Лекция 19

§19. Функции на комплексна променлива

1. Криви и области в комплексната равнина. Тук се предполага, че основните определения за комплексно число, както и свойствата на алгебричните операции между комплексни числа са известни. Комплексните числа $z = x + iy$, $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$, запълват комплексната равнина $\mathbb{C}$ (рис. 19.1) и се идентифицира със съответния радиус вектор.

За комплексното число z се определя модул $|z| = z\bar{z} = \sqrt{x^2 + y^2}$, където числото $\bar{z} = x - iy$ е комплексно спрегнато на z. Освен това се определя и аргумент $\arg z$, който е многозначна функция със стойности $\arg_k z = \arg_0 z + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, където $\arg_0 z$ е една фиксирана начална стойност на аргумента. Обикновено $\arg_0 z$ се избира в границите $-\pi < \arg_0 z \le \pi$ или $0 \le \arg_0 z < 2\pi$.

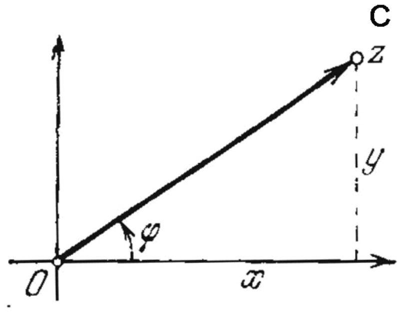

Рис. 19.1.

Комплексното число z допуска тригонометрична форма на запис

(19.1) $\quad z = |z|(\cos \arg z + i \sin \arg z)$,

или още $z = |z| e^{i\varphi}$, където φ е някаква стойност на аргумента. Формулата (19.1) е вярна при всяка конкретна стойност на аргумента, понеже основните тригонометрични функции $\cos$ и $\sin$ са периодични с период 2π.

Редиците от комплексни числа $\{z_n\}$, както и понятията сходяща редица и граница се определят аналогично със случая на редици от точки в $\mathbb{R}^2$, като частен случай на разгледаните точкови редици в крайно мерно евклидово пространство, понеже комплексното число $z_n = x_n + iy_n$ се идентифицира с точката (x_n, y_n). Казва се, че редицата $\{z_n = x_n + iy_n\}$ е сходяща и клони към границата $z_0 = x_0 + iy_0$, когато $\lim\limits_{n\to\infty} |z_n - z_0| = 0$. Тази сходимост е еквивалентна на съответната сходимост на редицата от реалните части и редицата от имагинерните части, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y_0$. Определението за отворено, затворено, компактно и линейно свързано множество са както в общия случай на евклидово пространство.

Особено значение в комплексния анализ има понятието крива

(19.2) $\quad \Gamma : z = z(t) = x(t) + iy(t)$, $\alpha \le t \le \beta$,

в комплексната равнина $\mathbb{C}$. Тук определенията са аналогични със случая на криволинеен интеграл от втори род, понеже кривата Γ се идентифицира с крива в равнината $\mathbb{R}^2$, имаща координатни функции $x = x(t)$ и $y = y(t)$. Всички разглеждани криви ще предполагаме ***непрекъснати***, което означава непрекъснатост на функциите $x(t)$ и $y(t)$ за $t \in [\alpha, \beta]$. Кривата Γ се нарича ***проста***, когато няма самопресичане, при което съвпадението на началната точка $z(\alpha)$ и крайната точка $z(\beta)$ не се счита за такова. Кривата Γ се нарича ***затворена***, когато началната и крайната точки съвпадат, $z(\alpha) = z(\beta)$. Всяка проста затворена кривата Γ се нарича ***жорданова***. Една жорданова крива Γ разделя комплексната равнина по геометрично очевиден начин на вътрешност Γ_{int} и външност Γ_{ext} (доказателството на този факт обаче е сложно, независимо от неговата интуитивна яснота).

Линейната трансформация

$$\frac{t-\alpha}{\beta-\alpha}(\beta'-\alpha')+\alpha'$$

преобразува еднозначно интервала $[\alpha,\beta]$ във всеки друг интервал $[\alpha',\beta']$, което означава, че изборът на параметричния интервал не е от съществено значение при определяне на кривата.

Означението $\Gamma = \Gamma_1\Gamma_2$ показва, че кривата Γ е композирана от кривите Γ_1 и Γ_2, при което началото на Γ_2 съвпада с края на Γ_1. Аналогичен смисъл има записът $\Gamma = \Gamma_1\Gamma_2\cdots\Gamma_n$. Кривата Γ от (19.2) притежава ориентация, определена от начина на обхождане на Γ, когато параметърът t се мени от началната точка на параметричния интервал $t=\alpha$ до крайната точка $t=\beta$. Тази ориентация може да бъде обърната, разглеждайки кривата $\Gamma^{-1}: z = z(-t)$, $-\beta \le t \le \alpha$. Кривите Γ и Γ^{-1} съвпадат като множество от точки и се различават единствено по ориентацията.

Всички жорданови криви ще предполагаме ***ориентирани положително***, освен когато изрично е указано обратното, което означава, че при движението си, точката $z(t), \alpha \le t \le \beta$, обхожда кривата в посока обратна на движението на часовниковата стрелка. Осен това всички разглеждани криви ще предполагаме гладки или частично гладки. Кривата Γ от (19.2) се нарича ***гладка***, когато функциите $x(t)$ и $y(t)$ имат непрекъснати производни и $|\dot z(t)| = \sqrt{\dot x^2(t)+\dot y^2(t)} \ne 0$ при $t\in[\alpha,\beta]$. Кривата Γ се нарича ***частично гладка***, когато е композирана от краен брой гладки дъги.

Кривата $\Gamma: z = z_0 + \rho e^{it}$, $0 \le t \le 2\pi$, представлява окръжност с център в точката z_0 и радиус $\rho > 0$, ориентирана положително, както е показано на рис. 19.2.

Рис. 19.2.

Тук параметърът t се явява ъгълът, който сключва вектора $\overrightarrow{z_0 z}$ с реалната ос.

