|f(x_n) - f(x_{n+1})| = 1 > \varepsilon_0$, което показва, че така определената функция не отговаря на изискването за равномерна непрекъснатост. В този пример дефиниционното множество на функцията $(0,1]$ е ограничено, но не е затворено.

Тук ще разглеждаме непрекъснати функции $f(x)$, определени в ограничен затворен интервал $[a,b]$. Всеки ограничен затворен интервал е компактно множество. Теоремите за ограниченост и равномерна непрекъснатост на непрекъснати функции са валидни, когато $f(x)$ е определена не само над ограничен затворен интервал, а и в случая когато $f(x)$ е определена над компактно множество и затова ще ги формулираме по този начин.

Теорема 1.7 (Вайерщрас). Нека функцията $f(x)$ е определена и непрекъсната над компактното множество $K \subset \mathbb{R}$. Тогава $f(x)$ е ограничена, при което $f(x)$ достига най-голяма и най-малка стойности; съществуват точка $x_{\max} \in K$ и точка $x_{\min} \in K$, за които

$$f(x_{\max}) = \max_{x \in K} f(x) \text{ и } f(x_{\min}) = \min_{x \in K} f(x). \blacksquare$$

Ако една функция $f(x)$ е равномерно непрекъсната в множеството E , то тя е и непрекъсната във всяка точка от $x_0 \in E$ ($f(x)$ е непрекъсната в E), понеже за всяко $\varepsilon > 0$ може да се намери δ такава, че $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, когато $|x - x_0| < \delta$. Равномерната

непрекъснатост означава, че това δ може да се избере едно също за всяко $x_0 \in E$, докато обикновената непрекъснатост допуска δ да зависи от x_0 .

Ако обаче дефиниционната област на една непрекъсната функция е компактно множество, то тя е и равномерно непрекъсната.

Теорема 1.8 (за равномерна непрекъснатост). Нека функцията $f(x)$ е определена и непрекъсната над компактното множество $K \subset \mathbb{R}$. Тогава $f(x)$ е равномерно непрекъсната в K . ■

Следователно, ако функцията $f(x)$ е определена и непрекъсната в ограничения и затворен интервал $[a, b]$, то тя е ограничена и равномерно непрекъсната в $[a, b]$ и достига най-голяма и най-малка стойност.

Твърдение 1.11. Нека функцията $f(x)$ е непрекъсната в интервала $[a, b]$, при което в краищата на интервала приема стойности с различен знак, $f(a)f(b) < 0$. Тогава може да се намери поне едно $\xi \in (a, b)$, за което $f(\xi) = 0$. ■

Това твърдение е геометрически очевидно. Графиката на една непрекъсната функция е непрекъсната линия, която в този случай съединява точките $(a, f(a))$ и $(b, f(b))$ които се намират от различни страни на оста Ox и следователно графиката на ще пресече тази ос в някоя точка $\xi \in (a, b)$ (Рис. 1.7).

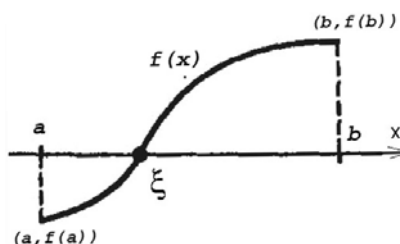


Рис. 1.7.

От твърдение 1.11 следва

Теорема 1.9 (за междинните стойности). Нека функцията $f(x)$ е непрекъсната в интервала $[a, b]$. Тогава, за всяко число η между $f(a)$ и $f(b)$ може да се намери поне едно $\xi \in [a, b]$, за което $f(\xi) = \eta$.

Доказателство. Случаят $f(a) = f(b)$ е очевиден, затова да предположим, че $f(a) \neq f(b)$. Да разгледаме функцията $g(x) = f(x) - \eta$. Нека $\eta \neq f(a)$ и $\eta \neq f(b)$ (в противен случай избираме $\xi = a$ или $\xi = b$). Тогава числата $g(a)$ и $g(b)$ имат различен знак и съгласно твърдение 1.11 съществува поне едно $\xi \in (a, b)$, за което $g(\xi) = 0$, т.е. $f(\xi) = \eta$. ■

Теорема 1.8 показва, че стойностите на една непрекъсната функция $f(x): [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, **запълват целия затворен интервал** $[m, M]$, където

$$M = f(x_{\max}) = \max_{x \in [a, b]} f(x) \text{ и } m = f(x_{\min}) = \min_{x \in [a, b]} f(x),$$

понеже $f(x)$ е непрекъсната в крайния затворен интервал с краища x_{\min} и x_{\max} , а всяка стойност на $f(x)$ се намира в интервала $[f(x_{\min}), f(x_{\max})]$.

5. Монотонни и обратни функции. Функцията $f(x)$ се нарича **монотонно растяща (намалвяваща)** в интервала Δ , когато за всеки $x_1, x_2 \in \Delta$, $x_1 < x_2$, е изпълнено $f(x_1) \leq f(x_2)$ ($f(x_1) \geq f(x_2)$). Ако неравенствата са строги, то функцията се нарича **строго монотонно растяща (намалвяваща)**.

Една монотонна функция притежава лява и/или дясна граница във всяка точка от дефиниционната си област. Например, ако $f(x)$ е монотонно растяща в интервала $[a, b]$, то

за всяко $x_0 \in (a, b)$ съществуват лявата и дясната граници, при което $f(x_0 - 0) \leq f(x_0) \leq f(x_0 + 0)$. В точката a съществува дясната граница, при което $f(a) \leq f(a + 0)$, а в точката b съществува лявата граница при което $f(b - 0) \leq f(b)$. Аналогично твърдение но с противоположни неравенства е вярно и за монотонно намаляваща функция. В този случай $f(x)$ е непрекъсната в $x_0 \in (a, b)$ тогава и само тогава, когато $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0)$.

