

Лекция 24

§24. Преобразование на Фурие

1. Определения и основни теореми. В този раздел ще се съсредоточим на теоретичните конструкции, свързани с преобразованието на Фурие, като привеждането на различни примери ще оставим за по-нататък. Нека $f(x)$ е реална или комплексна функция, определена за всяко $x \in \mathbb{R}$. Казва се, че $f(x)$ принадлежи на класа $L^p(\mathbb{R})$, $1 \leq p < \infty$, когато

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^p dx < \infty,$$

т.е. когато несобственият интеграл е сходящ. Числото

$$\|f\|_p = \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

се нарича p -та норма на $f(x)$. Например

$$\|f\|_1 = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx \text{ и } \|f\|_2 = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx}.$$

При $p=1$ функцията $f(x)$ се нарича **сумируема**, а при $p=2$ функцията $f(x)$ се нарича със **сумируем квадрат**.

Преобразование на Фурие (Fourier Transform) на функцията $f(x) \in L^1(\mathbb{R})$ се нарича несобственият интеграл

$$(24.1) \quad F(\xi) = \mathbf{F}\{f\}(\xi) = \hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\xi x} dx,$$

разглеждан като функция на реалната променлива ξ , която се явява параметър под знака на интеграла. Функцията $F(\xi)$ се нарича Фурие **образ** на **оригинала** $f(x)$. **Обратно преобразование на Фурие (Inverse Fourier Transform)** за функцията $F(\xi)$, определена за $\xi \in \mathbb{R}$, се определя посредством границата

$$(24.2) \quad f(x) = \mathbf{F}^{-1}\{F\}(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-N}^N F(\xi) e^{i\xi x} d\xi,$$

когато тази граница съществува. Интегралът в дясната страна на (24.2) се бележи още с

$$v.p. \int_{-\infty}^{\infty} F(\xi) e^{i\xi x} d\xi \text{ (главно значение на } \int_{-\infty}^{\infty} F(\xi) e^{i\xi x} d\xi \text{)}.$$

Разсъждавайки както при доказателството на теоремата на Дирихле (теорема 11.3) за поточковата сходимост на редовете на Фурие, може да се докаже верността на следната теорема за възстановяване, която представлява аналог на теоремата на Дирихле.

Теорема 24.1. Нека функцията $f(x) \in L^1(\mathbb{R})$ е гладка по части във всеки краен интервал. Тогава обратното преобразование на Фурие, приложено върху Фурие образа на $f(x)$ възстановява функцията $f(x)$ в следния смисъл

$$\mathbf{F}^{-1}\{\mathbf{F}\{f\}\}(x) = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2},$$

т.е.

$$(24.3) \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-N}^N \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\xi t} dt \right) e^{i\xi x} d\xi = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}.$$

Доказателство. Отначало ще покажем равенството

$$(24.4) \quad \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin Nt}{t} dt = 1,$$

за всяко $N > 0$. Имаме

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin Nt}{t} dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin Nt}{Nt} dNt,$$

откъдето след смяна на променливата $Nt = u$ получаваме

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin Nt}{t} dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin u}{u} du = \frac{1}{\pi} \pi = 1.$$

Тук използвахме вече пресметнатия интеграл на Ойлер (21.25)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin u}{u} du = \pi.$$

В частност е изпълнено

$$(24.5) \quad \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin Nt}{t} dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin Nt}{t} dt = 1.$$

След смяна реда на интегриране намираме

$$(24.6) \quad \frac{1}{2\pi} \int_{-N}^N \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\xi t} dt \right) e^{i\xi x} d\xi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \left(\int_{-N}^N e^{i\xi(x-t)} d\xi \right) dt.$$

Непосредствено пресмятаме

$$\int_{-N}^N e^{i\xi(x-t)} d\xi = \frac{e^{iN(x-t)} - e^{-iN(x-t)}}{i(x-t)} = 2 \sin N(x-t).$$

Сега след заместване в (24.6) получаваме

$$(24.7) \quad \frac{1}{2\pi} \int_{-N}^N \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\xi t} dt \right) e^{i\xi x} d\xi = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \frac{\sin N(x-t)}{x-t} dt.$$

След смяна на променливата $t - x = u$ последното се свежда до

$$(24.8) \quad \frac{1}{2\pi} \int_{-N}^N \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\xi t} dt \right) e^{i\xi x} d\xi = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x+\tau) \frac{\sin N\tau}{\tau} d\tau = \\ \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^0 f(x+\tau) \frac{\sin N\tau}{\tau} d\tau + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} f(x+\tau) \frac{\sin N\tau}{\tau} d\tau$$

В първия интеграл отъясно на (24.8) извършваме смяната $\tau = -t$,

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^0 f(x+\tau) \frac{\sin N\tau}{\tau} d\tau = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} f(x-t) \frac{\sin Nt}{t} dt$$

а във втория полагаме $\tau = t$, след което намираме

$$(24.9) \quad \frac{1}{2\pi} \int_{-N}^N \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\xi t} dt \right) e^{i\xi x} d\xi = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} [f(x+t) + f(x-t)] \frac{\sin Nt}{t} dt.$$

Сега въз основа на (24.5) можем да запишем

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} [f(x+0)+f(x-0)] \frac{\sin Nt}{t} dt,$$

което след почленно изваждане от (24.9) дава

$$(24.10) \quad \frac{1}{2\pi} \int_{-N}^N \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\xi t} dt \right) e^{i\xi x} d\xi - \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2} = \\ = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{f(x+t)+f(x-t)-f(x+0)-f(x-0)}{t} \sin Nt dt$$

