Лекция 22

§22. Функциите e^z, $\ln z$ и z^α

1. Функциите e^z **и** $\ln z$**.** Тук ще дадем още едно определение за експоненциалната функция, което разбира се води до същия резултат, както определението със степенен ред, без да доказваме еквивалентността на двете определения. За всяко комплексно число $z = x + iy$ функцията e^z се определя по формулата

$$e^z = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i\sin y),$$

следователно $\operatorname{Re} e^z = e^x \cos y$ и $\operatorname{Im} e^z = e^x \sin y$. Веднага се вижда, че са изпълнени условията на Коши-Риман, което означава, че функцията e^z е холоморфна в цялата комплексна равнина $\mathbb{C}$.

Твърдение 22.1. Функцията e^z е аналитична в цялата комплексна равнина $\mathbb{C}$, при което $(e^z)' = e^z$.

Доказателство. Да положим $u(x,y) = \operatorname{Re} e^z = e^x \cos y$ и $v(x,y) = \operatorname{Im} e^z = e^x \sin y$. От формулите за производната на аналитична функция имаме

$$(e^z)' = u'_x(x,y) + iv'_x(x,y) = e^x \cos x + ie^x \sin y = e^z. \ \blacksquare$$

Функции $f(z)$, които са аналитична над цялата комплексна равнина се наричат ***цели*** функции. Според твърдение 22.1, e^z е цяла функция.

От определението непосредствено произтичат следните свойства.

1) За всеки две числа z_1 и z_2 е изпълнено

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1} e^{z_2}.$$

2) Функцията e^z е периодична с период $2\pi i$, $e^{z+2\pi i} = e^z$.

3) $\left|e^z\right| = e^x$ и $\arg e^z = y + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, всичките стойности на e^z са различни от нула.

4) Функцията e^z е еднолистна във всяка област от вида $\alpha < \operatorname{Im} z < \alpha + 2\pi$.

Чрез функцията e^z се определят и тригонометричните функции $\cos z$ и $\sin z$,

$$\cos z = \frac{e^z - e^{-z}}{2} \text{ и } \sin z = \frac{e^z - e^{-z}}{2i},$$

при което са изпълнени всичките основни тригонометрични тъждества, например

$$\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2,$$
$$\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2,$$

и т.н. Така определените $\cos z$ и $\sin z$ са цели функции с производни

$$(\cos z)' = -\sin z \text{ и } (\sin z) = \cos z,$$

което също се проверява лесно чрез формулата за производните или направо от определението.

Комплексното число $z = x + iy$ се нарича ***логаритъм*** на комплексното число $w \neq 0$, когато $e^z = w$. От свойствата на e^z имаме, $\left|e^z\right| = e^x = |w|$, следователно $x = \ln|w|$, и $\arg e^z = y + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, следователно $\{y + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\} = \arg w$, откъдето получаваме $y = \arg w$, за всичките стойности на y, които заедно с $x = \ln|w|$, дават логаритъм на числото w.

По този начин, за всяко $z \neq 0$ определихме многозначната функция $\ln z$ по формулата

(22.1) $\ln z = \ln|z| + i\arg z$,

със стойности

(22.2) $\ln_k z = \ln|z| + i\arg_k z = \ln|z| + i(\arg_0 z + 2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$.

Многозначността на $\ln z$ произтича от многозначността на $\arg z$.

Например $\ln 1 = \{2k\pi i, k \in \mathbb{Z}\}$, $\ln i = \left\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi i, k \in \mathbb{Z}\right\}$ и т.н.

2. Еднозначни клонове на логаритъма. Отначало ще покажем една важна теорема от общ характер за съществуване на примитивни на дадена аналитична функция. Казва се, че функцията $F(z)$ е примитивна на аналитичната функция $f(z)$ в областта D, когато $F'(z) = f(z)$, за всяко $z \in D$. Когато областта D е едносвързана, съществуването на примитивна следва фактически от основната теорема на Коши. Нека $f(z)$ е аналитична в едносвързаната област D и нека $z_0 \in D$ е някаква (коя да е) точка от областта. Да разгледаме функцията $F(z)$ определена както следва

(22.2) $F(z) = \int\limits_{\gamma} f(\zeta)d\zeta$,

където γ е коя да е частично гладка крива с начало в точката z_0 и край в точката z. Такива криви съществуват по определение, понеже областта е свързано множество. Тук проблемът е дали определението на $F(z)$ посредством формулата (22.2) е наистина коректно, понеже формално то зависи от избора на кривата γ. Такава зависимост обаче няма, поради основната теорема на Коши. Ситуацията е напълно сходна с тази при криволинеен интеграл от втори род, когато определяхме условия за независимост на интеграла от пътя. Тук също независимостта на интеграла от пътя е еквивалентна на условието интеграл по всеки затворен контур да бъде равен на нула. Наистина, нека γ_1 е друга частично гладка крива с начало в точката z_0 и край в точката z (рис. 22.1).

