Лекция 20

§20. Ред на Лоран

1. Формула на Коши. Отначало ще докажем две важни твърдения свързващи комплексния интеграл по затворена крива и стойностите на функцията извън кривата.

Нека Γ е частично гладка положително ориентирана жорданова крива, а D е едносвързаната област, представляваща вътрешността на Γ и нека освен това функцията $f(z)$ е аналитична в затворената област $\overline{D}$ (аналитична в някаква по-широка област G, която включва D и самата крива Γ). Да изберем една точка $z_0 \in D$. Тогава може да се намери някакво достатъчно малко $\varepsilon > 0$ такова, че ε-околността $|z - z_0| < \varepsilon$ на точката z_0 се съдържа изцяло в областта D (рис. 20.1).

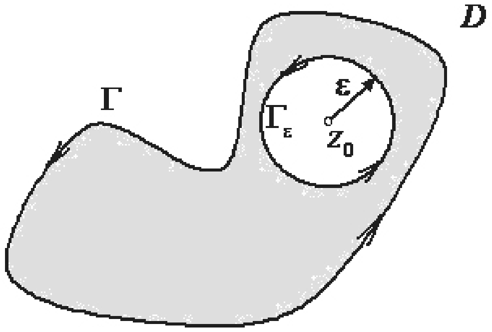

Рис. 20.1.

Нека $\Gamma_\varepsilon : z = z_0 + \varepsilon e^{it}$, $0 \le t \le 2\pi$, е положително ориентираната окръжност с център в z_0 и радиус ε. Функцията

$$g(z) = \frac{f(z)}{z - z_0}$$

е аналитична между двата контура Γ и Γ_ε следователно, съгласно твърдение 19.5, е в сила равенството

$$\int_\Gamma g(z)dz = \int_{\Gamma_\varepsilon} g(z)dz ,$$

следователно

$$(20.1) \quad \int_\Gamma \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{f(z)}{z - z_0} dz .$$

За интеграла в дясната страна на (20.1) съгласно правилото за пресмятане имаме

$$(20.2) \quad \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \int_0^{2\pi} \frac{f\left(z_0 + \varepsilon e^{it}\right)}{\varepsilon e^{it}} \varepsilon i e^{it} dt = i\int_0^{2\pi} f\left(z_0 + \varepsilon e^{it}\right)dt .$$

От друга страна $\varepsilon > 0$ може да бъде избирано произволно малко. Да направим граничен преход при $\varepsilon > 0$ в последния интеграл от (20.2). Получаваме

$$\lim_{\varepsilon \to 0}\left[i\int_0^{2\pi} f\left(z_0 + \varepsilon e^{it}\right)dt \right] = i\int_0^{2\pi} f(z_0)dt = if(z_0)\int_0^{2\pi} dt = 2\pi i f(z_0),$$

понеже $f(z)$ е непрекъсната в z_0 и $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} f\left(z_0 + \varepsilon e^{it}\right) = f(z_0)$. Сега като заместим в (20.2) намираме

$$\int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = 2\pi i f(z_0).$$

След смяна на означенията $z \to \zeta$ и $z_0 \to z$, и въз основа на (20.1) от последната формула следва равенството

$$\int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = 2\pi i f(z),$$

където z е коя да е точка от вътрешността на контура Γ.

По този начин доказахме следната

Теорема 20.1 (формула на Коши). Нека $f(z)$ е аналитична в затворената едносвързана област $\overline{D}$, оградена от частично гладката положително ориентирана жорданова крива Γ, а z е някаква точка от D. Тогава е в сила формулата

(20.3) $$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta . \blacksquare$$

