Лекция 21

§21. Теорема за резидуумите

1. Теорема за резидуумите. Теоремата за резидуумите представлява едно от най-важните приложения на развитата до тук теория.

Нека точката z_0 е изолирана особена точка за функцията $f(z)$, която е аналитична в някаква пробита околност на z_0, $0<|z-z_0|<R$. Тогава, както вече знаем, $f(z)$ се развива в ред на Лоран

$$(21.1)\quad f(z)=\sum_{-\infty}^{\infty}c_n(z-z_0)^n=\cdots+\frac{c_{-2}}{(z-z_0)^2}+\frac{c_{-1}}{z-z_0}+c_0+c_1(z-z_0)+c_2(z-z_0)^2+\cdots$$

Коефициентът c_{-1} се нарича ***резидуум*** на функцията $f(z)$ в точката z_0 и се бележи с $\operatorname*{res}_{z=z_0} f(z)$.

Понеже редът (21.1) е равномерно (и абсолютно) сходящ над всяко компактно подмножество на пробитата околност $0<|z-z_0|<R$, можем да интегрираме (21.1) почленно върху коя да е положително ориентирана окръжност Γ_ε с център z_0 и достатъчно малък радиус $\varepsilon>0$, след което въз основа на твърдение 19.4 получаваме

$$c_{-1}=\operatorname*{res}_{z=z_0} f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_\varepsilon} f(z)dz\,.$$

Твърдение 21.1. Нека точката z_0 е полюс от ред не по-висок от m за функцията $f(z)$. Тогава е в сила формулата

$$(21.2)\quad \operatorname*{res}_{z=z_0} f(z)=\lim_{z\to z_0}\left[\frac{1}{(m-1)!}\left[(z-z_0)^{m-1}f(z)\right]^{(m-1)}\right].$$

Доказателство. Понеже z_0 е полюс от ред не по-висок от m, то лорановото развитие на $f(z)$ в околност на точката z_0 има вида

$$f(z)=\frac{c_{-m}}{(z-z_0)^m}+\cdots+\frac{c_{-1}}{z-z_0}+c_0+c_1(z-z_0)+\cdots,$$

следователно

$$(z-z_0)^m f(z)=c_{-m}+c_{-m+1}(z-z_0)+\cdots+c_{-1}(z-z_0)^{m-1}+c_0(z-z_0)^m+c_1(z-z_0)^{m+1}+\cdots,$$

откъдето се вижда, че

$$\left[(z-z_0)^m f(z)\right]^{(m-1)}=c_{-1}(m-1)!+\cdots.$$

Тук с многоточие са означени събираеми, всяко от които има като множител някаква положителна степен на $(z-z_0)$. Краят на доказателството е очевиден. ■

Формулата (21.2) работи най-икономично, когато е известен точния ред на полюса. В противен случай ще извършим допълнителни излишни пресмятания. Съгласно твърдение 20.2, ако $f(z)$ е аналитична в някаква пробита околност на точката z_0 и $f(z)$ може да се запише във вида

$$f(z)=\frac{\varphi(z)}{\psi(z)},$$

където функциите $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ са аналитични в околност на z_0, а точката z_0 е нула от ред $m\ge 1$ за функцията $\psi(z)$, то точката z_0 се явява полюс от ред не по-висок от m, следователно в този случай са налице условията за прилагане на твърдение 21.1.

От особен интерес е случаят, когато полюсът z_0 е от кратност едно – ***прост полюс***. Да предположим в този случай, че функцията $f(z)$ може да се запише във вида

$$f(z)=\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$$

където $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ са аналитични в околност на z_0, при което $\psi(z_0)=0$ и $\psi'(z_0)\neq 0$. Тогава съгласно (21.2) за резидуума в точката z_0 имаме

$$\text{(21.3)}\quad \operatorname*{res}_{z=z_0}\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}=\lim_{z\to z_0}\left[(z-z_0)\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}\right]=\lim_{z\to z_0}\frac{\varphi(z)}{\dfrac{\psi(z)-\psi(z_0)}{z-z_0}}=\frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}.$$

Да намерим например резидуума на функцията

$$f(z)=\frac{e^{\frac{1}{z}}}{(z-1)^2}$$

в точката $z_0=1$. Съгласно теорема 20.6, точката $z_0=1$ е полюс от ред 2, понеже числителят $e^{\frac{1}{z}}$ е аналитичен в тази точка. От формула (21.2) имаме $(m=1)$

$$\operatorname*{res}_{z=1}f(z)=\lim_{z\to 1}\left[(z-1)^2 f(z)\right]'=\lim_{z\to 1}\left[e^{\frac{1}{z}}\right]'=\lim_{z\to 1}\left[-\frac{1}{z^2}e^{\frac{1}{z}}\right]=-e.$$