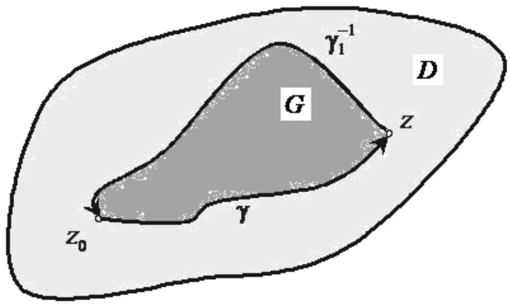

Рис. 22.1.

Тогава $\Gamma = \gamma\gamma_1^{-1}$ представлява частично гладка (положително ориентирана) затворена крива. Ако двете криви γ и γ_1 не се пресичат, то освен това Γ е и жорданова крива (както е на рис. 22.1). Условието за независимост на интеграла (22.2) от пътя означава, че

$$\int\limits_{\gamma} f(\zeta)d\zeta = \int\limits_{\gamma_1} f(\zeta)d\zeta,$$

което преобразуваме

$$\int\limits_{\gamma} f(\zeta)d\zeta - \int\limits_{\gamma_1} f(\zeta)d\zeta = 0,$$

$$\int_{\gamma} f(\zeta)d\zeta + \int_{\gamma_1^{-1}} f(\zeta)d\zeta = 0,$$

$$\int_{\gamma\gamma_1^{-1}} f(\zeta)d\zeta = \int_{\Gamma} f(\zeta)d\zeta = 0.$$

Последното е вярно според основната теорема на Коши, понеже интеграл по затворена крива е нула, когато подинтегралната функция е аналитична в затворената област $\overline{G}$, оградена от тази крива. В общият случай обаче двете криви γ и γ_1 се пресичат. Тогава въпросната еквивалентност се доказва значително по-трудно. Изложените факти обосновават ясно верността на следната

Теорема 22.1 ***(за примитивната функция).*** Нека $f(z)$ е аналитична в едносвързаната област D. Тогава $f(z)$ има примитивна, т.е. съществува функция $F(z)$, която е аналитична в областта D, за която $F'(z) = f(z)$, при всяко $z \in D$. ■

Например $F(z) = \sin z$ е една примитивна на $f(z) = \cos z$ над цялата комплексна равнина. Функцията $F(z) = e^z(z-1)$ е една примитивна за $f(z) = ze^z$ също над цялата комплексна равнина. Тук можем да прилагаме теоремата на Нютон-Лайбниц както и правилото за интегриране по части следвайки познатите правила от реалния анализ.

От направените по-горе разсъждения може да се докаже

Теорема 22.2 ***(Морера).*** Нека $f(z)$ е непрекъсната в едносвързаната област D и нека интегралът от $f(z)$ по всеки затворен контур е равен на нула. Тогава $f(z)$ е аналитична в областта D.

Доказателство. Да изберем една точка $z_0 \in D$ и да определим функцията $F(z)$ по формулата

$$F(z) = \int_{\gamma} f(\zeta)d\zeta,$$

където γ е коя да е частично гладка крива от областта D с начало в точката z_0 и край в точката z. От условието на теоремата следва, че този интеграл не зависи от конкретния избор на кривата, а само от началната и крайната точка, т.е. ***интегралът не зависи от пътя***. Тогава

$$F(z+\Delta z) - F(z) = \int_{I} f(\zeta)d\zeta,$$

където I е отсечката, свързваща точките z и $z+\Delta z$. Тази отсечка има следното параметрично представяне $I : \zeta = z + t\Delta z$, $0 \le t \le 1$, следователно

$$F(z+\Delta z) - F(z) = \int_0^1 f(z+t\Delta z)\Delta z dt,$$

а за границата на диференчното частно получаваме

$$\frac{F(z+\Delta z) - F(z)}{\Delta z} = \int_0^1 f(z+t\Delta z)dt \xrightarrow{\Delta z \to 0} \int_0^1 f(z)dt = f(z).$$

Така показахме, че функцията $F(z)$ е аналитична в областта D, при което $F'(z) = f(z)$. Както знаем обаче аналитичните функции имат производни от всеки ред, следователно съществува и е непрекъсната втората производна $F''(z) = f'(z)$, което доказва аналитичността на функцията $f(z)$. ■

Ако $F(z)$ е примитивна за $f(z)$ в едносвързаната област D и γ е някаква крива от D с начало в точката z_1 и край в точката z_2, то съгласно теоремата на Нютон-Лайбниц

$$\int_\gamma f(z)dz = F(z)\Big|_{z_1}^{z_2} = F(z_2) - F(z_1).$$

Например да пресметнем интеграла

$$\int_\gamma z^2 \sin z dz ,$$

където γ е коя да е частично гладка крива с начало в точката $z_1 = -i$ и край в точката $z_2 = i$. Преобразуваме

$$\int_\gamma z \sin z dz = -\int_\gamma z d \cos z = -z \cos z\Big|_{-i}^{i} + \int_\gamma \cos z dz ,$$

$$\int_\gamma z \sin z dz = [-i \cos i + i \cos(-i)] + \sin z\Big|_{-i}^{i} = \sin i - \sin(-i) = 2 \sin i .$$

Единственият проблем засега е, че все още не разполагаме с достатъчно богат запас от разнообразни аналитични функции.