Условията на теоремата гарантират, че функцията

$$\varphi(t) = \frac{f(x+t)+f(x-t)-f(x+0)-f(x-0)}{t}$$

е непрекъсната за $t = 0$, следователно несобственият интеграл

$$\int_0^{\infty} |\varphi(t)| dt < \infty$$

е сходящ. Сега прилагайки теоремата на Риман-Лебег (теорема 11.1) получаваме

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{f(x+t)+f(x-t)-f(x+0)-f(x-0)}{t} \sin Nt dt = 0,$$

което заедно с (24.10) дава доказателството на теорема 24.1

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-N}^N \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\xi t} dt \right) e^{i\xi x} d\xi = \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}. \blacksquare$$

От теорема 24.1 веднага следва верността на следното твърдение.

Твърдение 24.1. Нека функцията $f(x)$ е от класа $L^1(\mathbb{R})$ и е гладка по части и непрекъсната. Тогава $\mathbf{F}^{-1}\{\mathbf{F}\{f\}\}(x) \equiv f(x)$. ■

Формулите (24.4) и (24.8) позволяват да се определи **ядро на Дирихле**

$$D_N(t) = \frac{\sin Nt}{\pi t},$$

а преобразованието $\mathbf{F}^{-1}\{\mathbf{F}\{f\}\}(x)$ да се разгледа като усредняване стойностите на $f(x)$ посредством ядрото на Дирихле,

$$\mathbf{F}^{-1}\{\mathbf{F}\{f\}\}(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t) D_N(t) dt.$$

Конволюция $f * g(x)$ на двете функции $f(x)$ и $g(x)$ от класа $L^1(\mathbb{R})$ се нарича интегралът

$$(24.11) \quad f * g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t) g(t) dt.$$

Конволюцията е линейна и по двата си множителя и освен това е симетрична и асоциативна, т.е.

$$f * g(x) = g * f(x) \text{ и } (f * g) * h(x) = f * (g * h)(x).$$

Най-важното свойство на конволюцията е свързано с преобразованието на Фурие.

Твърдение 24.2. Преобразованието на Фурие на конволюция е равно на произведението от Фурие преобразованията на двата множителя, т.е.

$$(24.12) \quad \mathbf{F}\{f * g\}(\xi) = \mathbf{F}\{f\}(\xi) \mathbf{F}\{g\}(\xi).$$

Доказателство. Имаме

$$\mathbf{F}\{f * g\}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)g(t)dt \right) e^{-i\xi x} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)g(t)e^{-i\xi t} e^{-i\xi(x-t)} dt dx,$$

от което след смяна реда на интегриране получаваме

$$(24.13) \mathbf{F}\{f * g\}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-i\xi t} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)e^{-i\xi(x-t)} dx \right) dt.$$

Във вътрешния интеграл сменяме променливата $x-t = y$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)e^{-i\xi(x-t)} dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{-i\xi y} dy = \mathbf{F}\{f\}(\xi).$$

Сега заместваме в (24.13) и получаваме верността на (24.12).

$$\mathbf{F}\{f * g\}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-i\xi t} \mathbf{F}\{f\}(\xi) dt = \mathbf{F}\{f\}(\xi) \int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-i\xi t} dt = \mathbf{F}\{f\}(\xi) \mathbf{F}\{g\}(\xi). \blacksquare$$

Нека функцията $f(x)$ е от класа $L^2(\mathbf{R})$. Тогава нейното преобразование на Фурие се определя чрез главната стойност на интеграла

$$F(\xi) = v.p. \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\xi x} dx,$$

при което Фурие образът $F(\xi)$ също е функция от класа $L^2(\mathbf{R})$. За всяка функция $f(x)$ от класа $L^2(\mathbf{R})$ са в сила формули за възстановяване $\mathbf{F}^{-1}\{\mathbf{F}\{f\}\}(x) = f(x)$ и $\mathbf{F}\{\mathbf{F}^{-1}\{f\}\}(\xi) = f(\xi)$, при което равенството се разбира като равенство на функции от класа $L^2(\mathbf{R})$.

Може да се докаже верността на следната теорема.

Теорема 24.2 (Парсевал). Нека $f(x)$ и $g(x)$ са от класа $L^2(\mathbf{R})$ и нека $F(\xi) = \mathbf{F}\{f\}(\xi)$ и $G(\xi) = \mathbf{F}\{g\}(\xi)$. Тогава е изпълнено равенството

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{g(x)} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\xi)\overline{G(\xi)} d\xi.$$

В частност, когато $f(x) \equiv g(x)$ имаме

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\xi)|^2 d\xi. \blacksquare$$

Нека $f(n)$, $n \in \mathbf{Z}$, е редица от класа l^2 , т.е.

$$\sum_{-\infty}^{\infty} |f(n)|^2 < \infty.$$

Тогава преобразованието на Фурие за редицата се дава по формулата

$$F(\xi) = \sum_{-\infty}^{\infty} f(n)e^{-i\xi n},$$

а обратното преобразование лесно се проверява, че има вида

$$f(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(\xi)e^{i\xi n} d\xi, \quad n \in \mathbf{Z}.$$

Това преобразование се нарича **преобразование на Фурие в дискретно време (Discrete-Time Fourier Transform)**.

Косинус и синус преобразованиа. Нека функцията $f(x)$ е определена за $x \geq 0$. Тогава можем да продължим $f(x)$ като четна полагайки $f(x) = f(-x)$ за $x < 0$. Така определената функция ще означаваме с $f_{\text{even}}(x)$.