Да намерим резидуума на функцията

$$f(z)=\frac{\sin^2 z}{\cos z}$$

в точката $z_0=\frac{\pi}{2}$. Тук z_0 се явява прост корен за знаменателя $\cos z$, следователно z_0 представлява прост полюс за $f(z)$ и съгласно формула (21.3) намираме

$$\operatorname*{res}_{z=\frac{\pi}{2}}f(z)=\operatorname*{res}_{z=\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 z}{\cos z}=\frac{\sin^2\frac{\pi}{2}}{-\sin\frac{\pi}{2}}=-1,$$

понеже $(\cos z)'=-\sin z$.

Да намерим резидуумите на функцията

$$f(z)=\frac{1}{(z-2)^2(z-3)}.$$

Тук особените точки са $z_1=2$ и $z_2=3$, при което z_1 се явява полюс от ред 2, а z_2 е прост полюс. Съгласно формулата (21.2) намираме

$$\operatorname*{res}_{z=2}\frac{1}{(z-2)^2(z-3)}=\lim_{z\to 2}\left[(z-2)^2\frac{1}{(z-2)^2(z-3)}\right]'=\lim_{z\to 2}\left[\frac{1}{(z-3)}\right]'=\lim_{z\to 2}\left[\frac{-1}{(z-3)^2}\right]=-1,$$

а съгласно формула (21.3),

$$\operatorname*{res}_{z=3}\frac{1}{(z-2)^2(z-3)}=\operatorname*{res}_{z=3}\frac{\dfrac{1}{(z-2)^2}}{(z-3)}=\frac{1}{(3-2)^2}=1.$$

Теоремата за резидуумите има различни редакции и трябва да се схваща като естествено обобщение на основната теорема на Коши, когато функцията има краен брой изолирани особени точки. Нека D е едносвързана област с граница (външен контур) частично гладката положително ориентирана жорданова крива Γ_0, а функцията $f(z)$ е аналитична в затворената област $\overline{D}$ с изключение евентуално на краен брой изолирани особени точки z_1, z_2, ..., z_n вътре в областта D. Нека γ_k, $1 \le k \le n$, са положително ориентираните окръжности с центрове съответно в точките z_k и достатъчно малък радиус $\varepsilon > 0$ така, че кръговете $|z - z_k| \le \varepsilon$ да не се пресичат и да принадлежат изцяло в областта D, както е показано на рис. 21.1.

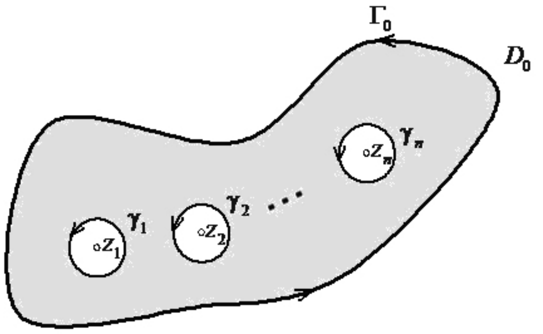

Рис. 21.1.

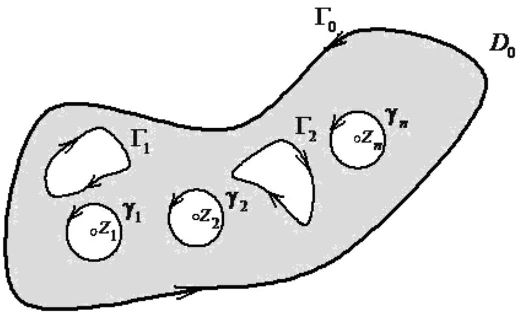

Рис. 21.2.

По този начин можем да разгледаме областта D_0, която се получава от D след отстраняване на кръговете $|z - z_k| \le \varepsilon$. По условие функцията $f(z)$ е аналитична в затворената област $\overline{D}_0$, следователно можем да приложим твърдение 19.5, според което

(21.4) $\displaystyle\int_{\Gamma_0} f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz + \int_{\gamma_2} f(z)dz + \cdots + \int_{\gamma_n} f(z)dz$.