Да пресметнем например интеграла

$$\int_\Gamma \frac{\sin z}{z^2+1} dz ,$$

където Γ е коя да е жорданова крива, която включва във вътрешността си точката i и не включва точката $-i$. Да запишем подинтегралната функция във вида

$$\frac{\sin z}{z^2+1} = \frac{f(z)}{z-i}, \; f(z) = \frac{\sin z}{z+i} .$$

Тогава съгласно формулата на Коши имаме

$$\int_\Gamma \frac{\sin z}{z^2+1} dz = \int_\Gamma \frac{f(z)}{z-i} dz = 2\pi i f(i) = 2\pi i \frac{\sin i}{2i} = \pi \sin i = \pi \frac{e^{ii} - e^{-ii}}{2i} = i\pi \frac{e^1 - e^{-1}}{2} .$$

Формулата на Коши (20.3) показва, че стойността на $f(z)$ се определя напълно от стойностите на функцията по всяка затворена крива около точката z, което означава, че всичките стойности на дадена аналитична функция са свързани по определен начин и промяната функцията в една точка води до промени за функцията и в останалите точки от областта.

Теорема 20.1 е вярна и в случая когато областта D не е едносвързана и нейната граница Γ се състои от външния контур Γ_0 и няколко вътрешни контура Γ_k, $1 \le k \le n$, които се предполагат частично гладки жорданови криви, при което Γ_0 се предполага ориентиран положително, а Γ_k, $1 \le k \le n$, ориентирани отрицателно. При тези предположения целият контур $\Gamma = \Gamma_0 \bigcup \Gamma_1 \bigcup \cdots \bigcup \Gamma_n$ се разглежда като ориентиран положително (рис. 19.4). Доказателството в този случай се различава малко от това на теорема 20.1.

Формулата (20.3) позволява диференциране под знака на интеграла. След едно диференциране намираме

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta ,$$

понеже

$$\frac{d}{dz}\left[\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\right] = \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} .$$

Диференцирайки още веднъж, за производната $f''(z)$ получаваме

$$f''(z) = \frac{2}{2\pi i}\int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^3} d\zeta ,$$

понеже

$$\frac{d}{dz}\left[\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^2}\right]=2\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^3}.$$

Продължавайки в същия ред получаваме

Теорема 20.2 (формула на Коши за производните). Нека $f(z)$ е аналитична в затворената едносвързана област D, оградена от частично гладката положително ориентирана жорданова крива Γ, а z е някаква точка от D. Тогава $f(z)$ има производни от всеки ред в областта D, при което за производните са в сила формулите

(20.4) $$f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}d\zeta,\ n=0,1,2,\ldots.\ \blacksquare$$

Тук при $n=0$ формулата (20.4) се свежда до (20.3), следвайки уговорката, че под нулева производна на една функция се разбира самата функция.

Теорема 20.2 е вярна и в случая когато областта D не е едносвързана при направените уговорки за положително ориентиран съставен контур.

Най-важният извод от теорема (20.2) се състои във факта, че от съществуването (и непрекъснатостта) само на първата производна на $f(z)$, което е определението функцията $f(z)$ да бъде аналитична, следва съществуването на производни от всеки ред. Такова свойство отсъства при реалните функции и още веднъж подчертава твърде специфичната природа на аналитичните функции.

2. Ред на Тейлър. Степенният ред

(20.5) $$f(z)=c_0+c_1(z-z_0)+c_2(z-z_0)^2+c_3(z-z_0)^3+\cdots+c_n(z-z_0)^n+\cdots$$

с ненулев радиус на сходимост $R>0$ определя функция, имаща производни от всеки ред, които могат да се намерят посредством почленно диференциране, при което диференциране се получават степенни редове със същия радиус на сходимост. Следователно степенният ред (20.5) задава аналитична функция в кръга $|z-z_0|<R$. В този раздел ще покажем, че е вярно и обратното.

Теорема 20.3. Нека $f(z)$ е аналитична в кръга $|z-z_0|<R$. Тогава $f(z)$ може да се представи в степенен ред (20.5)

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n$$

с радиус на сходимост (поне) R, при което за коефициентите е валидна формулата

(20.6) $$c_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_\varepsilon}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}d\zeta=\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!},\ n=0,1,2,\ldots,$$

където Γ_ε е окръжност с център в точката z_0 и радиус ε, $0<\varepsilon<R$.