За Фурие образа на $f_{\text{even}}(x)$ имаме

$$\mathbf{F}\{f_{\text{even}}\}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\text{even}}(x)e^{-i\xi x} dx = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\text{even}}(x)[\cos \xi x - i \sin \xi x] dx,$$

$$\mathbf{F}\{f_{\text{even}}\}(\xi) = 2 \int_0^{\infty} f(x) \cos \xi x dx.$$

Тук сме използвали факта, че интеграл от нечетна функция в симетричен интервал е равен на нула, а интеграл от четна е равен на два пъти интеграла в половината интервал. Последното дава основание да въведем **косинус преобразование (Fourier Cosine Transform)** за функцията $f(x)$

$$\mathbf{C}\{f\}(\xi) = \int_0^{\infty} f(x) \cos \xi x dx,$$

което преобразование се явява четна функция на ξ . За обратното преобразование на $\mathbf{F}\{f_{\text{even}}\}(\xi)$ имаме

$$f(x) = \mathbf{F}^{-1}\{\mathbf{F}\{f_{\text{even}}\}\}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{F}\{f_{\text{even}}\}(\xi) e^{i\xi x} d\xi = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{C}\{f\}(\xi) e^{i\xi x} d\xi,$$

което по съображения за четност се свежда до

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{C}\{f\}(\xi) \cos \xi x d\xi,$$

като по този начин дефинира **обратното косинус преобразование**

$$\mathbf{C}^{-1}\{f\}(x) = \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \cos \xi x d\xi.$$

Двете преобразования, приложени последователно възстановяват функцията, към която е приложено първото. За всяка функция $f(x)$, за която

$$\int_0^{\infty} |f(x)|^2 dx < \infty,$$

е изпълнено $\mathbf{C}^{-1}\{\mathbf{C}\{f\}\}(x) = f(x)$ и $\mathbf{C}\{\mathbf{C}^{-1}\{f\}\}(\xi) = f(\xi)$.

По аналогичен начин се определя **синус преобразование (Fourier Sine Transform)** за функцията $f(x)$, определена при $x \geq 0$,

$$\mathbf{S}\{f\}(\xi) = \int_0^{\infty} f(x) \sin \xi x dx,$$

и неговото обратно

$$\mathbf{S}^{-1}\{f\}(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f(\xi) \sin \xi x d\xi,$$

при което $\mathbf{S}^{-1}\{\mathbf{S}\{f\}\}(x) = f(x)$ и $\mathbf{S}\{\mathbf{S}^{-1}\{f\}\}(\xi) = f(\xi)$. Тук се използва нечетно продължение $f_{\text{odd}}(x)$ на $f(x)$, полагайки $f(x) = -f(-x)$ за $x < 0$.

Симетрична форма на запис. В някои учебници множителите пред обратните преобразования се разпределят между правото и обратното преобразование, като по

този начин формулите придобиват симетричен вид. Симетричният запис на преобразованието на Фурие има вида

$$\mathbf{F}\{f\}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\xi x} dx, \quad \mathbf{F}^{-1}\{f\}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)e^{i\xi x} d\xi.$$

За косинус и синус преобразованието симетричните форми имат вида

$$\mathbf{C}\{f\}(\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(x)\cos \xi x dx, \quad \mathbf{C}^{-1}\{f\}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(\xi)\cos \xi x d\xi,$$

и

$$\mathbf{S}\{f\}(\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(x)\sin \xi x dx, \quad \mathbf{S}^{-1}\{f\}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(\xi)\sin \xi x d\xi.$$

В този вид обратното и правото косинус преобразоване имат идентичен вид, като същото важи и за обратното и право синус преобразоване.

Тук навсякъде ще се придържаме към несиметричния вид на формулите, които представихме преди.

2. Основни свойства и примери. По-нататък с оглед на приложенията ще преминем към други означения. Функциите оригинали ще наричаме **сигнали** и означаваме например с $s(t)$ понеже тези функции в теорията на обработка на сигналите (**signal processing**), където е основното приложение на теорията, представляват сигнали – числови функции на времето t . Преобразованието и обратното преобразоване на Фурие ще означаваме още по следния начин

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)e^{-j\omega t} dt \quad \text{и} \quad s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega)e^{j\omega t} d\omega.$$

Тук вместо стандартното за математиката означение i за имагинерната единица ще използваме възприетото в инженерната литература означение j . Променливата ω се нарича още **кръгова честота**. В теорията на сигналите е прието преобразованието на Фурие $S(\omega)$ на сигнала $s(t)$ да се нарича още **спектрална функция** на сигнала.

Модулът $A(\omega) = |S(\omega)|$ на $S(\omega)$ се нарича **амплитуден спектър**, а нейният аргумент $\varphi_s(\omega)$ се нарича **фазов спектър**.

Ако сигналът е реална функция, то амплитудният спектър е четна функция, а фазовият спектър е нечетна функция,

$$|S(\omega)| = |S(-\omega)| \quad \text{и} \quad \varphi_s(\omega) = -\varphi_s(-\omega).$$

Най-важното свойство на преобразованието на Фурие беше изложено в твърдение 24.1, което ще повторим тук за пълнота на изложението.

Образ на конволюция. Ако

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt, \quad G(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-j\omega t} dt \quad \text{и} \quad s(t) = f * g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau)g(\tau)d\tau,$$

то $S(\omega) = F(\omega)G(\omega)$.