Област се нарича отворено и линейно свързано множество. Ако $D \subset \mathbb{C}$ е област, то по определение заедно със всяка своя точка $z_0 \in D$, множеството D съдържа и някаква нейна ε-околност $\{z\in\mathbb{C}\,|\,|z-z_0|<\varepsilon\}$, която ε-околност геометрично представлява кръг с център в точката z_0 и радиус ε, без самата окръжност $|z-z_0|=\varepsilon$. ***Линейната свързаност*** означава, че всеки две точки от областта D могат да бъдат съединени посредством начупена линия, която не напуска областта (рис. 19.2).

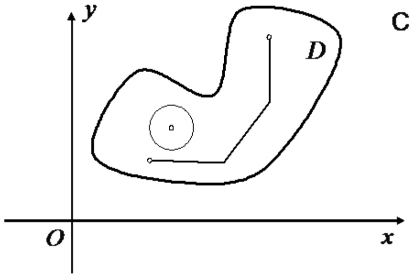

Рис. 19.2.

Границата ∂D на дадена област D се състои от точките, които са нито вътрешни нито външни за областта. Образно казано, границата представлява съвкупността от линиите, които заграждат областта. Отделни части на границата могат да бъдат и изолирани точки.

Областта D се нарича ***едносвързана***, когато вътрешността на всяка нейна жорданова крива се съдържа изцяло в D. Пръстенът $\{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z - z_0| < R\}$ (рис. 19.3) с център в точката z_0 с вътрешен радиус $r \geq 0$ и външен радиус $R > r$ не представлява едносвързана област, понеже вътрешността на всяка окръжност $\{|z - z_0| = \rho\}$ при $r < \rho < R$ се съдържа изцяло в областта.

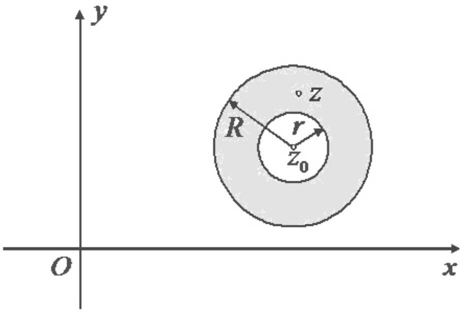

Рис. 19.3.

Пръстенът $\{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z - z_0| < \varepsilon\}$ се нарича ***пробита*** ε***-околност*** на точката z_0. Пробитата околност също не представлява едносвързана област.

Един характерен за приложенията пример на област е показан в следващата рисунка (рис. 19.4).

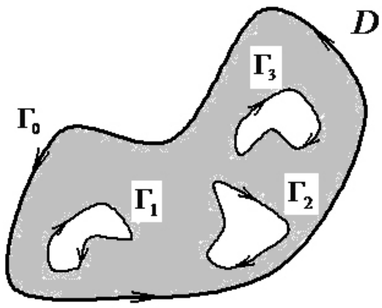

Рис. 19.4.

Тук границата $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$ на областта D е съставен от четири частично гладки криви, Γ_0 – ***външен контур*** на областта и ***вътрешните контури*** Γ_1, Γ_2 и Γ_3 на "изрязаните" части. Външният контур по подразбиране е ориентиран положително, което определя противоположна отрицателна ориентация на вътрешните контури Γ_1,

Γ_2 и Γ_3. По този начин цялата граница Γ се разглежда като ***положително ориентирана***.

Затворена област $\overline{D}$ се получава, когато към точките на областта прибавим и точките от нейната граница, $\overline{D} = D \bigcup \partial D$.

2. Функция на комплексна променлива. Да разгледаме две комплексни равнини $\mathbb{C}_z$ и $\mathbb{C}_w$, $z = x + iy$, $w = u + iv$ и нека $D \subset \mathbb{C}_z$ е някакво множество. Ако за всяко $z = x + iy \in D$ е определена функция

(19.3) $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$,

то се казва, че над множеството D е определена ***функция*** $f(z)$ ***на комплексната променлива*** z с ***реална част*** $u(x, y) = \operatorname{Re} f(z)$ и ***имагинерна част*** $v(x, y) = \operatorname{Im} f(z)$.

Елементарни примери за функция на комплексна променлива са ***полиномите с комплексни коефициенти*** $P(z)$, които са определени за всяко $z \in \mathbb{C}$. Например при $f(z) = z^2$ имаме

$$f(z) = z^2 = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + i2xy.$$

Тук $u(x, y) = x^2 - y^2$ и $v(x, y) = 2xy$. За $f(z) = z^3$ имаме

$$f(z) = (x + iy)^3 = x^3 - 3xy^2 + i(3x^2 y - y^3).$$

Тук $u(x, y) = x^3 - 3xy^2$ и $u(x, y) = 3x^2 y - y^3$. По сложни примери се получават чрез ***рационалните функции***

$$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)},$$

където $P(z)$ и $Q(z)$ са полиноми, $\deg Q(z) > 0$. Рационалните функции са определени за всяко z, което не се явява корен на знаменателя $Q(z)$.

Функциите $u(x, y)$ и $v(x, y)$, които дефинират реалната и имагинерната част на $f(z)$ са обикновени реални функции на две променливи. По тази причина определенията за граница на функцията $f(z)$ в точката z_0 както и определенията за непрекъснатост и равномерна непрекъснатост се свеждат до съответните понятия от реалния анализ, приложени едновременно към $u(x, y)$ и $v(x, y)$. Аналогични в този смисъл са и съответните свойства, свързани с непрекъснатостта.

Най-важната аналогия обаче между комплексния и реалния анализ се намира при ***степенните редове***

(19.4) $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n = c_0 + c_1 (z - z_0) + c_2 (z - z_0)^2 + c_3 (z - z_0)^3 + \cdots + c_n (z - z_0)^n + \cdots$

с комплексни коефициенти c_0, c_1, c_2, ... и ***център*** в точката z_0. Границата на степенния ред (поточкова или равномерна, условна или абсолютна) се определя като съответна граница на частичните суми. Степенният ред задава функция на комплексна променлива над своето множество на сходимост. Това множество не е празно, понеже винаги съдържа поне точката z_0. Тук е валиден следният аналог на теорема 9.5.