Доказателство. Да фиксираме една точка z от кръга $|z-z_0|<R$ и нека ρ, $0<\rho<R$, е такова, че z се съдържа в кръга $|z-z_0|<\rho$ (рис. 20.2).

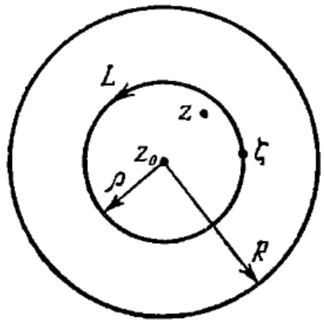

Рис. 20.2.

Тогава съгласно формулата на Коши имаме

(20.7) $$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta,$$

където L е окръжността $|z-z_0|=\rho$. Подинтегралната функция в (20.7) преобразуваме във вида

(20.8) $$\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}=f(\zeta)\frac{1}{(\zeta-z_0)-(z-z_0)}=f(\zeta)\frac{1}{\zeta-z_0}\frac{1}{1-\dfrac{z-z_0}{\zeta-z_0}}.$$

По правилото за сумиране на геометрична прогресия имаме

$$\frac{1}{1-\dfrac{z-z_0}{\zeta-z_0}}=1+\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}+\left(\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right)^2+\left(\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right)^3+\dots+\left(\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right)^n+\cdots,$$

понеже за частното на тази прогресия е в сила

$$\left|\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right|=\frac{|z-z_0|}{\rho}<1.$$

Сега замествайки в (20.8) получаваме

$$\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}=f(\zeta)\frac{1}{\zeta-z_0}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right)^n=f(\zeta)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^n}{(\zeta-z_0)^{n+1}},$$

при което редът в дясната страна на равенството е равномерно сходящ върху окръжността L. Тази равномерна сходимост позволява почленно интегриране,

$$\int_L \frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta=\int_L f(\zeta)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^n}{(\zeta-z_0)^{n+1}}d\zeta=\sum_{n=0}^{\infty}\int_L f(\zeta)\frac{(z-z_0)^n}{(\zeta-z_0)^{n+1}}d\zeta,$$

$$\int_L \frac{f(\zeta)}{\zeta-z}=\sum_{n=0}^{\infty}(z-z_0)^n\int_L \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}d\zeta,$$

което съгласно (20.7) дава търсеното развитие в степенен ред около точката z_0 с коефициенти

(20.9) $$c_n=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}d\zeta,\ n=0,1,2,\dots.$$

Съпоставяйки последния резултат с формулата на Коши за производните намираме

$$c_n=\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!},\ n=0,1,2,\dots.$$

Нека сега Γ_ε е окръжност с център в точката z_0 и радиус ε, $0<\varepsilon<R$. Тогава въз основа на твърдение 19.6 и формулата (20.9) получаваме, че

$$c_n=\int_L \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}d\zeta=\int_{\Gamma_\varepsilon}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}d\zeta,\ n=0,1,2,\dots,$$

което доказва напълно теоремата. ■

Съгласно теорема 20.3, развитието на дадена функция в степен ред може да се запише във вида

$$f(z)=f(z_0)+f'(z_0)(z-z_0)+\frac{f''(z_0)}{2}(z-z_0)^2+\frac{f'''(z_0)}{6}(z-z_0)^3+\dots+\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}+\cdots,$$

при някакъв ненулев радиус на сходимост.

В много от случаите развитието може да се намери от конкретни съображения. Например да развием в степенен ред около $z_0 = 0$ функцията

$$f(z) = \frac{1}{2-3z}.$$

Преобразуваме функцията въз основа правилото за сумиране на геометрична прогресия и намираме степенния ред

$$f(z) = \frac{1}{2-3z} = \frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{3}{2}z} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3}{2}z\right)^n = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{2^{n+1}}z^n,$$

с радиус на сходимост $R = \frac{2}{3}$.