Линейност. Преобразованието на Фурие е линейно поради линейното свойство на интеграла.

Отместване във времето. Ако $F(\omega) = \mathbf{F}\{f\}(\omega)$ и $s(t) = f(t-\tau)$, то

$$S(\omega) = \mathbf{F}\{s\}(\omega) = F(\omega)e^{-j\omega\tau}.$$

Тук τ е някакво постоянно отместване във времето за сигнала $f(t)$.

Смяна мащаба на времето. Нека $a \neq 0$ и $F(\omega) = \mathbf{F}\{f\}(\omega)$. Тогава за сигнала $s(t) = f(at)$ имаме

$$S(\omega) = \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\omega}{a}\right).$$

Диференциране на сигнала. Ако $F(\omega) = \mathbf{F}\{f\}(\omega)$ и $s(t) = f^{(n)}(t)$, $n = 0, 1, 2, \dots$, то $S(\omega) = (j\omega)^n F(\omega)$.

Произведение на сигнали. Нека $F(\omega) = \mathbf{F}\{f\}(\omega)$, $G(\omega) = \mathbf{F}\{g\}(\omega)$ и $s(t) = f(t)g(t)$. Тогава Фурие образа на произведението $s(t)$ се изразява посредством образите на двата множителя

$$S(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega - \zeta) G(\zeta) d\zeta.$$

Умножение с експонента. Нека $F(\omega) = \mathbf{F}\{f\}(\omega)$ и $s(t) = f(t)e^{j\omega_0 t}$. Тогава $S(\omega) = F(\omega - \omega_0)$.

Пример 24.1. Да разгледаме правоъгълен импулс с ширина $\tau > 0$, височина $A > 0$, и център в началото (Рис. 24.1)

$$s(t) = \begin{cases} A & \text{за } -\frac{\tau}{2} \leq t \leq \frac{\tau}{2} \\ 0 & \text{за } |t| > \frac{\tau}{2} \end{cases}$$

Тогава

$$S(\omega) = \int_{-\tau/2}^{\tau/2} A e^{-j\omega t} dt = \frac{2A}{\omega} \sin \frac{\omega\tau}{2} = A\tau \frac{\sin \frac{\omega\tau}{2}}{\frac{\omega\tau}{2}}.$$

Амплитудният спектър $|S(\omega)|$ е изобразен на Рис. 24.2.

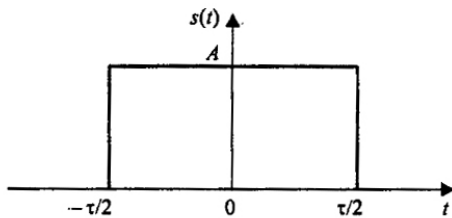


Рис. 24.1.

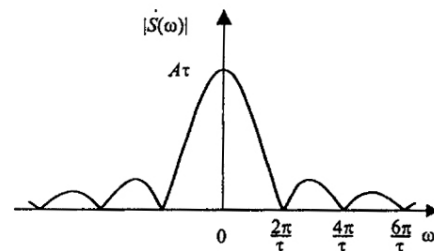


Рис. 24.2.

Честотният спектър $\varphi_s(\omega)$ е изобразен на Рис. 24.3.

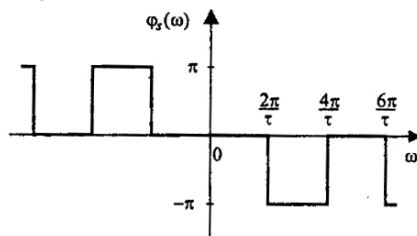


Рис. 24.3.

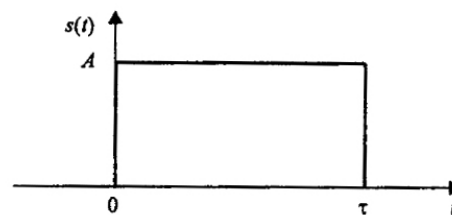


Рис. 24.4.

Пример 24.2. Да разгледаме отново правоъгълен импулс с ширина $\tau > 0$ но вече с ляв край в началото (Рис. 24.4)

$$s(t) = \begin{cases} A & \text{за } 0 \leq t \leq \tau \\ 0 & \text{за } t < 0 \text{ и } t > \tau \end{cases}$$

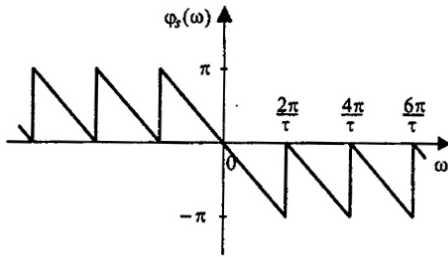


Рис. 24.5.

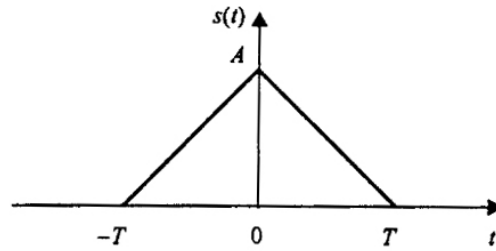


Рис. 24.6.

