

ДИМИТРОВДЕНСКО МАТЕМАТИЧЕСКО СЪСТЕЗАНИЕ – ГРАД ВИДИН  
15 ОКТОМВРИ 2006 ГОДИНА

4 КЛАС

**Задача 1.** Дадени са числовите изрази:  $A = 126 : 3 + 18 : 3$ ,  $B = 10 + (52 - 18) : 2$  и  $C = 3 + 2 \cdot (68 : 4) - 24$ . Намерете стойността на израза  $X = 3 \cdot (A - C) + B + 3$ .

**Задача 2.** Във всяко от квадратчетата трябва да се постави по един знак за аритметично действие така, че равенството  $2 \square 2 + 3 \square 4 - 20 \square 2 \square 4 \cdot 8 = 38$  да е вярно.

**Задача 3.** Решете ребуса, ако на еднаквите букви отговарят едни и същи цифри:

$$\begin{array}{r} \text{КАК} \\ + \text{КА} \\ \hline \text{КА} \\ \hline \text{ЯКА} \end{array}$$

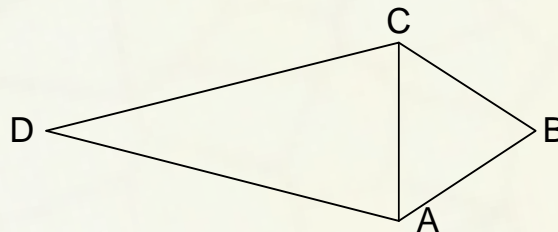
**Задача 4.** В един детски дом купили за децата 20 кг мед и го сложили в 5 еднакви буркана. Колко буркана били изпразнени, след като употребили 12 кг мед?

**Задача 5.** Трима ученика имат известно количество пари. Първият ученик има 25 лева, а вторият с 11 лева повече. Третият ученик дал на първия толкова лева, че парите му се изравнили с тези на втория, а парите на третия станали 4 пъти по-малко, отколкото на втория. Колко лева имал отначало третият ученик?

**Задача 6.** Девет ученика решили да се разходят с лодка по море. Ако всяко дете даде по 9 лева парите няма да им стигнат, а ако всяко дете даде по 10 лева ще им останат пари. Колко лева струва разходката, ако цената може да се запише с нечетно число, сборът от цифрите на което е 15?

**Задача 7.** На 8 коня за 3 дни били дадени 72 кг овес. Колко килограма овес са необходими за изхранването на 10 коня за 2 дни, ако дневната дажба за всеки кон всеки ден е една и съща?

**Задача 8.** Обиколката на четириъгълника ABCD на чертежа е 30 см, а обиколката на равностранния триъгълник ABC е 15 см. Намерете бедрото на равнобедрения триъгълник ACD.



ВРЕМЕ ЗА РАБОТА 3 ЧАСА

ДИМИТРОВДЕНСКО МАТЕМАТИЧЕСКО СЪСТЕЗАНИЕ – ГРАД ВИДИН  
15 ОКТОМВРИ 2006 ГОДИНА

5 КЛАС

**Задача 1.** Запишете всички възможни четни трицифрени числа с помощта на цифрите 3 ; 0 ; 7 ; 4 без тези цифри да се повтарят.

**Задача 2.** Кое от числата А и В е по-голямо и с колко, ако  $A = 86.224 - 84.224 - (302 - 20.15).216$ , а  $B = x$ , определено от равенството  $75 : x = (408 - 24.17) + 5$ .

**Задача 3.** Да се пресметнат сборовете:

а)  $1 + 2 + 3 + 48 + 49 + 50$ ; б)  $1 + 2 + 3 + \dots + 47 + 48 + 49 + 50$ ; в)  $1 + 2 + 3 + \dots + 98 + 99 + 100 + 101$ .

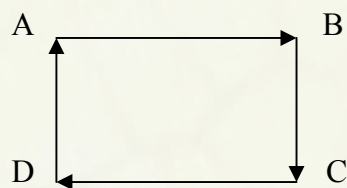
**Задача 4.** Петокласниците Ася, Васко и Сашка, при подготовката си за Димитровденското математическо състезание, решили съответно по А, В и С задачи. Намерете по колко задачи е решил всеки от тях, ако броят им се определя от следните закономерности:

а) 5, 17, 29, 41, 53, А; б) 2144, 1072, 536, 268, 134, В; в) 9, 16, 25, 36, 49, С.