От друга страна по определение

$$\int_{\gamma_k} f(z)dz = 2\pi i \operatorname*{res}_{z=z_k} f(z),\ k = 1,2,\ldots,n,$$

откъдето след заместване в (21.4) намираме формулата

(21.5) $\displaystyle\int_{\Gamma_0} f(z)dz = 2\pi i\left[\operatorname*{res}_{z=z_1} f(z) + \operatorname*{res}_{z=z_2} f(z) + \cdots + \operatorname*{res}_{z=z_n} f(z)\right]$.

Формулата (21.5) може да се получи при по-общи предположения за вида на областта. Да усложним разгледаната току що ситуация, предполагайки наличието на вътрешни контури за областта D, която вече не се явява едносвързана.

Нека за определеност D има два вътрешни контури Γ_1 и Γ_2 при което Γ_1 и Γ_2 представляват частично гладки отрицателно ориентирани жорданови криви (рис. 21.2) (по този начин границата на D се явява положително ориентирана). Тук броят на вътрешните контури разбира се няма принципно значение за формулата, която ще докажем. Радиусите на γ_k, $1 \le k \le n$, винаги могат да се изберат достатъчно малки, че кръговете $|z - z_k| \le \varepsilon$ да не се пресичат и да принадлежат изцяло в областта D. Сега отново от твърдение 19.5 получаваме

$$\int_{\Gamma_0} f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz + \int_{\gamma_2} f(z)dz + \cdots + \int_{\gamma_n} f(z)dz - \int_{\Gamma_1} f(z)dz - \int_{\Gamma_2} f(z)dz,$$

което по аналогичен начин свеждаме до

$$\int_{\Gamma_0} f(z)dz + \int_{\Gamma_1} f(z)dz + \int_{\Gamma_2} f(z)dz = 2\pi i\left[\operatorname*{res}_{z=z_1} f(z) + \operatorname*{res}_{z=z_2} f(z) + \cdots + \operatorname*{res}_{z=z_n} f(z)\right],$$

което се записва накратко

(21.6) $\int\limits_{\Gamma} f(z)dz = 2\pi i\left[\operatorname*{res}_{z=z_1} f(z) + \operatorname*{res}_{z=z_2} f(z) + \cdots + \operatorname*{res}_{z=z_n} f(z)\right]$,

където $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ е положително ориентираният сложен контур на областта D.

По този начин въз основа на формулите (21.5-6) доказахме

Теорема 21.1 ***(теорема за резидуумите)***. Нека за областта D е налице едно от двете условия.

1) Областта D е едносвързана с контур частично гладката жорданова крива Γ_0.

2) Областта D има външен контур Γ_0 и вътрешни контури Γ_1, Γ_2, ..., Γ_m, при което всичките контури се предполагат частично гладки жорданови криви, Γ_0 е ориентирана положително, а Γ_1, Γ_2, ..., Γ_m са ориентирани отрицателно.

Нека освен това функцията $f(z)$ е аналитична в затворената област $\overline{D}$ с изключение евентуално на краен брой изолирани особени точки z_1, z_2, ..., z_n вътре в областта D. Тогава е в сила формулата ***(формула за резидуумите)***

$$\int\limits_{\Gamma} f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{res}_{z=z_k} f(z),$$

където в първия случай $\Gamma = \Gamma_0$, а във втория случай $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1 \cup \cdots \cup \Gamma_m$. ■

Например да пресметнем интеграла

$$I = \int\limits_{C} \frac{\operatorname{cotg} z}{4z - \pi} dz,$$

където C е окръжността $|z| = 1$ (ориентирана положително) (рис. 21.3).

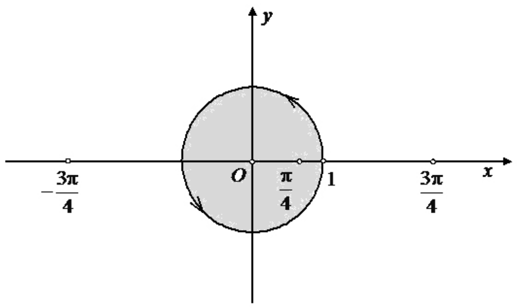

Рис. 21.3.