Тогава

$$S(\omega) = \int_0^{\tau} A e^{-j\omega t} dt = \frac{A}{j\omega} (1 - e^{-j\omega\tau}) = \frac{2A}{\omega} \sin \frac{\omega\tau}{2} e^{-j\frac{\omega\tau}{2}} = A\tau \frac{\sin \frac{\omega\tau}{2}}{\frac{\omega\tau}{2}} e^{-j\frac{\omega\tau}{2}}$$

Тук амплитудният спектър $|S(\omega)|$ е съпада с този от Рис. 24.2, а фазовият спектър е изобразен на Рис. 24.5.

Пример 24.3. Да разгледаме симетричен триъгълен импулс (Рис. 24.6)

$$s(t) = \begin{cases} A \left(1 - \frac{|t|}{T}\right) & \text{за } |t| \leq T \\ 0 & \text{за } |t| > T \end{cases}$$

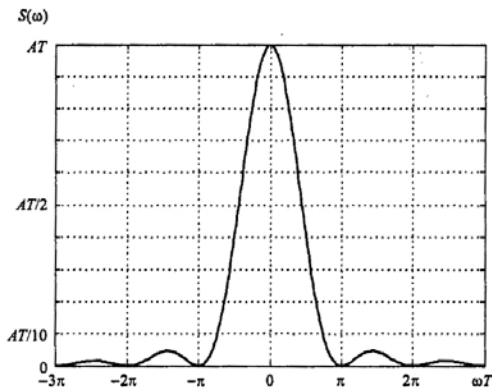


Рис. 24.7.

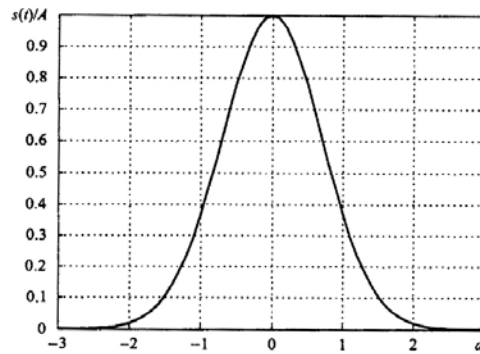


Рис. 24.8.

Тук $A > 0$ и $T > 0$. Тогава

$$S(\omega) = 2 \int_0^T A \left(1 - \frac{t}{T}\right) \cos \omega t dt = AT \frac{\sin^2 \frac{\omega T}{2}}{\left(\frac{\omega T}{2}\right)^2}$$

Тук спектралната функция $S(\omega)$ е реална следователно $\phi_s(\omega) \equiv 0$. Честотният спектър е показан на Рис. 24.7.

Пример 24.4. Да разгледаме гаусов импулс (Рис. 24.8)

$$s(t) = A e^{-a^2 t^2}, \quad a > 0.$$

Тогава

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} A e^{-a^2 t^2} e^{-j\omega t} dt = \frac{A\sqrt{\pi}}{a} e^{-\frac{\omega^2}{4a^2}}.$$

И тук спектралната функция $S(\omega)$ е реална следователно $\varphi_s(\omega) \equiv 0$. Честотният спектър е показан на Рис. 24.9.

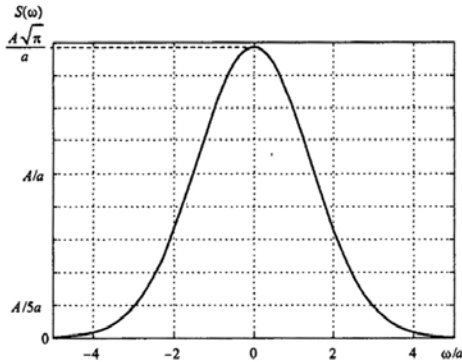


Рис. 24.9.

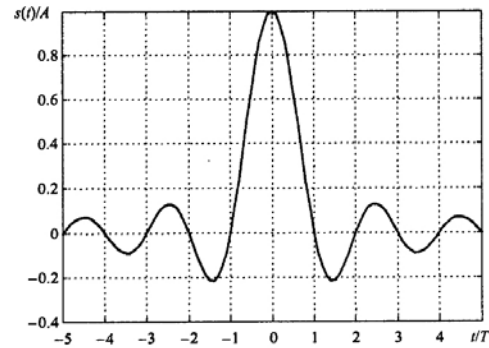


Рис. 24.10.

Следващият пример демонстрира дуалността на преобразованието на Фурие.

Пример 24.5. Да разгледаме сигнала (Рис. 24.10)

$$s(t) = A \frac{\sin \frac{\pi t}{T}}{\frac{\pi t}{T}}, \quad T > 0.$$

Тогава

$$\begin{aligned} S(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} A \frac{\sin \frac{\pi t}{T}}{\frac{\pi t}{T}} e^{-j\omega t} dt = A \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \frac{\pi t}{T} \cos \omega t}{\frac{\pi t}{T}} dt, \\ S(\omega) &= \frac{AT}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin\left(\omega + \frac{\pi}{T}\right)t + \sin\left(\omega - \frac{\pi}{T}\right)t}{t} dt, \\ S(\omega) &= \frac{AT}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin\left(\omega + \frac{\pi}{T}\right)t}{t} dt + \frac{AT}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin\left(\omega - \frac{\pi}{T}\right)t}{t} dt. \end{aligned}$$

От друга страна вече знаем, че

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin Nt}{t} dt = \begin{cases} \pi & \text{за } N > 0 \\ -\pi & \text{за } N < 0 \end{cases}$$

следователно за спектралната функция имаме

$$S(\omega) = \begin{cases} AT & \text{за } |\omega| \leq \frac{\pi}{T} \\ 0 & \text{за } |\omega| > \frac{\pi}{T} \end{cases}$$

Тук за честотния спектър имаме $\varphi_s(\omega) \equiv 0$. Амплитудният спектър има правоъгълен вид и е показан на Рис. 24.11.