Теорема 19.1 (*Абел*). За всеки степенен ред (19.4) съществува някакво число $R \geq 0$ (или $R = \infty$) такова, че редът е абсолютно сходящ за всяко x от кръга $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < R\}$ и разходящ за всяко x, за което $|z - z_0| > R$. В този случай R се нарича ***радиус на сходимост*** на степенния ред. Освен това, ако $R > 0$, то редът е равномерно и абсолютно сходящ над всяко ограничено и затворено подмножество на кръга $|z - z_0| < R$. ■

Тук също е валидна формулата на Адамар,

$$R = \frac{1}{\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|}},$$

където $\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|}$ е най-голямата точка на сгъстяване за редицата $\left\{\sqrt[n]{|a_n|}\right\}$. Радиусът на сходимост може да се пресмята както при твърдение 9.6.

Твърдение 19.1. Нека съществува някоя от границите $l = \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$ или $l = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$. Тогава $R = \frac{1}{l}$, при което ако $l = 0$, то $R = \infty$, и ако $l = \infty$, то $R = 0$. ■

Комплексната функция e^z се определя от степенния ред

(19.5) $e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6} + \frac{z^4}{24} + \frac{z^5}{120} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots$,

за който $R = \infty$. Комплексните функции $\sin z$ и $\cos z$ също се задават чрез степенни редове

(19.6) $\sin z = z - \frac{z^3}{6} + \frac{z^5}{120} - \cdots, \ R = \infty$,

(19.7) $\cos z = 1 - \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{24} - \cdots, \ R = \infty$.

Формулите (19.5-7) са напълно аналогични на степенни редове за съответните реални функции.

Реалната геометрична прогресия

(19.8) $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots$

има радиус на сходимост $R = 1$. От записа (19.8) в някакъв смисъл е очевидно, че този радиус не би следвало да бъде по-голям от 1, понеже сумата на геометричната прогресия $\frac{1}{1-x}$ не е определена за $x = 1$. Реалният ред

(19.9) $\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - x^{10} + \cdots$

също има радиус на сходимост $R = 1$. Равенството (19.10) се получава непосредствено от (19.8) след замяната $x \to -x^2$. От друга страна при (19.9) няма видима причина радиусът на сходимост да не бъде по-голям от 1, понеже знаменателят на неговата сума $\frac{1}{1+x^2}$ не се анулира пи никое реално x. Тази причината става видима обаче, когато вместо реалния ред (19.9) разгледаме неговия комплексен аналог

(19.10) $\frac{1}{1+z^2} = 1 - z^2 + z^4 - z^6 + z^8 - z^{10} + \cdots$,

при който знаменателят на сумата се анулира при $z_{1,2} = \pm i$, за които $|z_{1,2}| = 1$, следователно z_1 и z_2 се съдържат във всеки кръг с център в нулата и радиус по-голям от 1.

3. Комплексна производна. Аналитични функции. Нека функцията $f(z)$ е определена в някаква околност на точката $z_0 \in \mathbb{C}$. ***Комплексната производна*** $f'(z_0)$ се определя като границата, когато съществува, на диференчното частно

$$f'(z_0)=\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}.$$

Функцията $f:D\to \mathbb{C}$ се нарича ***аналитична*** в областта D, когато има непрекъсната производна във всяка точка от D. Ще казваме, че $f(z)$ е аналитична в някакво множество M, когато може да се намери област D, съдържаща M, в която област $f(z)$ е аналитична. В частност, когато казваме, че f е ***аналитична в точката*** z_0, се има предвид, че f е аналитична в някаква околност на z_0.

В горното определение се изисква не само съществуване но и непрекъснатост на комплексната производна. Това условие е по същество ***излишно***, но спомага по-нататък за значително опростяване при доказването на основната теорема на комплексния анализ, отнасяща се за интегриране по затворен контур.

Веднага се вижда, че ако $f(z)$ има производна в точката z_0, то тя е ***непрекъсната*** в z_0, респективно, ако $f(z)$ е аналитична в D, то тя е непрекъсната в D. По-нататък ще се убедим, че от наличието на производна на дадена функция $f(z)$ произтичат редица съдържателни конструктивни свойства за $f(z)$, което по същество и обособява изучаването на аналитичните функции в самостоятелен раздел на анализа.

Нека $f(z)$ е определена в околност на $z_0=x_0+iy_0$ и има производна $f'(z_0)$ в z_0. Тогава, изхождайки от определението, ако дадем чисто реално нарастване на аргумента, ще получим, че

$$f'(z_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0)}{h}=$$
$$\lim_{h\to 0}\frac{u(x_0+h,y_0)-u(x_0,y_0)}{h}+i\lim_{h\to 0}\frac{v(x_0+h,y_0)-v(x_0,y_0)}{h}=$$
$$=\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)=\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0)+i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0)$$

а ако дадем чисто комплексно нарастване на аргумента, ще получим

$$f'(z_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(z_0+ih)-f(z_0)}{ih}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0,y_0+h)-f(x_0,y_0)}{ih}=$$
$$\lim_{h\to 0}\frac{u(x_0,y_0+h)-u(x_0,y_0)}{ih}+i\lim_{h\to 0}\frac{v(x_0,y_0+h)-v(x_0,y_0)}{ih}=$$
$$=\frac{1}{i}\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)=-i\frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0)+\frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0)$$

откъдето получаваме важните равенства

(19.11) $\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0)=\frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0)$ и $\frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0)=-\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0)$,

които се наричат ***условия на Коши-Риман***. С други думи, наличието на комплексна производна за $f(z)$ води след себе си и наличие на частни производни за реалната и имагинерната част на $f(z)$, при което те по необходимост са свързани чрез равенствата (19.11). От направените разсъждения се вижда, че когато $f(z)$ е диференцируема в z_0, то производната може да се представи във вида

$$f'(z_0)=u'_x(x_0,y_0)+iv'_x(x_0,y_0)=v'_y(x_0,y_0)-iu'_y(x_0,y_0).$$

При несъществени допълнителни ограничения, тези условия се явяват и достатъчни за да бъде една функция аналитична.

Теорема 19.2. Нека реалната и имагинерната част на функцията $f: D \to \mathbb{C}$ имат непрекъснати частни производни в областта D, при което за всяка точка от D са изпълнени условията на Коши-Риман. Тогава функцията $f(z)$ е аналитична в D.