За този интеграл имаме

$$f(z) = \frac{\operatorname{cotg} z}{4z - \pi}.$$

Особените точки на $f(z)$ са $z_0 = \frac{\pi}{4}$, а също така и всичките точки $\pm\frac{\pi}{2}$, $\pm\frac{3\pi}{2}$, ..., където се анулира $\sin z$. От тях само $z_1 = 0$ попада вътре в областта. Сега от формулата за резидуумите имаме

$$I = 2\pi i\left[\operatorname*{res}_{z=\frac{\pi}{4}} f(z) + \operatorname*{res}_{z=0} f(z)\right] = 2\pi i\left[\operatorname*{res}_{z=\frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{cotg} z}{4z - \pi} + \operatorname*{res}_{z=0} \frac{\operatorname{cotg} z}{4z - \pi}\right].$$

И двете точки представляват прости полюси, следователно

$$\operatorname*{res}_{z=\frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{cotg} z}{4z - \pi} = \frac{\operatorname{cotg}\frac{\pi}{4}}{4} = \frac{1}{4}, \ \operatorname*{res}_{z=0} \frac{\operatorname{cotg} z}{4z - \pi} = \operatorname*{res}_{z=0} \frac{\left[\frac{\cos z}{4z - \pi}\right]}{\sin z} = \frac{\left[\frac{\cos 0}{4 * 0 - \pi}\right]}{\cos 0} = -\frac{1}{\pi},$$

откъдето за интеграла I намираме

$$I = 2\pi i\left[\frac{1}{4} - \frac{1}{\pi}\right].$$

2. Приложения на теоремата за резидуумите. Теоремата за резидуумите има многобройни приложения. Тук ще разгледаме само възможността, която тази теорема предлага за пресмятане на някои несобствени и тригонометрични интеграли.

Да разгледаме отначало несобствени интеграли от вида

$$(21.7)\quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}dx\,,$$

където $P(x)$ и $Q(x)$ са полиноми с реални коефициенти, за които $\deg Q(x) \geq \deg P(x) + 2$ и освен това $Q(z)$ няма нули върху реалната ос. Такива реални несобствени интеграли могат да се пресмятат чрез теоремата за резидуумите в случая когато намирането на примитивна за подинтегралната функция е трудно или невъзможно. Нека z_1, z_2, ..., z_n са онези корени на полинома $Q(z)$, които лежат в горната полуравнина $y > 0$ (рис. 21.4). Нека R е избрано толкова голямо, че всичките z_k, $k = 1,2,\ldots,n$, лежат в кръга с център в началото и радиус R. Такъв избор е възможен, понеже те са краен брой (не повече от всичките корени на полинома $Q(z)$).

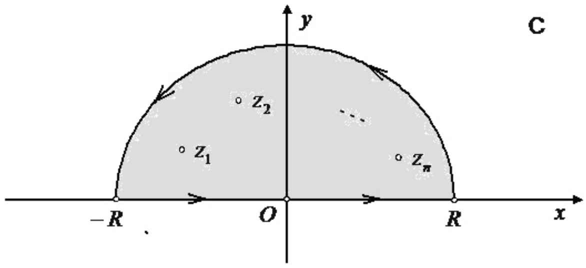

Рис. 21.4.

В този случай ще интегрираме функцията

$$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$$

по контура $L = L_R \cup [-R, R]$, където L_R е горната полуокръжност с център в нулата и радиус R, а $[-R, R]$ е съответната отсечка по реалната ос. Всичките точки z_k, $k = 1,2,\ldots,n$, представляват полюси за $f(z)$ от ред не по-висок от кратността на съответното z_k като корен на полинома $Q(z)$. За всяко достатъчно голямо R, според теоремата за резидуумите имаме

$$(21.8)\quad \int_{-R}^{R} f(z)dx + \int_{L_R} f(z)dz = 2\pi i \sum_k \operatorname*{res}_{z=z_k} f(z),$$

където сумата е по полюсите на функцията $f(z)$, които са точно нулите на полинома $Q(z)$. Идеята на този подход се основава на факта, че интегралът по полуокръжността L_R клони към нула при $R \to \infty$, докато интегралът по отсечката $[-R, R]$ клони точно към интеграла, който искаме да пресметнем.

Сега ще докажем, че при направените предположения, най-вече от това, че $\deg Q(x) \geq \deg P(x) + 2$, следва

$$(21.9)\quad \lim_{R\to\infty} \int_{L_R} \frac{P(z)}{Q(z)}dz = 0\,.$$

Нека $m = \deg P(z)$ и

$$P(z) = p_m z^m + p_{m-1} z^{m-1} + \cdots, \; p_m \neq 0,$$

$$Q(z) = q_{m+s} z^{m+s} + q_{m+s-1} z^{m+s-1} + \cdots, \; q_{m+s} \neq 0,$$

където $m + s = \deg Q(z)$. По условие $s \geq 2$. Ако $z \in L_R$, то последователно оценяваме модула на $f(z)$,