**Задача 5.** За 12 бутилки от безалкохолната напитка “PEPSI” Митко заплатил 7лв. 20 ст., като върнал 12 празни бутилки. Бети купила 9 бутилки от същата напитка за 6 лв. 75 ст., без да върне бутилки. Колко струва една празна бутилка?

**Задача 6.** Опашката на кучето е с 16 см по-къса от опашката на котката, опашката на котката е 5 пъти по-дълга от опашката на мишката, а опашката на мишката е 16 пъти по-къса от опашката на коня, чиято опашка е дълга 960 мм. С колко сантиметра опашката на кучето е по-дълга от опашката на мишката?

**Задача 7.** Даден е правоъгълникът ABCD със страни  $AB = 3$  дм и  $BC = 17$  см. Буболечка тръгнала от върха А на правоъгълника и обикаля по маршрута  $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow A$  и т.н., докато изминала точно 200 м. Върху коя от страните на правоъгълника е спряла буболечката?



**Задача 8.** Намерете обиколката на триъгълник, ако едната му страна е равна на страната на квадрат с обиколка 108 см, другата му страна е равна на страната на квадрат с лице 100 кв.см, а третата му страна е по-малка от сбора на другите две страни с 12 см.

ВРЕМЕ ЗА РАБОТА 3 ЧАСА

ДИМИТРОВДЕНСКО МАТЕМАТИЧЕСКО СЪСТЕЗАНИЕ ГРАД ВИДИН  
15 ОКТОМВРИ 2006 ГОДИНА

6 КЛАС

**Задача 1.** Да се пресметне стойността на израза  $\left(2a - \frac{1}{b}\right)c$ , където

$$a = \frac{3\frac{2}{13} \cdot 4,5 + 4,5 \cdot 6\frac{11}{13}}{7,53 \cdot 7\frac{1}{2} - 6,53 \cdot 7\frac{1}{2}} - 2,5, \quad b = 8\frac{2}{3} - 1\frac{1}{3} : \left(22 - 21\frac{5}{9}\right) \text{ и } c \text{ е цифрата на единиците на}$$

четирицифреното число  $\overline{136c}$ , ако се знае, че то се дели на 6.

**Задача 2.** Трима приятели посещават една и съща Интернет зала. Първият – един път на три дни, вторият – един път на четири дни, а третият – един път на пет дни. Последният път, когато били заедно в залата било вторник. След колко дни ще бъдат отново заедно в залата и в кой ден от седмицата?

**Задача 3.** Разстоянието между Русе и Варна е 203 км. В 8 часа от Русе за Варна тръгнал влак със скорост 50 км/ч, а един час по-късно от Варна за Русе тръгнал друг влак със скорост с 15% по-голяма от скоростта на първия влак. Какво ще бъде разстоянието между двата влака в 10 часа? А в 10:30 часа?

**Задача 4.** В магазин за килими се продават правоъгълни килими с една и съща обиколка 18 метра и размери в цели числа метри. Кой от тези килими има най-голямо лице и колко струва този килим, ако цената на 1 кв.м е 13 лева?

7 КЛАС

**Задача 1.** Проверете дали е вярно равенството  $\frac{4^{100} + 4^{100} + 4^{100} + 4^{100}}{4^n} = 4$ , ако  $n$  е

число, равно на стойността на израза  $-\frac{3}{49} \cdot 376,24 + \frac{1}{7} \cdot 323,76 + \frac{10}{49} \cdot 376,24$ .

**Задача 2.** Числата  $a$  и  $b$ ,  $a < b$ , разделят отсечката с краища  $-\frac{2}{3}$  и  $-\frac{1}{2}$  от числовата ос на три равни части. На колко е равно числото  $a$ ?

**Задача 3.** С помощта на шест различни цифри, всяка от които се използва по веднъж, да се съставят три двуцифрени числа, които се отнасят така, както числата  $\frac{1}{6} : \frac{1}{7} : \frac{1}{8}$ .

**Задача 4.** Точка  $M$  е средата на страната  $AD$  на правоъгълника  $ABCD$ , а точка  $N$  лежи на правата  $AB$ , като  $AN : NB = 1 : 5$ .