Доказателство. Нека $z_0 = z_0 + iy_0$ е фиксирана точка D от и нека нарастването на аргумента $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$ е достатъчно малко така, че отсечката с краища z_0 и $z_0 + \Delta z$ да се съдържа изцяло в областта D. Тогава, според теоремата за крайните нараствания в интегрален вид, имаме

$$\Delta f = f(z_0 + \Delta z) - f(z_0) = \int_0^0 \frac{d}{dt} f(z + \Delta z t)dt$$

$$\int_0^1 \frac{d}{dt}\left[u(x_0 + \Delta x t, y_0 + \Delta y t) + iv(x_0 + \Delta x t, y_0 + \Delta y t)\right]dt =$$

$$= \int_0^0 \begin{bmatrix} u'_x(x_0 + \Delta x t, y_0 + \Delta y t)\Delta x + u'_y(x_0 + \Delta x t, y_0 + \Delta y t)\Delta y + \\ iv_x(x_0 + \Delta x t, y_0 + \Delta y t)\Delta x + iv_y(x_0 + \Delta x t, y_0 + \Delta y t)\Delta y \end{bmatrix} dt .$$

Преобразувайки последния израз с помощта на условията на Коши-Риман получаваме

$$\Delta f = \Delta z \int_0^0 \left[u'_x(x_0 + \Delta x t, y_0 + \Delta y t) + iv_x(x_0 + \Delta x t, y_0 + \Delta y t)\right]dt ,$$

откъдето след граничен преход по $\Delta z \to 0$ получаваме съществуването на границата

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta z} = u'_x(x_0, y_0) + iv'_x(x_0, y_0),$$

с което теоремата е доказана. ■

В много отношения комплексната производна има свойства, сходни с тези на реалната производна. Например, по аналогичен начин се доказва, че ако $f(z) = z^n$, $n \in \mathbb{N}$, то $f'(z) = nz^{n-1}$. Освен това са в сила правилата за диференциране на сбор, произведение и частно. Ако функциите $f(z)$ и $g(z)$ са аналитични в областта D, то функциите $f(z) + g(z)$, $f(z)g(z)$ и $\dfrac{f(z)}{g(z)}$ са аналитични в D, при което

$$[f(z) + g(z)]' = f'(z) + g'(z),$$

$$[f(z)g(z)]' = f'(z)g(z) + f(z)g'(z),$$

$$\left[\frac{f(z)}{g(z)}\right]' = \frac{f'(z)g(z) - f(z)g'(z)}{g^2(z)} \text{ , когато } g(z) \neq 0,$$

т.е. в сила са ***обичайните правила за диференциране***.

Степените редове е могат да се диференцират почленно.

Теорема 19.3. Нека $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ е степенен ред с радиус на сходимост $R > 0$. Тогава неговата сума $f(x)$ има производни от всеки ред в кръга $|z - z_0| < R$, които производни се получават посредством почленно диференциране. Получените от това диференциране степенни редове имат същия радиус на сходимост R. ■

От теорема 19.3 и развитията (19.5-7) веднага се получава, че функциите e^z, $\sin z$ и $\cos z$ са аналитични в цялата комплексна равнина, при което за производните са в сила познатите формули

$$\left(e^z\right)' = e^z, \ (\sin z)' = \cos z \text{ и } (\cos z)' = -\sin z .$$

Освен това са в сила формулите

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \text{ и } \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}.$$

Нека $z = re^{i\varphi}$. Тогава $f(z) = u(r,\varphi) + iv(r,\varphi)$, а за условията на Коши-Риман (19.11) може да се докаже, че имат вида

(19.12) $\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \varphi}$ и $\frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \varphi}$, $f'(z) = \frac{r}{z}\left(\frac{\partial u}{\partial r} + i\frac{\partial v}{\partial r}\right) = \frac{1}{z}\left(\frac{\partial v}{\partial \varphi} - i\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right)$.

Нека например областта D е комплексната равнина, разрязана по отрицателната полуос и нека $f(z) = \sqrt{z} = \sqrt{r}e^{\frac{i\varphi}{2}}$, $z = re^{i\varphi}$, $-\pi < \varphi \le \pi$. Тази функция удовлетворява условията на Коши-Риман във вида (19.12) и следователно е аналитична в D. Имаме

$$f(z) = r\cos\frac{\varphi}{2} + ir\sin\frac{\varphi}{2},$$

следователно по формулите (19.12)

$$f'(z) = \frac{r}{z}\left(\frac{1}{2\sqrt{r}}\cos\frac{\varphi}{2} + i\frac{1}{2\sqrt{r}}\sin\frac{\varphi}{2}\right) = \frac{r}{re^{i\varphi}}\frac{1}{2\sqrt{r}}e^{\frac{i\varphi}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{r}e^{\frac{i\varphi}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{z}}.$$

Нека $f = u + iv$ е аналитична в областта D и да предположим, че реалната и имагинерната и част имат непрекъснати частни производни до втори ред. Тогава чрез условията на Коши-Риман лесно се проверява, че е налице тъждеството

$$u''_{xx} + u''_{yy} = v''_{xx} + v''_{yy} = 0,\ (x,y) \in D.$$

Една функция $g : D \to \mathsf{R}$, за която е изпълнено $g''_{xx} + g''_{yy} = 0$ се нарича ***хармонична*** в D. Току що се убедихме, че реалната и имагинерната част на дадена аналитична функция са хармонични в допълнителното предположение за съществуване и непрекъснатост на вторите частни производни (по-нататък ще видим, че това предположение е излишно). Вярно е и обратното твърдение, т.е. всяка хармонична функция може да се разглежда като реална (или имагинерна) част на някоя аналитична функция.

Твърдение 19.2. Нека функцията $u : D \to \mathsf{R}$, имаща непрекъснати производни до втори ред е хармонична в едносвързаната област D. Тогава съществува хармонична функция $v : D \to \mathsf{R}$, определена с точност до адитивна константа такава, че комплексната функция $f = u + iv$ е аналитична в D.