$$|f(z)| = \left|\frac{P(z)}{Q(z)}\right| = \left|\frac{p_m z^m + p_{m-1} z^{m-1} + \cdots}{q_{m+s} z^{m+s} + q_{m+s-1} z^{m+s-1} + \cdots}\right| = \left|\frac{z^m \left(p_m + p_{m-1} \frac{1}{z} + \cdots\right)}{z^{m+s}\left(q_{m+s} + q_{m+s-1}\frac{1}{z} + \cdots\right)}\right|,$$

$$(21.10) \quad \left|\frac{P(z)}{Q(z)}\right| = \left|\frac{z^m}{z^{m+s}}\right| \left|\frac{p_m + p_{m-1}\frac{1}{z} + \cdots}{q_{m+s} + q_{m+s-1}\frac{1}{z} + \cdots}\right| = \frac{1}{R^s}\left|\frac{p_m + p_{m-1}\frac{1}{z} + \cdots}{q_{m+s} + q_{m+s-1}\frac{1}{z} + \cdots}\right|,$$

понеже $|z| = R$. Лесно се съобразява, че вторият множител в дясната страна на (21.10) е ограничен при $R \to \infty$, т.е. може да се намери R_0 такова, че

$$\left|\frac{p_m + p_{m-1}\frac{1}{z} + \cdots}{q_{m+s} + q_{m+s-1}\frac{1}{z} + \cdots}\right| \leq M,$$

за някаква константа M при всяко $R > R_0$. Сега от (21.10) следва, че

$$(21.11) \quad \left|\frac{P(z)}{Q(z)}\right| \leq \frac{M}{R^s},$$

за всяко $R > R_0$. От правилото за оценка на комплексния интеграл получаваме

$$\left|\int_{L_R} \frac{P(z)}{Q(z)} dz\right| \leq \max_{z \in L_R} \left|\frac{P(z)}{Q(z)}\right| \mu(L_R),$$

където $\mu(L_R) = \pi R$ е дължината на кривата L_R, следователно съгласно (21.11) е изпълнено

$$\left|\int_{L_R} \frac{P(z)}{Q(z)} dz\right| \leq \frac{M}{R^s} \pi R = \frac{M\pi}{R^{s-1}},$$

откъдето непосредствено се получава верността на (21.9). От друга страна очевидно

$$(21.12) \quad \lim_{R \to \infty} \int_{-R}^{R} f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx.$$

Съотношенията (21.9) и (21.12) дават търсената формула

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx = 2\pi i \sum_k \operatorname*{res}_{z = z_k} \frac{P(z)}{Q(z)}.$$

По този начин доказахме

Твърдение 21.2. Нека $P(x)$ и $Q(x)$ са полиноми, за които $\deg Q(x) \geq \deg P(x) + 2$ и освен това $Q(z)$ няма нули върху реалната ос и нека z_1, z_2, ..., z_n са онези нули на полинома $Q(z)$, които лежат в горната полуравнина $\operatorname{Im} z > 0$. Тогава е в сила формулата

(21.13) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}dx = 2\pi i\sum_k \operatorname*{res}_{z=z_k}\frac{P(z)}{Q(z)}$. ■

От направеното доказателство се вижда, че твърдение 21.2 е вярно както за полиноми с реални коефициенти, така и за полиноми с комплексни коефициенти.

Например да пресметнем интеграла

$$I = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{1+x^4}.$$

Тук ще приложим твърдение 21.2 за рационалната функция $f(z) = \dfrac{1}{1+z^4}$. Знаменателят няма нули върху реалната ос и освен това $\deg(1+z^4) = 4 > \deg 1 + 2 = 2$. Функцията $f(z)$ има изолирани особени точки корените на уравнението $Q(z) = z^4 + 1 = 0$. Неговите корени се намират по известната формула

$$z_k = \sqrt[4]{|-1|}\left[\cos\frac{\arg(-1)+2k\pi}{4} + i\sin\frac{\arg(-1)+2k\pi}{4}\right],\ k = 0,1,2,3,$$

$$z_k = \cos\frac{\pi+2k\pi}{4} + i\sin\frac{\pi+2k\pi}{4},\ k = 0,1,2,3.$$

От тях само

$$z_0 = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}} \text{ и } z_1 = \cos\frac{\pi+2\pi}{4} + i\sin\frac{\pi+2\pi}{4} = -\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}$$