От формулите (22.1-2) знаем че логаритъмът приема безбройно много стойности във всяка точка. Терминът многозначна функция в някаква степен противоречи на самото определение за функция, понеже там основното изискване беше именно за еднозначност на стойностите. Проблемът идва от факта, че при многозначните функции обикновените аритметични операции водят до още по-голяма многозначност както лесно може да се види върху елементарни примери. Тук може да се направи аналогия с теорията на вероятностите при аритметичните действия със случайни величини. За да можем да използваме логаритмичната функция по характерния за функциите начин е необходимо да умеем да обособяваме подходящи области, над които да определяме непрекъснати и еднозначни клонове на логаритъма. Оказва се, че това винаги е възможно, когато областта е едносвързана и не съдържа нулата.

Нека D е някаква едносвързана област, която не съдържа точката нула. Да фиксираме по произволен начин някаква точка $z_0 \in D$ и нека $\varphi_0 = \arg_0 z$ е някаква конкретна стойност на $\arg z_0$. По този начин фиксираме и една конкретна стойност

$$\log z_0 = \ln|z_0| + i\varphi_0$$

на многозначната функция $\ln z$. Функцията $f(z) = \dfrac{1}{z}$ е аналитична в D и следователно функцията $L(z)$, зададена както следва

$$L(z) = \int_\gamma \frac{dz}{z} + \log z_0 , \tag{22.3}$$

където γ е коя да е частично гладка крива с начало в точката z_0 и край в точката z, е коректно определена (рис. 22.2). От теорема 22.2 знаем, че ако γ_1 е друга такава крива, то стойността на интеграла в (22.3) не се променя.

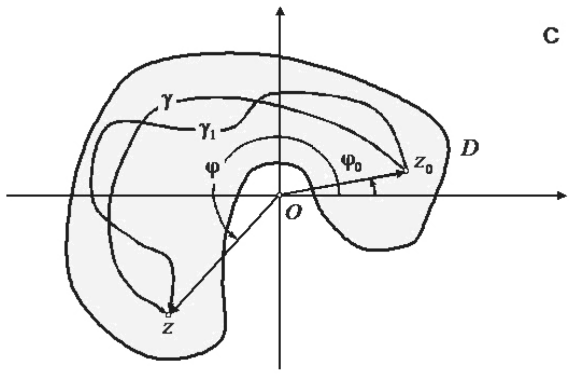

Рис. 22.2.

Интеграла в (22.3) записваме като съставен от двата криволинейни интеграла, както беше при първоначалното определение за комплексен интеграл

$$L(z)=\int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta}+\log z_0=\int_\gamma \frac{dx+idy}{x+iy}+\log z_0=\int_\gamma \frac{(x-iy)(dx+idy)}{x^2+y^2}+\log z_0\,,$$

$$L(z)=\int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta}+\log z_0=\int_\gamma \frac{xdx+ydy}{x^2+y^2}+i\int_\gamma \frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}+\log z_0\,,$$

(22.4) $$L(z)=\int_\gamma d\ln\sqrt{x^2+y^2}+\log z_0+i\int_\gamma \frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}=\ln|z|-\ln|z_0|+i\int_\gamma \frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}+\log z_0\,.$$

За да получим удобен вид на оставащия интеграл преминаваме в полярни координати,

$x=r\cos\varphi$ и $y=r\sin\varphi$,

$dx=\cos\varphi dr-r\sin\varphi d\varphi$, $dy=\sin\varphi dr+r\cos\varphi d\varphi$,

$xdy-ydx=r\cos\varphi[\sin\varphi dr+r\cos\varphi d\varphi]-r\sin\varphi[\cos\varphi dr-r\sin\varphi d\varphi]$,

$xdy-ydx=rd\varphi$,

следователно

(22.5) $$\int_\gamma \frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}=\int_\gamma d\varphi=\varphi-\varphi_0\,,$$

където φ е някаква стойност на аргумента на z. Стойността на интеграла (22.5) се нарича ***нарастване (промяна) на аргумента по направление на кривата*** γ и се бележи с $\Delta_\gamma \arg z$. При направените предположения за областта това нарастване не зависи от конкретния вид на кривата γ а само от началната и крайната точка на γ. Този факт следва непосредствено от теорема 6.2 за ***независимост на интеграла от пътя***, понеже са налице всичките условия за нейното прилагане. Записвайки интеграла (22.5) във вида

$$\int_\gamma \frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}=\int_\gamma \frac{-y}{x^2+y^2}dx+\frac{x}{x^2+y^2}dy\,,$$

веднага се вижда, че

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{-y}{x^2+y^2}\right),$$

което заедно с условието за едносвързаност на D гарантира въпросната независимост.