Доказателство. Функция $v : D \to \mathsf{R}$ ще определим чрез криволинейния интеграл от втори род

(19.13) $v(x,y) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} -u'_y dx + u'_x dy$,

където (x_0, y_0) е някаква фиксирана точка от областта D. Определението е коректно, понеже диференциалната форма на интеграла удовлетворява условието за независимост на интеграла от пътя

$$(u'_x)'_x + (-u'_y)'_y = u''_{xx} + u''_{yy} = 0.$$

От друга страна, както е известно от курса по реален анализ, за интеграла (19.13) е в сила $v'_x = -u'_y$ и $v'_y = u'_x$, налице са условията на Коши-Риман, следователно функцията $f = u + iv$ е аналитична в областта D. Ако v_1 и v_2 са две функции с исканото свойство, то разликата $v = v_1 - v_2$ ще бъде функция с непрекъснати частни производни v'_x и v'_y, за които $v'_x = v'_y = 0$, т.е. v ще бъде тъждествено равна на константа в D. С това твърдение 19.2 е напълно доказано. ■

Хармоничните функции са полезни в математическата физика, понеже удовлетворяват уравнението на Лаплас $\Delta u = u''_{xx} + u''_{yy} = 0$.

4. Конформни изображения. Нека функцията $w = f(z)$ е определена и холоморфна в точката z_0 (има производна за всяко z от някаква околност на z_0), $w_0 = f(z_0)$, и $f'(z_0) \neq 0$. Да разгледаме гладката крива $\gamma : z = \sigma(t)$, $\alpha \le t \le \beta$, минаваща през точката $z_0 = \sigma(t_0)$ (Рис. 19.5)

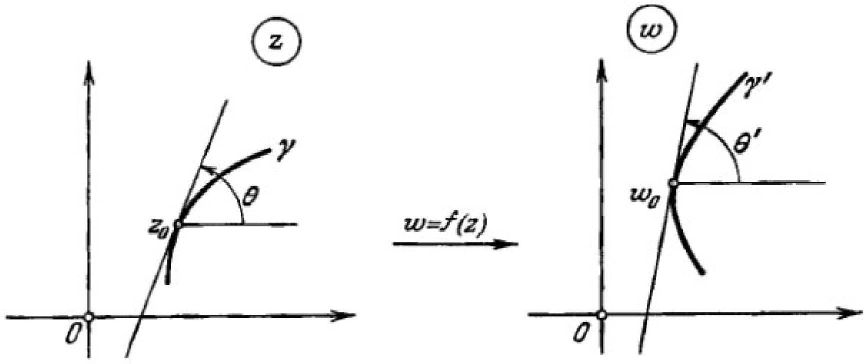

Рис. 19.5.

Нека θ е ъгълът между допирателната към γ в z_0 и реалната ос (отчетен в положителна посока). Тогава $\theta = \arg \sigma'(t_0)$. Нека γ' е образът на кривата γ при изображението $w = f(z)$, т.е. $\gamma' : w = w(t) = f(\sigma(t))$, $\alpha \le t \le \beta$. Според правилото за диференциране на съставни функции имаме $w'(t_0) = f'(z_0)\sigma'(t_0)$. По условие $f'(z_0) \neq 0$ а по определение $\sigma'(t_0) \neq 0$, следователно $w'(t_0) \neq 0$ и γ' има допирателна в точката $w_0 = w(t_0)$. Нека $\theta' = \arg w'(t_0)$. Тогава $\theta' = \arg f'(z_0) + \theta$. Величината $\theta' - \theta$ се нарича ъгъл на завъртане на кривата γ при изображението $w = f(z)$. Току що показахме, че ъгълът на завъртане на кривата не зависи от самата крива и винаги е равен на $\arg f'(z_0)$. От тук следва, че изображението $w = f(z)$ съхранява ъгъла между всеки две криви γ и γ_1 през точката z_0 (Рис. 19.6)

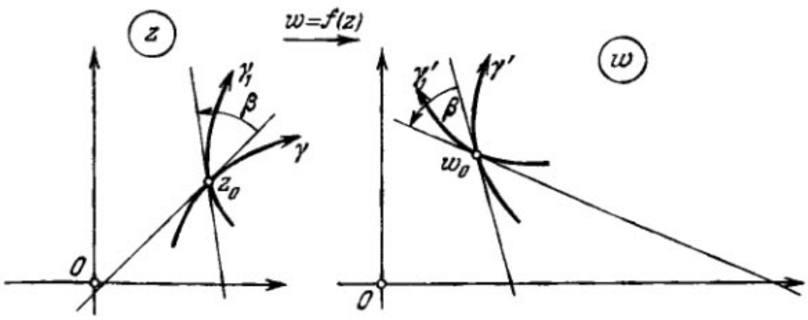

Рис. 19.6.

Нека отново функцията $f(z)$ е холоморфна в точката z_0 и $f'(z_0) \neq 0$. Нека γ е гладка крива през точката z_0 и нека z е точка от γ, разположена близо до z_0. Тогава ако положим $\Delta z = z - z_0$ и $\Delta w = w - w_0 = f(z) - f(z_0)$, то според определението за производна имаме $\Delta w = f'(z_0)\Delta z + \varepsilon(\Delta z)\Delta z$, където $\lim\limits_{\Delta z \to 0} \varepsilon(\Delta z) = 0$, следователно

$$|\Delta w| = |f'(z_0)||\Delta z| + o(\Delta z).$$

Последното означава, че при изображението $w = f(z)$, кръгът $|\Delta z| < \rho$ преминава приблизително в кръга $|\Delta w| = |f'(z_0)|\rho$. Величината $\lim\limits_{\Delta z \to 0} \dfrac{|\Delta w|}{|\Delta z|} = k$ (когато границата съществува) се нарича коефициент на разтягане на кривата γ в точката z_0. В нашия случай $k = |f'(z_0)|$ и не зависи от кривата γ (Рис. 19.7)

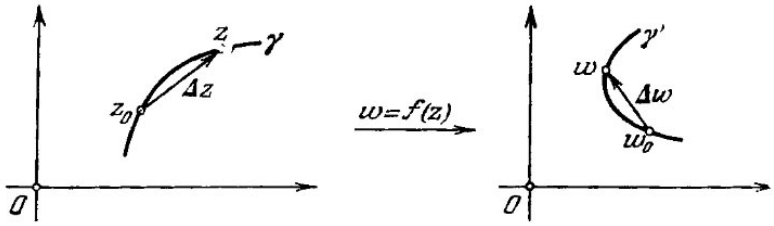

Рис. 19.7.