Нека функцията $y = f(x): E \rightarrow E'$ задава взаимно еднозначно изображение между дефиниционната си област E и областта на стойностите E' . В този случай можем да определим функция $g(y): E' \rightarrow E$, която е **обратна** на $f(x)$, в по следния начин: ако $\eta = f(\xi)$, за някое $\xi \in E$, то полагаме $g(\eta) = \xi$. Обратната функция се означава с $g(y) = f^{-1}(y)$.

Съгласно определението $f^{-1}(f(x)) = x$, за всяко $x \in E$ и $f(f^{-1}(y)) = y$, за всяко $y \in E'$.

Ако една функция е строго монотонна, то тя задава взаимно еднозначно изображение между дефиниционната си област и областта от стойности, следователно притежава обратна.

Теорема 1.10. Нека функцията $f(x)$ е непрекъсната и строго монотонна в интервала $[a, b]$. Тогава $f(x)$ има обратна, определена в затворения интервал с краища $f(a)$ и $f(b)$, която също е непрекъсната функция. ■

Теорема 1.10 е валидна по същество и когато дефиниционната област на функцията е произволен интервал, а не само за случая на ограничен затворен интервал.

Например да разгледаме функцията $f(x) = x^2$ за $x \in [0, 1]$. Тази функция е строго монотонно растяща в дефиниционната си област и следователно има непрекъсната обратна, $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$. Друг пример за обратна функция се получава, ако разгледаме функцията

$f(x) = \sin x$ в интервала $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. В този интервал $\sin x$ е строго монотонно растяща и

следователно притежава непрекъсната обратна, която се бележи с $\arcsin x$. По този начин функцията $\arcsin x$ е определена в интервала $[-1, 1]$ и приема стойности в интервала

$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Тази функция, както и останалите обратни тригонометрични функции, ще бъдат

разгледани по-подробно в следващата лекция.

6. Видове прекъсвания на функция. По определение една функция $f(x)$ е прекъсната в дадена точка на съгъстяване x_0 за нейната дефиниционна област, когато не съществува границата на $f(x)$ при $x \rightarrow x_0$, или когато въпросната граница съществува но е различна от стойността $f(x_0)$. Това обаче не изключва възможността да съществува някоя едностранна граница $f(x_0 - 0)$ и/или $f(x_0 + 0)$, което само по себе си е достатъчно полезна информация за поведението на функцията в околност на x_0 .

Полезно е да разграничим някои случаи на прекъснатост, при които поведението на функцията е достатъчно регулярно и може да послужи като основа на други разсъждения.

Отстранимо прекъсване. Казва се, че функцията $f(x)$ има отстранимо прекъсване в точката x_0 когато лявата и дясната граница на $f(x)$ при $x \rightarrow x_0$ съществуват и са равни, $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0)$, т.е. когато функцията има граница в точката x_0 . В този случай можем да отстраним прекъсването, полагайки $f(x_0) = f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0)$. Така променената функция е вече непрекъсната в точката x_0 . Например да разгледаме функцията

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}.$$

Тази функция е прекъсната в точката $x_0 = 0$, понеже

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \neq f(0) = 0.$$

Точката x_0 обаче е точка на отстранимо прекъсване, понеже границата на функцията в тази точка съществува. Полагайки $f(0) = 1$, получаваме функция, която вече е непрекъсната в x_0 .

Въведеното току що понятие за отстранимо прекъсване може да бъде използвано в по-широк смисъл. За случая когато функцията $f(x)$ притежава граница в x_0 , $A = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, но в самата точка x_0 не е определена, можем да определим по естествен начин $f(x)$ в точката x_0 , полагайки $f(x_0) = A$. Така определената функция се получава непрекъсната в x_0 . По този начин функцията $f(x) = \frac{\sin x}{x}$, която е определена за всяко $x \neq 0$, може да се определи допълнително в точката $x_0 = 0$ по естествен начин, полагайки $f(0) = 1$.

Прекъсване от първи род. Такова прекъсване е налице, когато лявата и дясната граница на $f(x)$ при $x \rightarrow x_0$ съществуват но са различни, $f(x_0 - 0) \neq f(x_0 + 0)$. В този случай функцията може да бъде непрекъсната само отляво, когато $f(x_0 - 0) = f(x_0)$ или само отдясно, когато $f(x_0 + 0) = f(x_0)$. Такава едностранна непрекъснатост може да се осигури променяйки, ако има необходимост, стойността на $f(x_0)$. Ако положим $f(x_0) = f(x_0 - 0)$, ще получим функция непрекъсната отляво, а ако положим $f(x_0) = f(x_0 + 0)$, ще получим функция непрекъсната отдясно.

Прекъсване от втори род. Всяко прекъсване, което не е отстранимо или не е от първи род се нарича прекъсване от втори род.

Идеята за непрекъснатост се явява удобна абстракция за математиката но същевременно отразява и същността на голяма част от заобикалящата ни физическа реалност. Има обаче величини и процеси, чиято вътрешна природа по естествен начин ги прави прекъснати в определен смисъл. Математическите модели за прекъснати величини се отличават с висока степен на трудност.

Тук ние ще боравим само с функции, които са определени и непрекъснати в някакъв краен брой интервали. За да притежават тези функции достатъчен запас от съдържателни свойства е необходимо обаче те да бъдат не само непрекъснати, но и да притежават определен брой производни, което ще бъде разисквано в следващите лекции.