лежат в горната полуравнина $\operatorname{Im} z > 0$. Сега от твърдение 21.2 следва, че

$$I = 2\pi i\left[\operatorname*{res}_{z=z_0}\frac{1}{z^4+1} + \operatorname*{res}_{z=z_1}\frac{1}{z^4+1}\right].$$

И двете точки са прости полюси, понеже $Q'(z) = 4z^3$ и $Q'(z_0) \neq 0$, $Q'(z_1) \neq 0$. Пресмятаме последователно

$$\operatorname*{res}_{z=z_0}\frac{1}{z^4+1} = \frac{1}{4(z_0)^3} = \frac{z_0}{4(z_0)^4} = -\frac{z_0}{4} \text{ и } \operatorname*{res}_{z=z_1}\frac{1}{z^4+1} = \frac{1}{4(z_1)^3} = \frac{z_1}{4(z_1)^4} = -\frac{z_1}{4},$$

$$I = 2\pi i\left[-\frac{z_0}{4} - \frac{z_1}{4}\right] = -2\pi i\left[\frac{z_0+z_1}{4}\right] = -2\pi i\left[\frac{\frac{2i}{\sqrt{2}}}{4}\right] = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

Интегралите от вида

$$A = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}\cos\alpha x\,dx \text{ и } B = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}\sin\alpha x\,dx,\ \alpha > 0,$$

се обединяват в един посредством формулата на Ойлер $\cos\alpha x + i\sin\alpha x = e^{i\alpha x}$,

$$A + iB = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}e^{i\alpha x}dx.$$

Твърдение 21.3. Нека $P(x)$ и $Q(x)$ са полиноми (с реални или комплексни коефициенти) такива, че $\deg Q(x) \geq \deg P(x) + 1$ и знаменателят $Q(x)$ няма корени по реалната ос. Нека освен това z_1, z_2, ..., z_n са нулите на $Q(z)$ в горната полуравнина $\operatorname{Im} z > 0$. Тогава при всяко $\alpha > 0$ е в сила формулата

(21.14) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}e^{i\alpha x}dx = 2\pi i\sum_k \operatorname*{res}_{z=z_k}\left[\frac{P(z)}{Q(z)}e^{i\alpha z}\right]$.

Доказателство. Тук ще положим

$$f(z)=\frac{P(z)}{Q(z)}e^{i\alpha z}$$

и ще разсъждаваме аналогично както при доказването на твърдение 21.2. Достатъчно е да покажем, че

$$(21.15)\ \lim_{R\to\infty}\int_{L_R}\frac{P(z)}{Q(z)}e^{i\alpha z}dz=0,$$

понеже всичко друго се повтаря по същия начин. Кривата L_R има параметрично представяне

$$L_R: z=R\,e^{it}=R[\cos t+i\sin t],\ 0\le t\le\pi,$$

следователно при $z\in L_R$,

$$\left|e^{i\alpha z}\right|=\left|e^{i\alpha R[\cos t+i\sin t]}\right|=\left|e^{i\alpha R\cos t}\right|\left|e^{-\alpha R\sin t}\right|=\left|e^{-\alpha R\sin t}\right|,\ 0\le t\le\pi.$$

Разсъждавайки аналогично, от правилото за оценяване на интеграла получаваме

$$(21.16)\left|\int_{L_R}\frac{P(z)}{Q(z)}e^{i\alpha z}dz\right|\le\left|\int_0^{\pi}\frac{M}{R^s}e^{-\alpha R\sin t}Rdt\right|=\frac{M}{R^{s-1}}\int_0^{\pi}e^{-\alpha R\sin t}dt=\frac{2M}{R^{s-1}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{-\alpha R\sin t}dt,$$

където $s=\deg Q(z)-\deg P(z)$. По условие $s\ge 1$. От друга страна лесно се установява, че

$$\sin t\ge\frac{2}{\pi}t,\ 0\le t\le\frac{\pi}{2},$$

следователно

$$e^{-\alpha R\sin t}\le e^{-\alpha R\frac{2}{\pi}t},\ 0\le t\le\frac{\pi}{2},$$

откъдето след заместване в (21.16) намираме

$$\left|\int_{L_R}\frac{P(z)}{Q(z)}e^{i\alpha z}dz\right|\le\frac{2M}{R^{s-1}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{-\alpha R\frac{2}{\pi}t}dt=\frac{2M}{R^{s-1}}\left[1-e^{-R\alpha}\right].$$

Дясната страна в последното неравенство клони към нула при $R\to\infty$, което доказва (21.15), а от там и верността на твърдението. ■