Нека $f(z)$ е аналитична в областта D и нека $z_0 \in D$. Тогава сигурно съществува някакво достатъчно малко $\varepsilon > 0$ такова, че кръгът $|z - z_0| < \varepsilon$ принадлежи на областта. Сега от теорема 20.3 следва, че функцията $f(z)$ се развива в ред на Тейлор с център в точката z_0, който има радиус на сходимост не по-малък от ε, $R \geq \varepsilon$. По този начин може да се оцени предварително големината на този радиус като радиуса на най-големия кръг, който се съдържа в областта. Ако въпросната област е максимално възможната, в която $f(z)$ е аналитична, то радиусът на сходимост е равен на най-малкото възможно разстояние от точката z_0 до точка от контура на областта D.

В последния пример функцията $f(z) = \frac{1}{2-3z}$ е аналитична навсякъде с изключение на точката $z = \frac{2}{3}$. Тук центърът на реда беше $z_0 = 0$. Радиусът на сходимост на степенният ред $R = \frac{2}{3}$ е равен точно на разстоянието между центъра $z_0 = 0$ и точката $z = \frac{2}{3}$.

Нека $f(z)$ е аналитична в точката z_0. Казва се, че z_0 е ***нула*** на функцията $f(z)$, когато $f(z_0) = 0$. Нулите за аналитичните функции са в определен смисъл аналог на корените на полиномите. Казва се, че z_0 е нула от ред $m \geq 1$, когато $f(z)$ може да се представи като произведение $f(z) = (z - z_0)^m g(z)$, където $g(z)$ е аналитична в z_0 и $g(z_0) \neq 0$. Ако z_0 е нула от ред m, то (както при съответното твърдение за полиноми) непосредствено се пресмята, че

$$f(z_0) = f'(z_0) = \cdots = f^{(m-1)}(z_0) = 0 \text{ и } f^{(m)}(z_0) \neq 0.$$

Следното твърдение се доказва непосредствено от развитието в ред на Тейлър.

Твърдение 20.1. Нека $f(z)$ е аналитична в околност на точката z_0. Тогава ако е изпълнено

$$f(z_0) = f'(z_0) = \cdots = f^{(m-1)}(z_0) = 0,$$

то z_0 представлява нула от ред не по-малък от m. Ако освен това $f^{(m)}(z_0) \neq 0$, то z_0 представлява нула от ред точно равен на m. ■

Нулите от ред $m=1$ се наричат още ***прости нули***. Например точката $z_0 = \frac{\pi}{2}$ представлява проста нула за функцията $f(z)=\cos z$, понеже

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\cos\frac{\pi}{2}=0 \text{ и } f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\sin\frac{\pi}{2}=-1\neq 0.$$

3. Ред на Лоран. Особени точки. В този раздел ще разглеждаме функция $f(z)$, които са аналитични в някакъв пръстен $\{z\,|\,0\le r<|z-z_0|<R\}$ с център в точката z_0. В такъв случай функцията $f(z)$ може да се представи в ред на Лоран

$$(20.10)\quad f(z)=\sum_{-\infty}^{\infty}c_n(z-z_0)^n=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n},$$

който се явява непосредствено обобщение на реда на Тейлър. Сумата с положителните степени се нарича ***регулярна част***, а сумата с отрицателните степени се нарича ***особена част***. Регулярната част

$$\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n$$

представлява обикновен степенен ред на Тейлър с някакъв радиус на сходимост R. Особената част

$$(20.11)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n}$$

след смяната $w=\frac{1}{z-z_0}$ се свежда до степенен ред около нулата

$$(20.12)\quad \sum_{n=1}^{\infty}c_{-n}w^n,$$

който има някакъв радиус на сходимост $1/r$. Това означава, че (20.12) е сходящ за $|w|<1/r$, следователно редът (20.11) е сходящ за $|z-z_0|>r$. Ако се случи да бъде налице неравенството $r<R$, то редът на Лоран (20.10) се получава сходящ в пръстена $r<|z-z_0|<R$, при което неговата сума се явява аналитична функция във въпросния пръстен. Следващата теорема показва, че обратното също е вярно.