Изображения, които запазват ъглите между кривите и задават един и същ коефициент на разтягане на всяка крива се наричат ***конформни***. По този начин доказахме верността на следното

Твърдение 19.3. Нека функцията $f(z)$ е аналитична в точката z_0 и $f'(z_0) \neq 0$. Тогава изображението $w = f(z)$ е конформно в точката z_0. ■

Функцията $f : D \to \mathrm{C}$, където D е област, се нарича ***еднолистна***, когато от $z_1 \neq z_2$ следва, че $f(z_1) = f(z_2)$. Изображението $w = f(z)$, $f : D \to \mathrm{C}$ (D е област), се нарича ***конформно***, когато функцията $f(z)$ е еднолистна в D и $w = f(z)$ е конформно във всяка точка от D. Според това определение, $w = f(z)$ е конформно когато $f(z)$ е аналитична в D, $f'(z) \neq 0$, за всяко $z \in D$, и функцията $f(z)$ е еднолистна в D.

Условието $f'(z_0) \neq 0$ означава, че якобианът на изображението $w = f(z)$ е различен от нула. Всъщност това изображение $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ е еквивалентно на изображението от R^2 в R^2, зададено чрез координатните функции $u = u(x, y)$ и $v = v(x, y)$ с якобиан

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial x} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} & \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y},$$

и съгласно формулите на Коши-Риман имаме $J = |f'(z)|^2$.

5. Комплексно интегриране. Комплексният анализ започва по същество от определянето на комплексния интеграл и неговите забележителни свойства. Както ще видим по-нататък комплексният интеграл е асоцииран във висока степен с криволинейния интеграл от втори род.

Нека D е област, а $\Gamma : z = z(t) = x(t) + iy(t)$, $\alpha \le t \le \beta$, е някаква гладка крива от тази област. Нека освен това функцията $f(z)$ да бъде непрекъсната по Γ. Това условие за непрекъснатост е налице, ако $f(z)$ е аналитична в D. Тук ще определим интеграл, в който подинтегралният израз е $f(z)dz$. Имаме $f(z) = u + iv$ и формално $dz = dx + idy$, откъдето намираме

$$f(z)dz = (u+iv)(dx+idy) = (udx - vdy) + i(udy + vdx),$$
$$f(z)dz = f(z)\dot{z}dt = (u+iv)(\dot{x}+i\dot{y})dt = (u\dot{x} - v\dot{y})dt + i(u\dot{y} + v\dot{x})dt .$$

Комплексният интеграл от функцията $f(z)$ върху гладката крива Γ определяме като сбор от два криволинейни интеграла от втори род

$$(19.14)\quad \int_{\Gamma} f(z)dz = \int_{\Gamma} udx - vdy + i\int_{\Gamma} udy + vdx = \int_{\alpha}^{\beta} [u\dot{x} - v\dot{y}]dt + i\int_{\Gamma} [u\dot{y} + v\dot{x}]dt .$$

Написано по-подробно, неговата реална и имагинерна част се пресмятат по формулите

$$\operatorname{Re}\int_{\Gamma} f(z)dz = \int_{\Gamma} udx - vdy = \int_{\alpha}^{\beta} [u(x(t),v(t))\dot{x}(t) - v(x(t),y(t))\dot{y}(t)]dt ,$$

$$\operatorname{Im}\int_{\Gamma} f(z)dz = \int_{\Gamma} udy + vdx = \int_{\alpha}^{\beta} [u(x(t),v(t))\dot{y}(t) + v(x(t),y(t))\dot{x}(t)]dt .$$

Формулата (19.14) може да се запише във вида

$$(19.15)\quad \int_{\Gamma} f(z)dz = \int_{\alpha}^{\beta} f(z)\dot{z}dt ,\ f(z)\dot{z} = (u+iv)(\dot{x}+i\dot{y}).$$

Комплексният интеграл може да се определи и посредством интегрални суми по характерния за криволинеен интеграл начин (рис. 19.8).

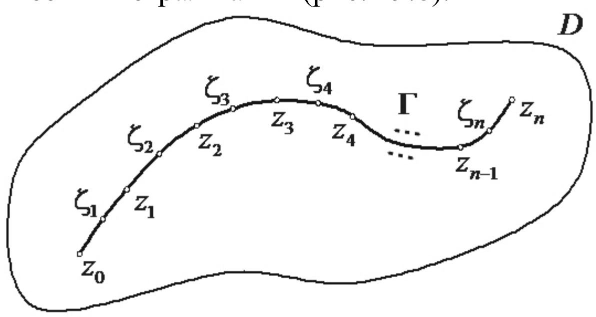

Рис. 19.8.

Нека $\tau = \{\alpha = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_{n-1} < t_n = \beta\}$ е едно интегрално разделяне на параметричния интервал $[\alpha,\beta]$. То поражда система от точки z_0, z_1, ..., z_n върху кривата Γ,

$$z_k = z(t_k) = x(t_k) + iy(t_k) = x_k + iy_k ,\ k = 0,1,\ldots,n .$$

Нека във всеки от интервалите $[t_{k-1},t_k]$ е избрана по една точка θ_k, $k = 1,2,\ldots,n$. На тях съответстват точки

$$\zeta_k = z(\theta_k) = x(\theta_k) + iy(\theta_k) = \xi_k + i\eta_k ,\ k = 1,2,\ldots,n ,$$

от кривата Γ. Полагаме

$$\Delta z_k = z_k - z_{k-1} = (x_k - x_{k-1}) + i(y_k - y_{k-1}) = \Delta x_k + i\Delta y_k ,\ k = 1,2,\ldots,n .$$

Сега да образуваме интегралните суми

$$(19.16)\ r(f,\tau) = \sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta z_k = \sum_{k=1}^{n} [u(\xi_k,\eta_k) + iv(\xi_k,\eta_k)][\Delta x_k + i\Delta y_k].$$

Непосредствено от определенията може да се докаже, че комплексният интеграл (19.14) се явява граница на интегралните суми (19.16), когато диаметърът на разделянето клони към нула, т.е.

$$\int_{\Gamma} f(z)dz = \lim_{d(\tau)\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta z_k ,$$

което означава, че комплексният интеграл допуска определение по обичайния за интегралите начин посредством интегрални суми.