а) намерете лицето на  $ABCD$ , ако  $AN = 2$  см и  $AM = 2,5$  см;

б) намерете колко процента от лицето на  $ABCD$  е лицето на триъгълник  $MNC$ .



ДИМИТРОВДЕНСКО МАТЕМАТИЧЕСКО СЪСТЕЗАНИЕ ГРАД ВИДИН  
15 ОКТОМВРИ 2006 ГОДИНА

8 КЛАС

**Задача 1.** Да се решат уравнението

$$\left| (x-3)^2 - x(1-x) + 2(1-x)(x-1) \right| = 3 \text{ и неравенството}$$

$\frac{1}{2} \left( 1 - \frac{4+x}{4} \right) + \frac{x-2}{-3} \leq \frac{2-x}{6} - \frac{x}{24}$  и да се провери дали корените на уравнението са решения на неравенството.

**Задача 2.** Кораб със собствена скорост 25 км/ч се движи по течението на река. В 12 часа по обяд корабът пуснал в реката спасителна лодка, която има собствена скорост с 60% по-малка от собствената скорост на кораба. Ако скоростта на течението на реката е 5 км/ч, намерете в колко часа разстоянието между спасителната лодка и кораба е 105 км.

**Задача 3.** Върху страните AC и BC на  $\triangle ABC$  са взети съответно точки M и N така, че  $AN=BM=AB$ . Отсечките AN и BM се пресичат в точка P. Да се докаже, че  $\angle APM = 2\angle ACB$  и  $\angle APB > 60^\circ > \angle ACB$ .

**Задача 4.** Да се разложат на множители многочлените  $35x^2 + 11x - 6$  и  $2y^5 - 50y^3 + 120y^2 - 72y$ .

9 КЛАС

**Задача 1.** Намерете стойността на израза  $\frac{a+2b}{a-2b}$ ,

ако  $\left( \frac{4ab}{4a^2 - b^2} + \frac{2a-b}{4a+2b} \right) \cdot \frac{4a}{2a+b} + \frac{2b}{b-2a} = 6$ .

**Задача 2.** а) Пресметнете стойността на израза  $\frac{2}{\sqrt{2}-1} - \frac{6}{\sqrt{8}+2} + \frac{\sqrt{18}-\sqrt{6}}{3-\sqrt{3}}$ .

б) Решете системата 
$$\begin{cases} \frac{2}{x\sqrt{2} + y\sqrt{3}} - \frac{3\sqrt{5}}{x\sqrt{15} - y\sqrt{10}} = \frac{1}{10} \\ \frac{2}{x\sqrt{18} + y\sqrt{27}} + \frac{2\sqrt{2}}{x\sqrt{6} - 2y} = \frac{1}{3} \end{cases}$$

**Задача 3.** Отсечките AN, BP и CD са съответно медианите, минаващи през върховете A и B, и височината през върха C на триъгълник ABC. Намерете ъглите на триъгълник ABC, ако  $AB = 4$ ,  $BC = 2$  и  $\angle NPD = 30^\circ$ .

**Задача 4.** а) Да се докаже, че около четириъгълник, на който две от страните и единия диагонал са равни на 3, а останалите две страни са с дължини 1 и 2, не може да се опише окръжност.

б) Да се докаже, че съществува вписан в окръжност четириъгълник с дължини на две срещуположни страни 1 и 3 и дължини на другите две страни 2 и 3.

ДИМИТРОВДЕНСКО МАТЕМАТИЧЕСКО СЪСТЕЗАНИЕ ГРАД ВИДИН  
15 ОКТОМВРИ 2006 ГОДИНА

10 КЛАС

**Задача 1.** В квадратното уравнение  $ax^2 + bx + c = 0$  параметрите  $a$  и  $b$  са решение на

$$\text{системата } \begin{cases} \frac{a}{b} + \frac{b}{a} = \frac{34}{15} \\ a^2 + b^2 = 34 \end{cases}.$$

Ако  $x_2 = -\frac{8}{3}x_1$ ,  $a > 0$ ,  $b > 0$  и  $a < b$ , да се определи  $c$ .