Теорема 20.4 (*Лоран*). Нека функцията $f(z)$ е аналитична в пръстена $\{z\,|\,0\le r<|z-z_0|<R\}$. Тогава в този пръстен $f(z)$ се развива в ред на Лоран

$$f(z)=\sum_{-\infty}^{\infty}c_n(z-z_0)^n=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n+\sum_{1}^{\infty}c_{-n}(z-z_0)^{-n},$$

при което коефициентите се пресмятат по формулата

$$(20.13)\quad c_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_\rho}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}d\zeta,\ n=0,\pm1,\pm2,\dots,$$

където контурът на интегриране C_ρ е коя да е положително ориентирана окръжност с център z_0 и радиус ρ, където $r<\rho<R$.

Доказателство. Да изберем едно z от пръстена $r<|z-z_0|<R$. Нека R' и r' са избрани от условието $r<r'<|z-z_0|<R'<R$ и нека кривата c е окръжността $|z-z_0|=r'$, а кривата C е окръжността $|z-z_0|=R'$ (рис. 20.3)

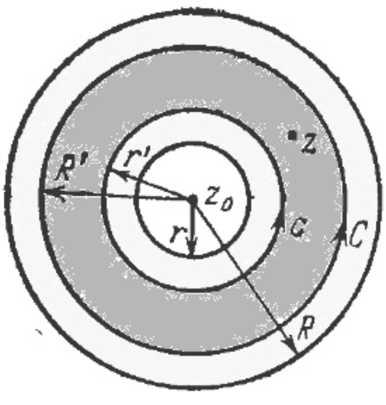

Рис. 20.3.

В такъв случай имаме съгласно формулата на Коши,

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta,$$

където Γ е сложният контур $C\cup c^{-1}$, следователно

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta-\frac{1}{2\pi i}\int_{c}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta=F(z)+G(z)$$

Както при развитието на функция в степенен ред на Тейлър се вижда, че

$$F(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n,$$

при което за коефициентите е в сила формулата

$$(20.14)\quad c_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{C}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}d\zeta,\ n=0,1,2,\dots.$$

За да преобразуваме израза за $G(z)$, да запишем съответната подинтегрална функция във вида $(\zeta\in c)$

$$\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}=-\frac{f(\zeta)}{z-\zeta}=-\frac{f(\zeta)}{(z-z_0)+(z_0-\zeta)}=-\frac{f(\zeta)}{(z-z_0)\left(1-\dfrac{\zeta-z_0}{z-z_0}\right)},$$

$$\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}=-\frac{f(\zeta)}{z-z_0}\left[1+\left(\frac{\zeta-z_0}{z-z_0}\right)+\left(\frac{\zeta-z_0}{z-z_0}\right)^2+\left(\frac{\zeta-z_0}{z-z_0}\right)^3+\cdots\right]=-f(\zeta)\left[\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(\zeta-z_0)^m}{(z-z_0)^{m+1}}\right],$$

при което редът в последния израз е равномерно сходящ съгласно критерия на Вайерщрас, понеже се мажорира от сходяща геометрична прогресия с частно

$$q=\left|\frac{\zeta-z_0}{z-z_0}\right|<1.$$

Равномерната сходимост ни позволява да интегрираме и да сменим местата на сумата и интеграла, след което получаваме

$$G(z)=-\frac{1}{2\pi i}\int_{c}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta=\frac{1}{2\pi i}\int_{c}f(\zeta)\left[\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(\zeta-z_0)^m}{(z-z_0)^{m+1}}\right]d\zeta,$$

$$G(z)=\sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{c}(\zeta-z_0)^m f(\zeta)d\zeta\right)\frac{1}{(z-z_0)^{m+1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n}$$

където коефициентите се получават по формулата

(20.15) $c_{-n} = \frac{1}{2\pi i}\int_{c}(\zeta - z_0)^{n-1} f(\zeta) d\zeta$, $n = 1,2,3,\ldots$.