Ако кривата Γ е ***частично гладка***, то интегралът се определя като сума от интегралите по съставящите гладки дъги.

Комплексният интеграл притежава следните основни свойства.

1) ***Линейност.*** Интеграл от линейна комбинация е равен на линейната комбинация от съответните интеграли, т.е. ако $f_1(z)$, $f_2(z)$, ..., $f_m(z)$ са непрекъснати над Γ и λ_1, λ_2, ..., λ_m са някакви числа, то

$$\int_\Gamma [\lambda_1 f_1(z)+\lambda_2 f_2(z)+\cdots+\lambda_m f_m(z)]dz=\lambda_1\int_\Gamma f_1(z)dz+\lambda_2\int_\Gamma f_2(z)dz+\cdots+\lambda_m\int_\Gamma f_m(z)dz\,.$$

2) ***Адитивност.*** Ако кривата Γ е композирана от няколко криви, $\Gamma=\Gamma_1\Gamma_2\cdots\Gamma_m$, то

$$\int_\Gamma f(z)dz=\int_{\Gamma_1} f(z)dz+\int_{\Gamma_2} f(z)dz+\cdots+\int_{\Gamma_m} f(z)dz\,.$$

3) ***Ориентация.*** При смяна ориентацията на кривата се сменя единствено знака на интеграла, т.е.

$$\int_{\Gamma^{-1}} f(z)dz=-\int_\Gamma f(z)dz\,.$$

4) ***Оценка на интеграла.*** Нека $M=\max\limits_{z\in\Gamma}|f(z)|$. Тогава

$$\left|\int_\Gamma f(z)dz\right|=\left|\int_\alpha^\beta f(z)\dot{z}dt\right|\le\left|\int_\alpha^\beta |f(z)||\dot{z}|dt\right|\le M\int_\alpha^\beta|\dot{z}|dt=M\mu(\Gamma),$$

$$\left|\int_\Gamma f(z)dz\right|\le\max_{z\in\Gamma}|f(z)|\mu(\Gamma),$$

където $\mu(\Gamma)$ е дължината на кривата Γ.

Да пресметнем например интеграла

$$\int_\Gamma\frac{dz}{z-z_0},$$

където Γ е положително ориентирана окръжност с център в точката z_0 и радиус ρ. За Γ имаме следната параметризация

$$\Gamma: z=z_0+\rho e^{it},\ 0\le t\le 2\pi,$$

следователно $dz=de^{it}=ie^{it}dt$, а за интеграла намираме

$$\int_{|z-z_0|=\rho}\frac{dz}{z-z_0}=\int_0^{2\pi}\frac{ie^{it}dt}{e^{it}}=i\int_0^{2\pi}dt=2\pi i\,.$$

Да разгледаме сега интеграла

$$\int_\Gamma\frac{dz}{(z-z_0)^n},\ n\ne -1,$$

по същия контур. Имаме

$$\int_{|z-z_0|=\rho}\frac{dz}{(z-z_0)^n}=\int_0^{2\pi}\frac{ie^{it}dt}{e^{itn}}=i\int_0^{2\pi}e^{i(1-n)t}dt=i\int_0^{2\pi}[\cos(1-n)t+i\sin(1-n)t]dt\,,$$

$$\int_{|z-z_0|=\rho}\frac{dz}{(z-z_0)^n}=i\int_0^{2\pi}\cos(1-n)tdt-\int_0^{2\pi}\sin(1-n)tdt=i0-0=0\,.$$

По този начин доказахме

Твърдение 19.4. В сила е формулата

$$\int\limits_{|z-z_0|=\rho} \frac{dz}{(z-z_0)^n} = \begin{cases} 2\pi i \text{ за } n=-1 \\ 0 \text{ за } n \neq -1 \end{cases}, \quad \rho > 0. \ \blacksquare$$

Тук означавайки окръжността чрез $|z-z_0| = \rho$, подразбираме по уговорка нейната положителна ориентация.

Основната теорема на Коши гласи, че интеграл от аналитична функция върху затворена крива е равен на нула.

Теорема 19.4 (*основна теорема на Коши*). Нека $f(z)$ е аналитична в затворената едносвързана област $\overline{D}$ с граница частично гладката жорданова крива Γ. Тогава е налице равенството

(19.15) $\int\limits_{\Gamma} f(z)dz = 0$.

Доказателство. Без ограничение на общността предполагаме, че кривата Γ е положително ориентирана. Доказателството се основава на формулата на Грийн

$$\int\limits_{\Gamma} Pdx + Qdy = \iint\limits_{\overline{D}} \left[Q'_x - P'_y\right] dxdy,$$

която е вярна, когато функциите $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ имат непрекъснати частни производни в затворената област $\overline{D}$. По определение имаме

$$\int\limits_{\Gamma} f(z)dz = \int\limits_{\Gamma} udx - vdy + i\int\limits_{\Gamma} udy + vdx,$$

което по формулата на Грийн приема вида

$$\int\limits_{\Gamma} f(z)dz = \iint\limits_{\overline{D}} \left[-v'_x - u'_y\right] dxdy + i\iint\limits_{\overline{D}} \left[u'_x - v'_y\right] dxdy.$$

Сега от условията на Коши-Риман $u'_x = v'_y$ и $u'_y = -v'_x$ веднага следва, че стойността на интеграла е равна на нула. ■

При доказателството на основната теорема на Коши, предположението за едносвързаност на областта играе основна роля, която тук остана скрита зад формулата на Грийн.

Например, ако Γ е произволна частично гладка жорданова крива, то

$$\int\limits_{\Gamma} e^z dz = \int\limits_{\Gamma} \sin z dz = \int\limits_{\Gamma} \cos z dz = \int\limits_{\Gamma} P(z)dz = 0,$$

където $P(z)$ е полином, понеже всичките подинтегрални функции са аналитични над цялата комплексна равнина, в частност и над затворената област, оградена от кривата Γ, следователно можем да приложим основната теорема на Коши.

Основната теорема на Коши може да се обобщи за по-сложни области, които не са вече едносвързани. Нека границата Γ на областта D се състои от външния контур Γ_0 и трите вътрешни контура Γ_1, Γ_2 и Γ_3, както е показано на рис. 19.9.