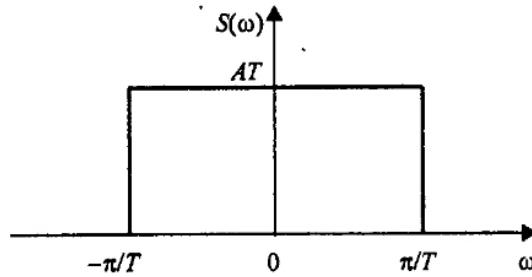


Рис. 24.11.

3. Преобразуване на специални сигнали. Да се върнем към пример 24.1 и да разгледаме редица от правоъгълни сигнали

$$s_{\tau}(t) = \begin{cases} \frac{1}{\tau} & \text{за } -\frac{\tau}{2} \leq t \leq \frac{\tau}{2} \\ 0 & \text{за } |t| > \frac{\tau}{2} \end{cases}$$

с център в нулата и лице единица ($A\tau = 1$). При $\tau \rightarrow 0$ тези сигнали преминават в единичен импулс с нулева основа и безкрайна височина, който в математиката се нарича делта функция $\delta(t)$. Тази делта функция не е функция в обикновен смисъл и представлява частен случай на така наречените обобщени функции. Работата с обобщени функции предоставя значителни удобства при интегралните трансформации на Фурие и Лаплас. Съгласно пример 24.1 за спектралната функция на $s_{\tau}(\omega)$ имаме

$$S_{\tau}(\omega) = \frac{\sin \frac{\omega\tau}{2}}{\frac{\omega\tau}{2}},$$

откъдето намираме

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} S_{\tau}(\omega) = 1.$$

Последното заедно с факта, че $s_{\tau}(t) \rightarrow \delta(t)$ при $\tau \rightarrow 0$ ни дава основание да определим спектралната функция на $\delta(t)$ равна навсякъде на единица, $\mathbf{F}\{\delta\}(\omega) \equiv 1$. Понякога се използват записи като

$$\int_{-\infty}^{\infty} s(t)\delta(t-\tau)dt = s(\tau), \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)e^{-j\omega t} dt = 1, \quad \delta(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} d\omega,$$

което са "формално верни" но конфликтни за традиционното определение на интеграла. В този раздел излагаме някои правила за работа с обобщени функции, при което подробните доказателства на тези резултати не се поместват в целите на настоящия текст.

Делта функцията има ролята на **единица** в конволюционното умножение

$$s * \delta(t) = \delta * s(t) = s(t),$$

което се съгласува с правилото за Фурие образ на конволюция,

$$\mathbf{F}\{\delta * s\}(\omega) = \mathbf{F}\{\delta\}(\omega)\mathbf{F}\{s\}(\omega) = \mathbf{F}\{s\}(\omega).$$

Графично делта функциите се представят посредством вертикални стрелки с височина, равна на множителя пред тях. На следващата рисунка е показана графиката на сигнала $s(t) = \delta(t) + 2\delta(t-1)$.

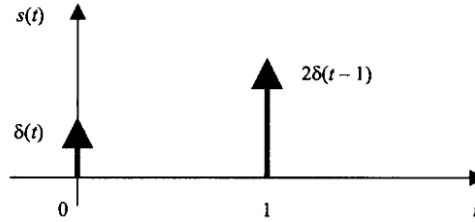


Рис. 24.12.

Образът на **функцията на Хевисайд** (единичен скок в нулата)

$$\eta(t) = \begin{cases} 1 & \text{за } t > 0 \\ 0 & \text{за } t < 0 \end{cases}$$

се дава по формулата

$$\mathbf{F}\{\eta\}(\omega) = \pi\delta(\omega) - j\frac{1}{\omega}.$$

Делта функцията се явява обобщена производна на функцията на Хевисайд и съответно функцията на Хевисайд се явява обобщена примитивна на делта функцията. В общия случай, ако $s(t)$ и $\sigma(t)$ са сигнали, за които $\sigma'(t) = s(t)$ и $S(\omega) = \mathbf{F}\{s\}(\omega)$, то за образа на $\sigma(t)$ е в сила формулата за **образ на примитивна**

$$\mathbf{F}\{\sigma\}(\omega) = \frac{S(\omega)}{j\omega} + \pi S(0)\delta(\omega).$$

Ако сигналът е **постоянен**, $s(t) = A = \text{const}$, то

$$S(\omega) = 2\pi A\delta(\omega).$$

Образ на експонента. Нека $s(t) = Ae^{j\omega_0 t}$. Сега от правилото за умножение с експонента получаваме

$$S(\omega) = 2\pi A\delta(\omega - \omega_0).$$

Образ на периодичен сигнал. Нека $s(t)$ е T -периодичен сигнал $T > 0$. Тогава $s(t)$ се представя в ред на Фурие

$$s(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_k e^{j\frac{2\pi k}{T}t}.$$

Прилагайки правилото за образ на експонента намираме

$$S(\omega) = \sum_{-\infty}^{\infty} 2\pi c_k \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{T}\right).$$

Последното показва, че спектърът на T -периодичен сигнал е зададен само в точките $\frac{2\pi k}{T}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Нека $s(t)$ е сигнал от класа $L^2(\mathbb{R})$. Такива сигнали се наричат още сигнали с **крайна енергия**. **Корелационната функция** на $s(t)$ се определя по формулата

$$B_s(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t + \tau)\overline{s(t)} dt.$$

Нейното значение за $\tau = 0$ е равно на **енергията на сигнала**.