Нека сега C_ρ е коя да е положително ориентирана окръжност с център z_0 и радиус ρ, където $r < \rho < R$. Тогава функцията

$$\frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}},\ n = 0,1,2,\ldots,$$

е аналитична в пръстена $r < |z - z_0| < R$, следователно от теоремата на Коши и (20.14) намираме

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{C}\frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_\rho}\frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta,\ n = 0,1,2,\ldots.$$

Аналогично функцията

$$(z - z_0)^{n-1} f(z),\ n = 1,2,3,\ldots,$$

е аналитична в пръстена $r < |z - z_0| < R$, следователно от теоремата на Коши и (20.15) намираме

$$c_{-n} = \frac{1}{2\pi i}\int_{c}(\zeta - z_0)^{n-1} f(\zeta) d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_\rho}(\zeta - z_0)^{n-1} f(\zeta) d\zeta,\ n = 1,2,3,\ldots,$$

което доказва изцяло теоремата. ■

Начинът, по които бяха получени коефициентите на лорановото развитие, показва, че то е ***единствено***.

Теоремата на Лоран позволява изследване поведението на функция $f(z)$ в дадена точка z_0, когато $f(z)$ е аналитична в някаква пробита околност на z_0. Точката $z_0 \in \mathbb{C}$ се нарича ***изолирана особена точка*** на функцията $f(z)$, когато $f(z)$ е аналитична в някаква околност на z_0 с изключение (евентуално) на самата точка, с други думи, когато $f(z)$ е аналитична в някаква ***пробита околност*** $0 < |z - z_0| < R$, което е частен случай на пръстен с вътрешен радиус нула. Нека z_0 е изолирана особена точка за $f(z)$. Тогава според теоремата на Лоран е в сила представянето

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n,\ 0 < |z - z_0| < R.$$

Точката z_0 се нарича ***отстранима***, когато особената част на лорановия ред

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}(z - z_0)^{-n}$$

е тъждествено нула, т.е. всичките коефициенти с отрицателни индекси са нули. Особената точка z_0 се нарича ***полюс*** от ред m ($m = 1,2,3,\ldots$), когато всичките коефициенти в главната част c_{-m-1}, c_{-m-2}, c_{-m-3}, ... са нули, при което само $c_{-m} \neq 0$. Особената точка z_0 се нарича ***съществена***, когато особената част на лорановото развитие съдържа безбройно много коефициенти, различни от нула.

Например, за функцията

$$\frac{\sin z}{z} = \frac{1}{z}\left[z - \frac{z^3}{6} + \frac{z^5}{120} - \cdots\right] = 1 - \frac{z^2}{6} + \frac{z^4}{120} - \cdots,$$

нулата е отстранима особена точка. За функцията

$$\frac{\cos z}{z^2}=\frac{1}{z^2}\left[1-\frac{z^2}{2}+\frac{z^4}{24}-\frac{z^6}{720}+\cdots\right]=\frac{1}{z^2}-\frac{1}{2}+\frac{z^2}{24}-\frac{z^4}{720}+\cdots,$$

нулата е полюс от ред 2. За функцията

$$e^{\frac{1}{z}}=1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2z^2}+\frac{1}{6z^3}+\cdots+\frac{1}{n!\,z^n}+\cdots$$

нулата е съществена особена точка.