Например да пресметнем интеграла

$$I=\int_0^{\infty}\frac{\cos ax}{x^2+b^2}dx,\ a>0,\ b>0.$$

Тук от съображения за четност можем да напишем

$$I=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos ax}{x^2+b^2}dx.$$

Да положим

$$A=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos ax}{x^2+b^2}dx\ \text{ и }\ B=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin ax}{x^2+b^2}dx.$$

Тогава

$$(21.17)\ A+iB=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{x^2+b^2}e^{iax}dx$$

Веднага се вижда че са налице условията за прилагане на твърдение 21.3. Знаменателят $Q(z)=z^2+b^2$ има два прости корена $z_1=ib$ и $z_2=-ib$. От тях само z_1 лежи в горната полуравнина. Оттук интеграла (21.16) намираме

$$A+iB=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{x^2+b^2}e^{iax}dx=2\pi i\operatorname*{res}_{z=ib}\frac{1}{x^2+b^2}e^{iax}=2\pi i\frac{e^{iaib}}{2ib}=\pi\frac{e^{-ab}}{b}.$$

След сравняване на реалните и имагинерните части получаваме

$$A=\pi\frac{e^{-ab}}{b} \text{ и } B=0,$$

откъдето окончателно за стойността на търсения интеграл намираме

$$I=\frac{1}{2}A=\pi\frac{e^{-ab}}{2b}.$$

Теоремата за резидуумите може да бъде полезна и при пресмятане на определени интеграли от вида

$$\int_0^{2\pi}R(\cos x,\sin x)dx,$$

където $R(u,v)$ е някаква рационална функция. След смяната $e^{ix}=z$ имаме

$$\cos x=\frac{z+\frac{1}{z}}{2} \text{ и } \sin x=\frac{z-\frac{1}{z}}{2i}.$$

Твърдение 21.4. Нека $R(u,v)$ е рационална функция, при което комплексната функция

$$R\left(\frac{z+\frac{1}{z}}{2},\frac{z-\frac{1}{z}}{2i}\right)$$

няма нули по единичната окръжност $C:|z|=1$. Тогава

$$(21.18)\quad \int_0^{2\pi}R(\cos x,\sin x)dx=\int_C R\left(\frac{z+\frac{1}{z}}{2},\frac{z-\frac{1}{z}}{2i}\right)\frac{dz}{iz}=2\pi\sum_k\operatorname*{res}_{z=z_k}\left[R\left(\frac{z+\frac{1}{z}}{2},\frac{z-\frac{1}{z}}{2i}\right)\frac{1}{z}\right],$$

където сумирането е по всичките полюси на подинтегралната функция, които лежат вътре в единичната окръжност.

Доказателство. Ако в интеграла

$$\int_C R\left(\frac{z+\frac{1}{z}}{2},\frac{z-\frac{1}{z}}{2i}\right)\frac{dz}{iz}$$

заместим с параметризацията на $C:z=e^{ix}$, $0\le x\le 2\pi$, $dz=ie^{ix}dx$, ще получим

$$\int_C R\left(\frac{z+\frac{1}{z}}{2},\frac{z-\frac{1}{z}}{2i}\right)\frac{dz}{iz}=\int_0^{2\pi}R(\cos x,\sin x)\frac{ie^{ix}dx}{ie^{ix}}=\int_0^{2\pi}R(\cos x,\sin x)dx.$$

Другата част на формулата (21.18) се получава веднага от теоремата за резидуумите. ■

Например да пресметнем интеграла

$$I=\int_0^{2\pi}\frac{dx}{1+a\cos x},\ 0<a<1.$$

Съгласно твърдение 21.4 полагаме $e^{ix}=z$ и получаваме

$$I = \frac{1}{i}\int_C \frac{dz}{\left[1 + a\dfrac{z + \frac{1}{z}}{2}\right]z} = \frac{2}{i}\int_C \frac{dz}{az^2 + 2z + a},$$

където C е единичната окръжност. Подинтегралната функция има два прости полюса, които са корените на знаменателя,

$$z_1 = \frac{-1 + \sqrt{1 - a^2}}{a} \text{ и } z_1 = \frac{-1 - \sqrt{1 - a^2}}{a},$$

от които само z_1 лежи вътре в C. Пресмятаме

$$\operatorname*{res}_{z = z_1} \frac{1}{az^2 + 2z + a} = \frac{1}{2\sqrt{1 - a^2}},$$