По този начин доказахме в движение

Твърдение 22.2. Нека D е едносвързана област, която не съдържа нулата и нека γ е частично гладка крива, която лежи изцяло в D. Тогава нарастването на аргумента по направлението на кривата γ,

$$\Delta_\gamma \arg z = \int_\gamma \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2},$$

не зависи от вида на кривата а само от нейната начална и нейната крайна точка. ■

В общия случай без условието за едносвързаност на областта D, твърдение 22.2 не е валидно.

Сега от (22.4) намираме

(22.6) $L(z) = \ln|z| - \ln|z_0| + i\Delta_\gamma \arg z + \log z_0 = \ln|z| + i(\Delta_\gamma \arg z + \varphi_0)$,

където φ_0 е фиксираната стойност на аргумента на избраното предварително число z_0, а $\varphi = \Delta_\gamma \arg z + \varphi_0$ е онази стойност на аргумента на числото z, която се получава вследствие ***непрекъснатото нарастване*** (непрекъснатата промяна) на аргумента при движение по кривата γ. Определената във формула (22.6) функция $L(z)$ очевидно е непрекъсната поради непрекъснатостта на $\Delta_\gamma \arg z$ и освен това има следните свойства.

1) $e^{L(z)} = e^{\ln|z| + i\varphi} = |z|e^{i\varphi} = z$.

2) $L(z)$ е аналитична според теорема 22.1, при което $L'(z) = \dfrac{1}{z}$.

Функцията $L(z)$ представлява търсения еднозначен непрекъснат клон на многозначната функция $\ln z$. При различните избори на φ_0 се получават останалите непрекъснати еднозначни клонове на $\ln z$. Така получихме верността на

Теорема 22.3. Нека D е едносвързана област, която не съдържа нулата и нека $z_0 \in D$ е избрано по произволен начин. Тогава в областта D може да се определи еднозначен непрекъснат клон на функцията $\ln z$ по формулата

$$\log z = \ln|z| + i(\Delta_\gamma \arg z + \varphi_0),$$

където φ_0 е някаква фиксирана стойност на $\arg z_0$, а $\Delta_\gamma \arg z$ е нарастването на аргумента по направление на произволна частично гладка крива, лежаща изцяло в областта D, с начало в точката z_0 и край в точката z. Така определената функция е аналитична в областта D, при което $(\log z)' = \dfrac{1}{z}$. Останалите клонове се получават при различните избори на φ_0. ■

Да завършим този цикъл от разсъждения със следното

Твърдение 22.3. Нека D е едносвързана област, която не съдържа нулата и нека γ е частично гладка крива с начало в точката z_1 и край в точката z_2, която лежи изцяло в D. Тогава за всеки еднозначен аналитичен клон на логаритъма $\log z$ е изпълнено

$$\log z_2 - \log z_1 = \int_\gamma \frac{dz}{z} = \ln|z_2| - \ln|z_1| + i\Delta_\gamma \arg z.$$

Доказателство. От условието на теоремата и от теорема 22.2 следва, че в областта D може да се определи еднозначен аналитичен клон $\log z$ на логаритъма, по формулата

$$\log z = \ln|z| + i(\Delta_\Gamma \arg z + \varphi_0),$$

където Γ е коя да е крива от D с начало в точката z_1 и край в точката z, а φ_0 е една конкретна стойност на $\arg z_1$. При такова определение имаме $\log z_1 = \ln|z_1| + i\varphi_0$. Освен това $(\log z)' = \dfrac{1}{z}$. Сега от формулата на Нютон-Лайбниц имаме

$$\int_\gamma \frac{dz}{z} = \log z\Big|_{z_1}^{z_2} = \log z_2 - \log z_1 = \ln|z_2| + i\left(\Delta_\Gamma \arg z + \varphi_0\right) - \left(\ln|z_1| + i\varphi_0\right),$$

$$\int_\gamma \frac{dz}{z} = \log z\Big|_{z_1}^{z_2} = \log z_2 - \log z_1 = \ln|z_2| - \ln|z_1| + i\Delta_\Gamma \arg z\,,$$

където Γ е коя да е крива от D с начало в точката z_1 и край в точката z_2. Избирайки $\Gamma = \gamma$, получаваме верността на твърдението. ■

Да разгледаме два типични случая на обособяване на непрекъснат клон на логаритмичната функция.

В първия основен случай областта D представлява цялата комплексна равнина след отстраняване на отрицателната реална полуос. В този случай се казва, че D се получава след ***разрязване*** на комплексната равнина по $(-\infty, 0]$ (рис. 22.3).

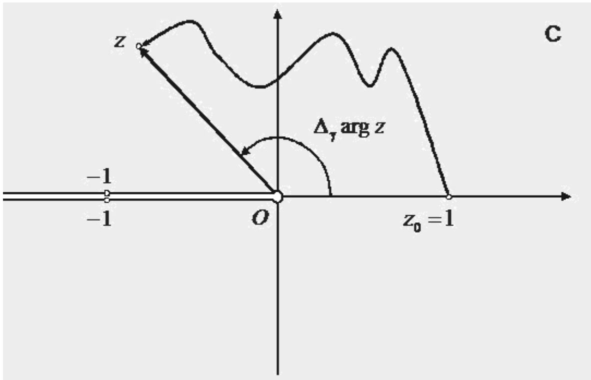

Рис. 22.3.