Нека z_0 е отстранима особена точка за $f(z)$. Тогава в някаква пунктирана околност на z_0 е в сила представянето в ред на Тейлър

$$f(z)=c_0+c_1(z-z_0)+c_2(z-z_0)^2+\cdots$$

което показва, че $f(z)$ може да се определи естествено по непрекъснатост и в самата точка z_0, като $f(z_0)=c_0$, при което така разширената функция е аналитична в околност на z_0. С други думи, отстранимата особена точка не е особена в истински смисъл.

Теорема 20.5 (***Риман***). Нека z_0 е особена точка за $f(z)$ и нека функцията $f(z)$ е ограничена в някаква пробита околност на z_0. Тогава z_0 е отстранима особена точка.

Доказателство. По условие съществува пробита околност $0<|z-z_0|<r$, в която $|f(z)|\le M$ за някаква константа M. Тогава

$$|c_{-n}|=\frac{1}{2\pi}\left|\int_{C_\varepsilon}(z-z_0)^{n-1}f(\zeta)d\zeta\right|\le\frac{1}{2\pi}M\varepsilon^{n-1}2\pi\varepsilon=M\varepsilon^n\xrightarrow[\varepsilon\to 0]{}0,$$

за $n=1,2,3,\ldots$, т.е. всичките коефициенти с индекси -1, -2, -3, ... са нули, което доказва теоремата. ■

Теорема 20.6. Точката z_0 е полюс от ред m за функцията $f(z)$ тогава и само тогава, когато в някаква околност z_0 на може да се представи във вида

(20.16) $f(z)=\dfrac{\varphi(z_0)}{(z-z_0)^m}$,

където $\varphi(z)$ е функция, аналитична в някаква околност на z_0, при което $\varphi(z_0)\neq 0$.

Доказателство. Нека z_0 е полюс от ред m. Тогава в някаква околност на z_0

$$f(z)=\frac{c_{-m}}{(z-z_0)^m}+\frac{c_{-m+1}}{(z-z_0)^{m-1}}+\cdots,\quad c_{-m}\neq 0,$$

следователно

$$f(z)=\frac{c_{-m}+c_{-m+1}(z-z_0)+\cdots}{(z-z_0)^m}$$

и след като положим

$$\varphi(z)=c_{-m}+c_{-m+1}(z-z_0)+\cdots$$

получаваме представянето (20.16). Нека сега е в сила (20.16). Да развием $\varphi(z)$ в ред на Тейлър около точката z_0

$$\varphi(z)=b_0+b_1(z-z_0)+b_2(z-z_0)^2+\cdots$$

при което по условие $\varphi(z_0)=b_0\neq 0$. Тогава

$$f(z)=\frac{b_0+b_1(z-z_0)+b_2(z-z_0)^2+\cdots}{(z-z_0)^m}=\frac{b_0}{(z-z_0)^m}+\frac{b_1}{(z-z_0)^{m-1}}+\cdots$$

което завършва доказателството на теоремата, понеже последната и част е вече очевидна. ■

Нека функцията $f(z)$ е аналитична в някаква пробита околност на точката z_0 и е в сила представянето

$$f(z)=\frac{\varphi(z)}{\psi(z)},$$

където функциите $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ са аналитични в околност на z_0. Нека освен това точката z_0 е нула от ред $m \geq 1$ за функцията $\psi(z)$, което означава, че $\psi(z)=(z-z_0)^m g(z)$, където $g(z)$ е аналитична в точката z_0. Тогава $f(z)$ може да се запише във вида

$$f(z)=\frac{\varphi(z)}{(z-z_0)^m g(z)}=\frac{\left[\frac{\varphi(z)}{g(z)}\right]}{(z-z_0)^m}.$$

Сега разсъждавайки както при доказателството на теорема 20.6 получаваме верността на

Твърдение 20.2. Нека $f(z)$ е аналитична в някаква пробита околност на точката z_0 и $f(z)$ може да се запише във вида

$$f(z)=\frac{\varphi(z)}{\psi(z)},$$

където функциите $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ са аналитични в околност на z_0, а точката z_0 е нула от ред $m \geq 1$ за функцията $\psi(z)$. Тогава точката z_0 се явява полюс от ред не по-висок от m, при което ако $\varphi(z_0) \neq 0$, то z_0 представлява полюс от ред точно равен на m. ■