Ако $s(t)$ е T -периодичен сигнал, то неговата корелационна функция се дава от

$$B_s(\tau) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t + \tau)\overline{s(t)} dt,$$

и неговата стойност за $\tau = 0$ представлява **средната мощност** на $s(t)$.

Взаимната корелационна функция на двата сигнала $s_1(t)$ и $s_2(t)$ се определя от формулата

$$B_{s_1 s_2}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} s_1(t + \tau) \overline{s_2(t)} dt.$$

3. Линейни стационарни системи. Под линейна стационарна система *LSIS* (**Linear Shift Invariant System**) се разбира преобразовател на входен сигнал $s_{in}(t)$ в изходен сигнал $s_{out}(t)$,

$$s_{out}(t) = LSIS\{s_{in}(t)\},$$

при което системата притежава познатото свойство линейност, чиито характеристики остават постоянни във времето. Понеже конволюцията е линейна и по двата си множителя, то за линейните стационарни системи е изпълнено

$$LSIS\{f * g(t)\} = LSIS\{f\} * g(t) = f * LSIS\{g\}(t).$$

Имаме $s_{in}(t) = s_{in} * \delta(t)$, следователно

$$s_{out}(t) = LSIS\{s_{in}(t)\} = LSIS\{s_{in} * \delta(t)\} = s_{in} * LSIS\{\delta\}(t),$$

което доказва верността на следното твърдение.

Твърдение 24.3. Нека *LSIS* е линейна стационарна система, а $h(t) = LSIS\{\delta(t)\}$ е обикновена или обобщена функция, представляваща отклика на системата на делта функцията $\delta(t)$. Тогава действието на системата се описва посредством конволюцията между входния сигнал $s_{in}(t)$ и **импулсната функция $h(t)$ (Impulse Response Function)**,

$$s_{out}(t) = h * s_{in}(t) = s_{in} * h(t). \blacksquare$$

Фурие образът $H(\omega)$ на $h(t)$ се нарича **предавателна функция (Transfer Function)** на системата.

От твърдение 24.3 следва, че Фурие образът на изходния сигнал се дава чрез умножение образ на входния сигнал с $H(\omega)$,

$$\mathbf{F}\{s_{out}\}(\omega) = H(\omega) \mathbf{F}\{s_{in}\}(\omega).$$

Идеален нискочестотен филтър (Ideal Low-Pass Filter). Така се нарича линейна стационарна система с предавателна функция ($\Omega > 0$)

$$H(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{за } -\Omega \leq \omega \leq \Omega \\ 0 & \text{за } |\omega| > \Omega \end{cases}$$

За отклика на единичния импулс имаме

$$h(t) = \mathbf{F}^{-1}(H)(t) = \frac{\sin \Omega t}{\pi t}.$$

Нека $s_{in}(t)$ е сигнал с Фурие образ $S_{in}(\omega)$. Тогава за образа на преобразувания сигнал $s_{out}(t)$ имаме

$$S_{out}(\omega) = H(\omega) S_{in}(\omega) = \begin{cases} S_{in}(\omega) & \text{за } |\omega| \leq \Omega \\ 0 & \text{за } |\omega| > \Omega \end{cases}$$

което означава, че системата отрязва честотите $|\omega| > \Omega$. Да разгледаме например пропускането на сигнала $s_{in}(t) = \sin \omega_0 t$, за който

$$S_{in}(\omega) = -j\pi[\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)].$$

За изходния сигнал $s_{out}(t)$ имаме

$$S_{out}(\omega) = -j\pi[\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)]H(\omega),$$

$$S_{out}(\omega) = -j\pi[H(\omega_0)\delta(\omega - \omega_0) - H(\omega_0)\delta(\omega + \omega_0)],$$

$$S_{out}(\omega) = H(\omega)S(\omega) = \begin{cases} -j\pi[\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)] & \text{за } |\omega| \leq \Omega \\ 0 & \text{за } |\omega| > \Omega \end{cases}$$

Последното означава, че

$$s_{out}(t) = \begin{cases} \sin \omega_0 t & \text{за } |\omega_0| < \Omega \\ 0 & \text{за } |\omega_0| > \Omega \end{cases}$$

Филтърът пропуска само хармоники с ниски честоти, откъдето произтича и неговото име. Конволюционният запис на филтъра е

$$s_{out}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s_{in}(\tau) \frac{\sin \Omega(t - \tau)}{\pi(t - \tau)} d\tau.$$

Модулация и демодулация. Нека $s(t)$ е сигнал с *ограничена спектрална лента (band limited signal)* с ширина $2\Omega > 0$, което означава, че за $S(\omega)$ е изпълнено $S(\omega) = 0$ при $|\omega| \geq \Omega$. Нека ω_0 и t_0 са константи, за които $\omega_0 > \Omega$. Тогава производението

$$f(t) = s(t)\cos(\omega_0 t - t_0)$$

се нарича **модулация** на носещия сигнал $\cos(\omega_0 t - t_0)$ чрез $s(t)$. След умножение $f(t)$ с носещия сигнал получаваме сигнала

$$g(t) = f(t)\cos(\omega_0 t - t_0) = s(t)\cos^2(\omega_0 t - t_0) = \frac{1}{2}s(t) + \frac{1}{2}s(t)\cos(2\omega_0 t - 2t_0).$$