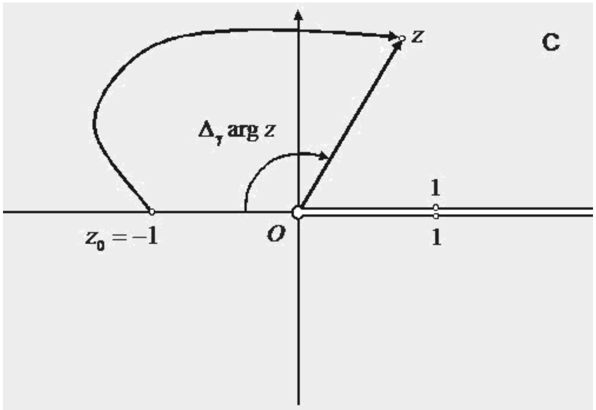

Рис. 22.4.

Тук напълно естествено е да изберем $z_0 = 1$. Тогава $\Delta_\gamma \arg z$ представлява аргумента на z, разглеждан в отворения интервал от $-\pi$ до π, $\varphi = \arg z \in (-\pi, \pi)$. Ако изберем $\varphi_0 = 0$, получаваме еднозначния клон

$$\log z = \ln|z| + i\arg z\,,\ -\pi < \arg z < \pi\,.$$

Останалите клонове се получават с добавяне на $2k\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$. Ако например изберем $\varphi_0 = 2\pi$, получаваме друг непрекъснат клон

$$\log z = \ln|z| + i\arg z\,,\ \pi < \arg z < 3\pi\,,$$

и т.н. Точката $z = -1$ не принадлежи на областта, но въпреки това можем да опитаме да определим нейния аргумент както и нейния логаритъм следвайки съображения за непрекъснатост. Тук обаче се налага да правим разлика между -1 по ***горния бряг*** на разреза и -1 по ***долния бряг*** на разреза. Както добре се вижда от рис. 22.3, ако приближаваме -1 по горния бряг на разреза, ще получим $\arg(-1) = \pi$ и съответно

(22.7) $\log(-1) = \ln|-1| + \arg(-1) = \pi\,,$

а когато приближаваме -1 по долния бряг на разреза, ще получим $\arg(-1) = -\pi$ и съответно

(22.8) $\log(-1) = \ln|-1| + \arg(-1) = -\pi\,.$

Разликата в стойностите при двете формули (22.7-8) именно не позволява да разглеждаме така определената функция $\log z$ като аналитична в точката -1. Независимо от това обаче, функцията $\log z$ е ***непрекъсната*** в точката -1 както по горния бряг, така и по долния бряг на разреза.

Във втория основен случай областта D представлява цялата комплексна равнина след отстраняване на положителната реална полуос. Тук се казва, че D се получава след ***разрязване*** на комплексната равнина по $[0,\infty)$ (рис. 22.4). Тук обаче нямаме право да изберем $z_0 = 1$, защото тази точка не принадлежи на областта, затова избираме $z_0 = -1$, при което фиксираме $\varphi_0 = \pi$. Тогава $\Delta_\gamma \arg z$ представлява ъгълът между радиус вектора на z и отрицателната реална полуос, измерван в ***отрицателна посока*** (по движението на часовниковата стрелка). По този начин получаваме следния еднозначния клон

$$\log z = \ln|z| + i\arg z\,,\ 0 < \arg z < 2\pi\,.$$

Останалите клонове се получават с добавяне на $2k\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$. Ако например изберем $\varphi_0 = 3\pi$, получаваме друг непрекъснат клон

$$\log z = \ln|z| + i\arg z\,,\ 2\pi < \arg z < 4\pi\,,$$

и т.н. Точката $z = 1$ не принадлежи на областта, но въпреки това можем да опитаме да определим нейния аргумент както и нейния логаритъм следвайки съображения за непрекъснатост. И тук обаче се налага да правим разлика между 1 по ***горния бряг*** на разреза и 1 по ***долния бряг*** на разреза. Както се вижда от рис. 22.4, ако приближаваме 1 по горния бряг на разреза, ще получим $\arg(1) = 0$ и съответно

(22.9) $\log(1) = \ln|1| + \arg(1) = 0\,,$

а когато приближаваме 1 по долния бряг на разреза, ще получим $\arg(1) = 2\pi$ и съответно

(22.10) $\log(1) = \ln|1| + \arg(1) = 2\pi\,.$

Разликата в стойностите при двете формули (22.9-10) не позволява да разглеждаме така определената функция $\log z$ като аналитична в точката 1. И тук обаче, функцията $\log z$ е ***непрекъсната*** в точката 1 както по горния бряг, така и по долния бряг на разреза.