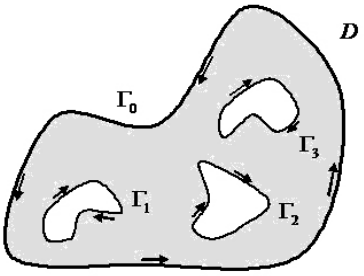

Рис. 19.9.

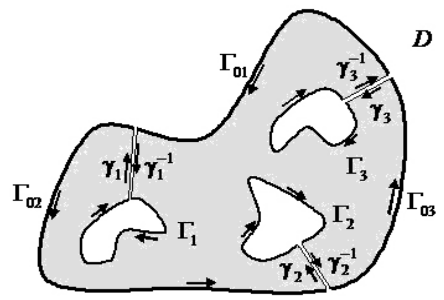

Рис. 19.10.

Външният контур Γ_0 се предполага частично гладка положително ориентирана жорданова крива, а трите вътрешни контура се предполагат частично гладки отрицателно ориентирани жорданови криви (ориентирани противоположно на Γ_0). Областта D очевидно не е едносвързана. Да направим три "разреза", както е показано на рис. 19.10, при което външният контур се разделя на три части Γ_{01}, Γ_{02} и Γ_{03}, а също така се появяват нови дъги. Новата област вече е едносвързана и има за граница контура Γ', композиран както следва

$$\Gamma' = \Gamma_{01}\gamma_1^{-1}\Gamma_1\gamma_1\Gamma_{02}\gamma_2\Gamma_2\gamma_2^{-1}\Gamma_{03}\gamma_3\Gamma_3\gamma_3^{-1}.$$

Сега от теорема 19.4 и от адитивното свойство на интеграла имаме

$$0 = \int_{\Gamma'} f(z)dz = \int_{\Gamma_{01}} + \int_{\gamma_1^{-1}} + \int_{\Gamma_1} + \int_{\gamma_1} + \int_{\Gamma_{02}} + \int_{\gamma_2} + \int_{\Gamma_2} + \int_{\gamma_2^{-1}} + \int_{\Gamma_{03}} + \int_{\gamma_3} + \int_{\Gamma_3} + \int_{\gamma_3^{-1}} .$$

Интегралите по противоположни дъги взаимно се съкращават, следователно

$$0 = \int_{\Gamma_{01}} f(z)dz + \int_{\Gamma_1} f(z)dz + \int_{\Gamma_{02}} f(z)dz + \int_{\Gamma_2} f(z)dz + \int_{\Gamma_{03}} f(z)dz + \int_{\Gamma_3} f(z)dz .$$

От друга страна

$$\int_{\Gamma_0} f(z)dz = \int_{\Gamma_{01}} f(z)dz + \int_{\Gamma_{02}} f(z)dz + \int_{\Gamma_{03}} f(z)dz ,$$

откъдето след заместване намираме

$$0 = \int_{\Gamma_0} f(z)dz + \int_{\Gamma_1} f(z)dz + \int_{\Gamma_2} f(z)dz + \int_{\Gamma_3} f(z)dz ,$$

което имайки предвид, че $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$, можем да напишем във вида

(19.16) $$\int_{\Gamma} f(z)dz = 0 .$$

Формулата (19.16) изглежда като (19.15), но с тази разлика, че в този случай става дума за сложен контур, който загражда област, която не се явява едносвързана. От направеното разсъждение веднага следва верността на

Твърдение 19.5. Нека $f(z)$ е аналитична в затворената област $\overline{D}$ с външен контур Γ_0 и вътрешни контури Γ_1, Γ_2, ..., Γ_m, при което всичките контури се предполагат частично гладки положително ориентирани жорданови криви. Тогава интегралът по външния контур е равен на сумата от интегралите по вътрешните контури, т.е.

(19.17) $$\int_{\Gamma_0} f(z)dz = \int_{\Gamma_1} f(z)dz + \int_{\Gamma_2} f(z)dz + \cdots + \int_{\Gamma_m} f(z)dz . \blacksquare$$

Най-елементарния случай на приложение на твърдение 19.5 се получава, когато имаме само един вътрешен контур, както е показано на рис. 19.11.

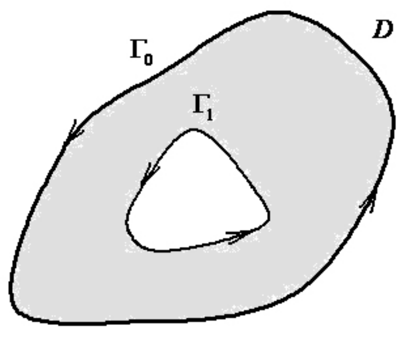

Рис. 19.11.

В този случай от твърдение 19.5 следва верността на

Твърдение 19.6. Нека Γ_0 и Γ_1 са две частично гладки положително ориентирани жорданови криви такива, че кривата Γ_1 се съдържа изцяло във вътрешността на кривата Γ_0, а функцията $f(z)$ е аналитична в затворената област $\overline{D}$ с външен контур Γ_0 и вътрешен контур Γ_1. Тогава е в сила равенството

$$\int_{\Gamma_0} f(z)dz = \int_{\Gamma_1} f(z)dz . \blacksquare$$

Основната теорема на Коши може да се формулира при различни нива на сложност с оглед предстоящите приложения. Да завършим този раздел, предлагайки следната достатъчно обща редакция на тази теорема, която привеждаме без доказателство.

Теорема 19.5 (*основна теорема на Коши – втора редакция*). Нека $f(z)$ е ***аналитична*** в областта D и ***непрекъсната*** в затворената област $\overline{D}$, чиято граница се състои от външен контур Γ_0 и вътрешни контури Γ_1, Γ_2, ..., Γ_m, при което всичките контури се предполагат частично гладки положително ориентирани жорданови криви. Тогава интегралът по външния контур е равен на сумата от интегралите по вътрешните контури, т.е.

$$\int_{\Gamma_0} f(z)dz = \int_{\Gamma_1} f(z)dz + \int_{\Gamma_2} f(z)dz + \cdots + \int_{\Gamma_m} f(z)dz . \blacksquare$$