**Задача 2.** Катетите на правоъгълен триъгълник са  $a$  и  $b$ . Да се намери радиусът на окръжност, която минава през върха на правия ъгъл и се допира до хипотенузата и вътрешно до описаната около триъгълника окръжност.

**Задача 3.** Да се реши уравнението:

$$\frac{1}{x^2 + 2x - 3} + \frac{18}{x^2 + 2x + 2} - \frac{18}{x^2 + 2x + 1} = 0.$$

**Задача 4.** В равнобедрения триъгълник  $ABC$  е вписан квадрата  $MNPQ$  с дължина на страната  $a$ , като точките  $M$  и  $N$  лежат върху основата  $AB$  на триъгълника, а точките  $P$  и  $Q$  лежат съответно върху бедрата му  $BC$  и  $AC$ . Окръжност  $k$  минава през точките  $M$  и  $N$ , допира се до бедрата на триъгълника и до страната на квадрата.

а) Да се намери радиусът на окръжността  $k$ .

б) Да се намери страната на квадрата  $MNPQ$ , ако лицето на триъгълник  $ABC$  е  $8410 \text{ cm}^2$ .

11 КЛАС

**Задача 1.** Да се неравенството  $\frac{x^2 + 5x + 4}{x^4 - 15x^2 - 16} \geq 0$ .

Проверете дали числото  $A = \left(5\sqrt[3]{2}\right)^{\sqrt[3]{4}} : \frac{|-5|^0 \cdot \sqrt{5}}{5^{-\frac{1}{2}}}$  е решение на неравенството.

**Задача 2.** Да се намери стойността на израза  $B = \frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha}$ , ако  $\sin \alpha \cdot \cos \alpha = 0,4$  и

$$\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

**Задача 3.** Даден е триъгълник  $ABC$  със страни  $AB = 31 \text{ cm}$ ,  $AC = 11 \text{ cm}$  и  $BC = 24 \text{ cm}$ . Определете вида на триъгълника според ъглите му. Намерете:

а) височината към страната  $BC$ ;

б) радиусът на описаната около триъгълника  $ABC$  окръжност;

в) радиусът на вписаната в триъгълника  $ABC$  окръжност.

**Задача 4.** В равнобедрен трапец с периметър  $8 \text{ cm}$  е вписана окръжност.

а) Да се намерят дължините на страните на трапеца и дължината на радиуса на описаната около трапеца окръжност, ако дължината на диаметъра на вписаната в трапеца окръжност е  $\sqrt{3} \text{ cm}$ .

б) Да се намери лицето на трапеца, ако дължината на неговите диагонали е  $\sqrt{7} \text{ cm}$ .

ДИМИТРОВДЕНСКО МАТЕМАТИЧЕСКО СЪСТЕЗАНИЕ ГРАД ВИДИН  
15 ОКТОМВРИ 2006 ГОДИНА

12 КЛАС

**Задача 1.** Намерете ъглите  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$  от интервала  $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ , ако е известно, че в посочения ред те образуват аритметична прогресия с разлика  $\frac{\pi}{12}$ , а  $\operatorname{tg}\alpha$ ,  $\operatorname{tg}\beta$ ,  $\operatorname{tg}\gamma$ , в посочения ред образуват геометрична прогресия.

**Задача 2.** Уравнението  $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ , с неизвестно  $x$ , има корени реалните числа  $a$ ,  $b$  и  $c$ . Докажете, че  $|a| \leq \frac{3\sqrt{2}}{4}$ .

**Задача 3.** В трапец ABCD ( $AB \parallel CD$ )  $AC = a$ ,  $BD = \frac{7}{5}a$ . Да се пресметне лицето на трапеца, ако  $\angle CAB = 2\angle DBA$ .

**Задача 4.** Точка D лежи на страната AC на триъгълник ABC. Окръжността  $k_1$ , вписана в триъгълник ABD, се допира до отсечката BD в точка M, а окръжността  $k_2$ , вписана в триъгълник BCD, се допира до отсечката BD в точка N. Отношението на радиусите на  $k_1$  и  $k_2$  е  $\frac{r_1}{r_2} = \frac{7}{4}$ . Намерете страните на триъгълник ABC, ако  $MN = ND = 1$  и  $BM = 3$ .

ВРЕМЕ ЗА РАБОТА 3 ЧАСА