Формула (20.16) показва, че $\lim\limits_{z \to z_0} |f(z_0)| = \infty$, а от теорема 20.5 следва, че в случай на отстранима особена точка имаме $\lim\limits_{z \to z_0} f(z_0) = c_0 = const$, от което заключаваме, че когато особената точка е отстранима или полюс, границата на $f(z)$ при $z \to z_0$ съществува (като крайна или безкрайна). Когато особената точка е съществена, съгласно една теорема на Вайерщрас-Сохоцки, тази граница не съществува, а поведението на $f(z)$ в околност на z_0 има твърде сложен характер.

4. Основна теорема на алгебрата. Да предположим, че функцията $f(z)$ е аналитична в затворения кръг $|z-z_0| \leq R$, което по определение означава, че е аналитична в някоя област, съдържаща затворения кръг. Нека Γ_R е окръжността $\Gamma_R : z = z_0 + \mathrm{Re}^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$. Тогава функцията се развива в ред на Тейлър

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$$

където, според формулите на Коши,

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_R} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz .$$

Нека $M = \max\limits_{z \in \Gamma_R} |f(z)|$. Тогава са в сила неравенствата

$$(20.17)\ |c_n| \le \frac{1}{2\pi}\left|\int\limits_{\Gamma_R} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz\right| \le \frac{M2\pi R}{2\pi R^{n+1}} = \frac{M}{R^n},$$

които се наричат ***неравенства на Коши***. В частност при $n=0$ имаме $|f(z_0)| = |c_0| \le M$, което показва, че ако $f(z)$ е аналитична в затворен кръг, то модулът на стойността на $f(z)$ в центъра на кръга не надминава максимума на модула на по окръжността.

Една комплексна функция се нарича ***цяла***, когато е аналитична в цялата комплексна равнина. Ако $f(z)$ е цяла, то степенният ред около нулата

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n$$

е сходящ за всяко $z \in C$ ($R = \infty$). Цели функции са например e^z, $\sin z$, $\cos z$, както и всеки полином.

Теорема 20.8 ***(Лиувил)***. Нека цялата функция $f(z)$ е ограничена над C, т.е. $|f(z)| \le M$ за всяко $z \in C$. Тогава $f(z)$ е тъждествено равна на константа.

Доказателство. Съгласно неравенствата на Коши (20.17)

$$|c_n| \le \frac{M}{R^n} \xrightarrow[R\to\infty]{} 0,\ n = 1,2,\ldots,$$

следователно $c_n = 0$ при всяко $n = 1,2,\ldots$, което означава, че $f(z) \equiv c_0$. ■

Теоремата на Лиувил ни дава възможност да докажем основната теорема на алгебрата и в частност показва силата на показаната дотук теория.

Теорема 20.9 ***(основна теорема на алгебрата)***. Всеки полином $P(z)$, който не е тъждествено равен на константа има поне една нула над C, т.е. уравнението $P(z) = 0$ има поне един комплексен корен.

Доказателство. Да предположим противното. Тогава функцията

$$f(z) = \frac{1}{P(z)}$$

е цяла и освен това ограничена над цялата комплексна равнина, както добре се вижда от факта, че

$$\lim_{|z|\to\infty} |P(z)| = \infty .$$

Сега теоремата на Лиувил ни дава, че функцията $f(z)$ е тъждествено равна на константа, респективно и полиномът $P(z)$ е константа, което противоречи на условието на теоремата. ■

Следващата теорема пояснява спецификата на аналитичните функции.

Теорема 20.10 ***(принцип за максимума на модула)***. Нека функцията $f(z)$ е аналитична в областта D и не е тъждествено равна на константа. Тогава функцията $|f(z)|$ не достига максимална стойност в областта. ■