откъдето за интеграла намираме

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{dx}{1 + a\cos x} = 2\pi i \frac{2}{i} \operatorname*{res}_{z = z_1} \frac{1}{az^2 + 2z + a} = \frac{2\pi}{\sqrt{1 - a^2}}.$$

Да пресметнем сега ***интеграла на Ойлер***

(21.19) $$E = \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx.$$

Първо да отбележим, че този несобствен интеграл е условно сходящ и се определя като границата

$$E = \lim_{R \to \infty} \int_0^R \frac{\sin x}{x} dx.$$

Понеже подинтегралната функция е четна,

(21.20) $$E = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \lim_{R \to \infty}\left[\frac{1}{2}\int_{-R}^{R} \frac{\sin x}{x} dx\right].$$

Да разгледаме областта D от рис. 21.5,

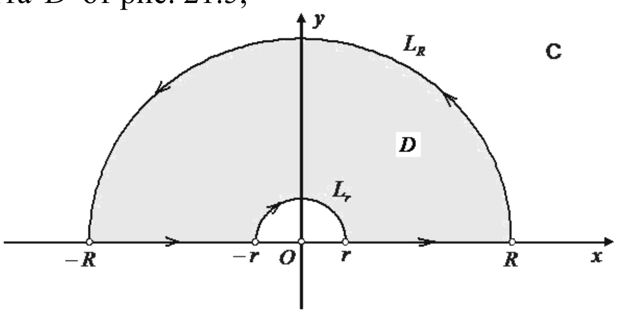

Рис. 21.5

с контур съставен от положително ориентираната полуокръжност $L_R : z = Re^{it}$, $0 \le t \le \pi$, отрицателно ориентираната полуокръжност $L_r : z = re^{-it}$, $-\pi \le t \le 0$, и двете отсечки по реалната ос $[-R, -r]$ и $[r, R]$, $R > r > 0$. В такъв случай целият контур на областта,

$$\Gamma = L_R \cup [-R, -r] \cup L_r \cup [r, R]$$

е положително ориентиран, а в самата област D, функцията $f(z) = e^{iz}$ е аналитична. Съгласно основната теорема на Коши имаме

(21.21) $$\begin{aligned}0=\int_{\Gamma}\frac{e^{iz}}{z}dz=\int_{L_R}\frac{e^{iz}}{z}dz+\int_{L_r}\frac{e^{iz}}{z}dz+\int_{[-R,-r]}\frac{e^{iz}}{z}dz+\int_{[r,R]}\frac{e^{iz}}{z}dz=\\=I_1(R)+I_2(r)+I_3(R,r)+I_4(R,r)\end{aligned}.$$

В последния израз ще правим гранични преходи по $R\to\infty$ и $r\to 0$. Както в доказателството на твърдение 21.3 намираме, че

(21.22) $\lim\limits_{R\to\infty}I_1(R)=\lim\limits_{R\to\infty}\int_{L_R}\frac{e^{iz}}{z}dz=0$.

Интеграла $I_2(r)$ преобразуваме

$$I_2(r)=\int_{L_r}\frac{e^{iz}}{z}dz=\int_{-\pi}^{0}\frac{e^{re^{-it}}}{re^{-it}}(-i)e^{-it}dt=(-i)\int_{-\pi}^{0}e^{re^{-it}}dt,$$

следователно

(21.23) $\lim\limits_{r\to 0}I_2(r)=(-i)\lim\limits_{r\to 0}\int_{-\pi}^{0}e^{re^{-it}}dt=(-i)\int_{-\pi}^{0}dt=(-i)\pi$.

От друга страна очевидно

$$I_3(R,r)+I_4(R,r)=\int_{[-R,-r]}\frac{e^{iz}}{z}dz+\int_{[r,R]}\frac{e^{iz}}{z}dz=\int_{[-R,-r]}\frac{i\sin z}{z}dz+\int_{[r,R]}\frac{i\sin z}{z}dz,$$

следователно

(21.24) $\lim\limits_{R\to\infty,\,r\to 0}\left[I_3(R,r)+I_4(R,r)\right]=\lim\limits_{R\to\infty,\,r\to 0}\left[\int_{[-R,-r]}\frac{i\sin z}{z}dz+\int_{[r,R]}\frac{i\sin z}{z}dz\right]=i\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin z}{z}dz$.

Сега от (21.21-24) получаваме равенството

$$0=(-i)\pi+i\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin z}{z}dz,$$

следователно

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin z}{z}dz=\pi,$$

а за интеграла на Ойлер (21.19) получаваме

(21.25) $E=\int_{0}^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin z}{z}dz=\frac{\pi}{2}$