В разгледаните два случая конкретният избор на разреза нямаше принципно значение. По същия начин може да се установи, че логаритмичната функция има еднозначен аналитичен клон във всяка област, получена след разрязване комплексната равнина по някакъв лъч с начало в нулата.

3. Фукцията z^α. Нека α е някакво реално число. Тогава ***многозначната*** степенна функция z^α е определя посредством многозначната функция $\ln z$ както следва

(22.11) $z^\alpha = e^{\alpha \ln z}\,,$

което означава, че всичките стойности на z^α се получават във вида

(22.12) $\left(z^\alpha\right)_k = e^{\alpha\left[\ln|z| + i\arg_0 z + 2k\pi i\right]} = e^{\alpha\ln|z| + i\alpha\arg_0 z + i2k\pi\alpha} = \ln|z|^\alpha e^{i\alpha\arg_0 z} e^{i2k\pi\alpha} = \left(z^\alpha\right)_0 e^{i2k\pi\alpha}\,,$

където $\arg_0 z$ е едно фиксирано значение на $\arg z$, а $k \in \mathbb{Z}$. От формулата (22.12) се вижда, че ако α е цяло число, то $e^{i2k\pi\alpha} = 1$ за всяко $k \in \mathbb{Z}$ и в този и само в този случай степенната функция е ***еднозначна***.

Ако D е едносвързана област, която не съдържа нулата, то съгласно теорема 22.2, в областта D може да се определи еднозначен клон $\log z$ на многозначната функция $\ln z$, който по формулата (22.11) поражда еднозначен клон на степенната функция, $z^\alpha = e^{\alpha\log z}$. Например в областта $D = \mathbb{C}\setminus(-\infty,0]$, което представлява цялата комплексна равнина, разрязана по отрицателната полуос (рис. 22.3), има еднозначен аналитичен клон на логаритъма

$$\log z = \ln|z| + i\arg z\,,\ -\pi < \arg z < \pi\,,$$

който поражда еднозначен аналитичен клон за степенната функция

$$z^{\alpha}=e^{\alpha[\ln|z|+i\arg z]}=e^{\alpha\ln|z|+i\alpha\arg z}=\ln|z|^{\alpha}e^{i\alpha\arg z},\ -\pi<\arg z<\pi .$$

Ако $\alpha=\dfrac{1}{2}$, то в указаната област D получаваме следния еднозначен аналитичен клон на функцията $f(z)=\sqrt{z}$,

$$\sqrt{z}=\ln\sqrt{|z|}e^{i\frac{\arg z}{2}},\ -\pi<\arg z<\pi .$$

По същия начин, ако $D=\mathbb{C}\setminus[0,\infty)$ е областта, представляваща цялата комплексна равнина, разрязана по положителната полуос (рис. 22.4), функцията $f(z)=\sqrt{z}$ има еднозначен аналитичен клон

$$\sqrt{z}=\ln\sqrt{|z|}e^{i\frac{\arg z}{2}},\ 0<\arg z<2\pi .$$

И в двата случая определената функция $\sqrt{z}$ е непрекъсната както по горния, така и по долния бряг на разреза във всички реални числа, които са различни от нула.

Ако $z^{\alpha}=e^{\alpha\log z}$ е еднозначен аналитичен клон на степенната функция, породен от такъв клон $\log z$ на логаритмичната функция, то (следвайки верижното правило з диференциране) за производната намираме

$$\left(z^{\alpha}\right)'=\left(e^{\alpha\log z}\right)'=e^{\alpha\log z}(\alpha\log z)'=e^{\alpha\log z}\alpha\frac{1}{z}=\alpha z^{\alpha}\frac{1}{z}=\alpha z^{\alpha-1},$$

което представлява познатата от реалния анализ формула за диференциране на степенна функция.

4. Логаритмичен индикатор. Теорема на Руше. Нека функцията $f(z)$ е аналитична в областта D и нека $f(z)\neq 0$ за $z\in D$. Тогава функцията $\psi(z)=\dfrac{f'(z)}{f(z)}$ също е аналитична в D и понеже

$$\frac{f'(z)}{f(z)}=\frac{d}{dz}[\log f(z)]$$

когато съществува еднозначен клон на логаритъма $\log f(z)$, то функцията $\psi(z)$ се нарича ***логаритмична производна*** на $f(z)$. Нека z_0 е нула от кратност m за $f(z)$. Тогава в някоя пробита околност на z_0 е в сила

$$f(z)=(z-z_0)^m\phi(z),\phi(z_0)\neq 0,$$

следователно

$$\frac{f'(z)}{f(z)}=\frac{m}{z-z_0}+\frac{\phi'(z)}{\phi(z)},$$

където функцията $\dfrac{\phi'(z)}{\phi(z)}$ е аналитична в z_0, откъдето за резидуума на $\psi(z)$ в полюса z_0 получаваме

(22.13) $\operatorname*{res}\limits_{z=z_0}\dfrac{f'(z)}{f(z)}=m$.

Нека сега z_0 е полюс от кратност p. Тогава в някоя пробита околност на z_0 е в сила

$$f(z)=(z-z_0)^{-p}\phi(z),\phi(z_0)\neq 0$$

следователно

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{-p}{z-z_0} + \frac{\phi'(z)}{\phi(z)},$$

където функцията $\dfrac{\phi'(z)}{\phi(z)}$ е аналитична в z_0, откъдето за резидуума на $\psi(z)$ в полюса z_0 получаваме

(22.14) $\operatorname*{res}_{z=z_0} \dfrac{f'(z)}{f(z)} = -p$.

От горните формули, чрез теоремата за резидуумите непосредствено се получава верността на следната теорема.

Теорема 22.4. Нека функцията $f(z)$ е аналитична в едносвързаната област D с изключение на краен брой полюси. Нека освен това γ е положително ориентираната частично гладка жорданова крива, която не минава през нулите и полюсите на функцията $f(z)$. Тогава е в сила формулата

(22.15) $\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_\gamma \dfrac{f'(z)}{f(z)}dz = N - P$,

където N е броят на нулите на $f(z)$, а P е броят на полюсите на $f(z)$, които нули и полюси лежат във вътрешността на γ, отчетени с тяхната кратност. ■

В частност ако $f(z)$ е аналитична в D, то формулата (22.15) приема вида

(22.16) $\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_\gamma \dfrac{f'(z)}{f(z)}dz = N$,

където N е броят на нулите на $f(z)$, които лежат във вътрешността на γ, отчетени с тяхната кратност.

Нека γ е частично гладка крива с начало в точката $z=a$ и край в точката $z=b$, и нека $f(z)$ е аналитична в някаква област D, която съдържа кривата γ, при което $f(z) \neq 0$, за всяко $z \in \gamma$. Тогава върху кривата γ можем да изберем достатъчно много на брой точки, $a = z_0$, z_1, z_2, ..., z_{n-1}, $z_n = b$, всеки две съседни от които са разположени достатъчно близо една от друга така, че участъкът γ_k от кривата γ, с начало в точката z_{k-1} и с край в точката z_k да може да се покрие с някаква едносвързана област D_k (рис. 22.5), която принадлежи на D, $k = 1,2,\ldots,n$, при което областите D_k, $k = 1,2,\ldots,n$, са толкова "малки", че техните образи $G_k = f(D_k)$ да не съдържат нулата.

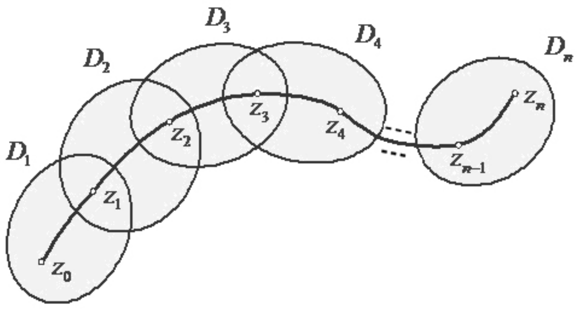

Рис. 22.5.

Съгласно една обща теорема, образите $G_k = f(D_k)$ също представляват едносвързани области, следователно, съгласно теорема 22.2, във всяка област G_k, $k = 1,2,\ldots,n$, може да се определи еднозначен аналитичен клон на логаритъма $\log z$. Това показва, че функцията $\varphi(z)=\log f(z)$ е аналитична в D_k, $k=1,2,\ldots,n$, при което от верижното правило имаме

$$\varphi'(z)=(\log f(z))'=\frac{f'(z)}{f(z)}.$$

По този начин за интеграла от (22.15-26)

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_k}\frac{f'(z)}{f(z)}dz,$$

взет обаче само по участъка γ_k, $k=1,2,\ldots,n$, от кривата γ е приложима теоремата на Лаййбниц-Нютон, според която

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_k}\frac{f'(z)}{f(z)}dz=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_k}\varphi'(z)dz=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_k}d\varphi(z)=\frac{1}{2\pi i}[\varphi(z_k)-\varphi(z_{k-1})],$$

което въз основа определението на функцията $\varphi(z)$ приема вида

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_k}\frac{f'(z)}{f(z)}dz=\frac{1}{2\pi i}[\log f(z_k)-\log f(z_{k-1})],\ k=1,2,\ldots,n,$$

което пък от своя страна на основание твърдение 22.3 може да се запише

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_k}\frac{f'(z)}{f(z)}dz=\frac{1}{2\pi i}\left[\ln|f(z_k)|-\ln|f(z_{k-1})|+i\Delta_{\gamma_k}\arg f(z)\right],\ k=1,2,\ldots,n.$$

Сумирайки горните равенства по индекса k, $k=1,2,\ldots,n$, и отчитайки адитивното свойство на интеграла и адитивното свойство на промяната на аргумента, след очевидно съкращаване получаваме

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f'(z)}{f(z)}dz=\frac{1}{2\pi i}\left[\ln|f(b)|-\ln|f(a)|+i\Delta_{\gamma}\arg f(z)\right],$$

където $\Delta_\gamma \arg f(z)$ е непрекъснатото нарастване на аргумента на функцията $f(z)$ по направление на кривата γ.

Когато кривата γ е затворена, $a\equiv b$, последното приема вида

(22.17) $$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f'(z)}{f(z)}dz=\frac{\Delta_\gamma \arg f(z)}{2\pi}.$$

По този начин сме готови да докажем

Теорема 22.5 *(принцип за аргумента)*. Нека функцията $f(z)$ е аналитична в едносвързаната област D, γ е положително ориентираната частично гладка жорданова крива, която не минава през нулите на функцията $f(z)$. Тогава е в сила формулата

$$\frac{\Delta_\gamma \arg f(z)}{2\pi}=N,$$

където N е броят на нулите на $f(z)$ от вътрешността на γ, отчетени с тяхната кратност, а $\Delta_\gamma \arg f(z)$ е непрекъснатото нарастване на аргумента на функцията $f(z)$, по кривата γ, обходена в положителна посока.

Доказателство. Следва веднага от формулите (22.16) и (22.17). ■

Следва теоремата на Руше.

Теорема 22.6 *(Руше)*. Нека функциите $f(z)$ и $g(z)$ са аналитични в затворената вътрешност на частично гладката жорданова крива Γ. Нека освен това

$$|f(z)|<|g(z)|,$$

за всяко $z \in \Gamma$. Тогава функцията $f(z)+g(z)$ има точно толкова нули във вътрешността на Γ, колкото има функцията $f(z)$.

Доказателство. Първо да отбележим, че според условието на теоремата функциите $f(z)$ и $f(z)+g(z)$ не се анулират никъде по кривата Γ. Да положим

$$N_f = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f'(z)}{f(z)}dz \text{ и } N_{f+g} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f'(z)+g'(z)}{f(z)+g(z)}dz$$

и освен това нека

$$J(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f'(z)+tg'(z)}{f(z)+tg(z)}dz,\ 0 \le t \le 1.$$

Функцията $J(t)$ приема само целочислени значения и е непрекъсната, следователно е константа, откъдето получаваме нужното равенство

$$N_f = J(0) = J(1) = N_{f+g}. \blacksquare$$

От теоремата на Руше се получава елегантно доказателство на факта, че всеки полином с комплексни коефициенти

$$P(z) = a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0,\ a_n \ne 0,$$

има точно n на брой нули в комплексната равнина, отчетени с тяхната кратност. Наистина, след като положим $f(z) = a_n z^n$ и $g(z) = a_{n-1}z^{n-1} + \cdots a_1 z + a_0$, а в качеството на Γ разгледаме някаква окръжност с център в нулата и достатъчно голям радиус, получаваме доказателство на нужното твърдение.

Тук ще дадем друго доказателство на принципа за аргумента.

Твърдение 22.4. Нека функцията $f(z)$ е аналитична и не приема стойност нула в едносвързаната област D. Тогава в може да се отдели еднозначен клон $\log f(z)$ на логаритмичната функция.

Доказателство. Функцията $f'(z)/f(z)$ е аналитична в D и следователно (съгласно теоремата за съществуване на примитивна) функцията

$$F(z) = \int_{z_0}^{z}\frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)}d\zeta$$

е аналитична в D, при което $F'(z) = f(z)$. Имаме

$$\frac{d}{dz}\left[e^{-F(z)}f(z)\right] = e^{-F(z)}\left[-\frac{f'(z)}{f(z)}f(z) + f'(z)\right] = 0$$

откъдето заключаваме, че $f(z)e^{-F(z)} = C = Const$, съответно

$$e^{F(z)+C_1} = f(z) \text{ или } F(z) + C_1 = \log f(z). \blacksquare$$

Нека функцията $f(z)$ е аналитична и различна от нула в някаква област, а γ е затворена крива от областта. Тогава, от горното твърдение и от вида на логаритмичната функция произтича верността на формулата

$$(2)\qquad \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f'(z)}{f(z)}dz = \frac{\Delta_\gamma \arg f(z)}{2\pi},$$

където $\Delta_\gamma \arg f(z)$ означава пълното изменение на аргумента на $f(z)$, когато z обхожда кривата γ (в положително направление). Обединявайки формулите (1) и (2) получаваме следната теорема.

Теорема 22.7 ***(принцип за аргумента)***. Нека са изпълнени предположенията на теорема 14.1. Тогава

$$N-P=\frac{\Delta_\gamma \arg f(z)}{2\pi}.\ \blacksquare$$

Да припомним, че една функция се нарича еднолистна в дадена област, когато за различни аргументи приема различни стойности.

В сила е следният ***критерий за еднолистност***. Нека е γ жорданова крива и нека функцията $f(z)$ е аналитична във вътрешността на γ и по γ. Да предположим, че $f(z)$ изобразява взаимно еднозначно кривата γ в кривата Γ ($f(\gamma)=\Gamma$). Тогава $f(z)$ изобразява вътрешността на γ във вътрешността на Γ, при което $f(z)$ е еднолистна.