За неговия Фурие образ $G(\omega)$ намираме

$$G(\omega) = \frac{1}{2}S(\omega) + \frac{1}{2}S(\omega) * [\pi e^{-j4t_0\omega_0}\delta(\omega - 2\omega_0) + \pi e^{j4t_0\omega_0}\delta(\omega + 2\omega_0)],$$

$$G(\omega) = \frac{1}{2}S(\omega) + \frac{1}{2}[\pi e^{-j4t_0\omega_0}S(\omega - 2\omega_0) + \pi e^{j4t_0\omega_0}S(\omega + 2\omega_0)].$$

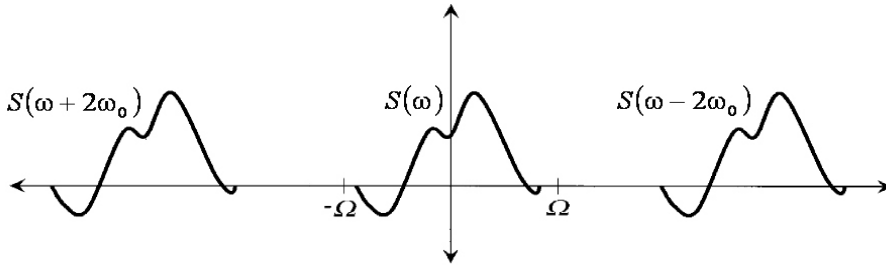


Рис. 24.13.

Спектърът се раздели на три отделни части, както е показано на Рис. 24.13. Сега за отделяне на интересувания ни спектър $S(\omega)$ е достатъчно да приложим подходящ нискочестотен филтър, например филтърът с предавателна функция $H(\omega)$, за която

$$H(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{за } |\omega| \leq \Omega \\ 0 & \text{за } |\omega| > \Omega \end{cases}.$$

Тогава

$$G(\omega)H(\omega) = \frac{1}{2}S(\omega),$$

което открива възможност за възстановяване на полезния сигнал $s(t)$ посредством филтъра

$$s(t) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \cos(\omega_0 t - t_0) \frac{\sin \Omega(t - \tau)}{\pi(t - \tau)} d\tau.$$

Описаната схема се нарича **демодулация** на сигнала.

4. Дискретизация на сигнала. Непрекъснатите сигнали е удобно на практика да се представят посредством редица от техни стойности, отчетени през равен достатъчно малък период от време $T > 0$.

Ако $f(t)$ е непрекъснат сигнал, то редицата $f(kT)$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$,
 $\dots, f(-3T), f(-2T), f(-T), f(0), f(T), f(2T), f(3T), \dots$

представява един дискретен образец за сигнала $f(t)$. Ако определим функцията $\text{comb}_T(t)$ (делта влак)

$$\text{comb}_T(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} \delta(t - kT),$$

то дискретният сигнал $f_s(t)$, породен от $f(t)$, математически се записва като произведението

$$f_s(t) = f(t) \text{comb}_T(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} f(kT) \delta(t - kT).$$

На следващите рисунки са илюстрирани сигналите $\text{comb}_T(t)$ и $f_s(t)$.

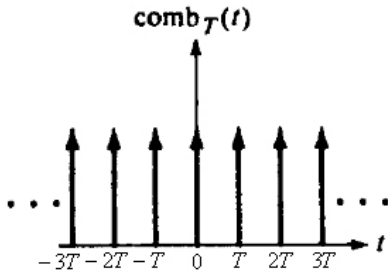


Рис. 24.14

За Фурие образа на $f_s(t)$ имаме

$$F_s(\omega) = \mathbf{F}\{f_s(t)\}(\omega) = \sum_{-\infty}^{\infty} f(kT) \mathbf{F}\{\delta(t - kT)\} = \sum_{-\infty}^{\infty} f(kT) e^{-jk\omega T},$$

което можем да пресметнем и по следния начин

$$F_s(\omega) = \mathbf{F}\left\{f(t) \sum_{-\infty}^{\infty} \delta(t - kT)\right\}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \mathbf{F}\{f(t)\} * \mathbf{F}\left\{\sum_{-\infty}^{\infty} \delta(t - kT)\right\}(\omega),$$

$$F_s(\omega) = \frac{1}{2\pi} F(\omega) * \left[\frac{2\pi}{T} \sum_{-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - k \frac{2\pi}{T}\right) \right],$$

$$(24.14) F_s(\omega) = \frac{1}{T} \sum_{-\infty}^{\infty} F\left(\omega - k \frac{2\pi}{T}\right).$$

Последното равенство дава възможност да се докаже следната теорема на Котелников.

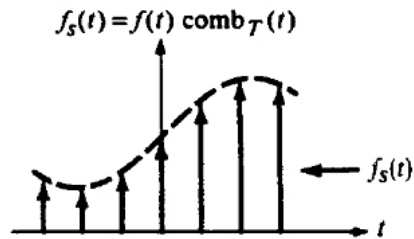


Рис. 24.15.

Теорема 24.3 (Котелников). Нека $f(t)$ е сигнал с крайна енергия и ограничена спектрална лента с ширина $2\Omega > 0$, т.е. за $F(\omega)$ е изпълнено $F(\omega) = 0$ при $|\omega| \geq \Omega$. Нека T е избрано от условието

$$0 < T < \frac{\pi}{\Omega}.$$

Тогава $f(t)$ може да бъде възстановен напълно по стойностите $f(kT)$, $k \in \mathbb{Z}$, например по формулата

$$(24.15) f(t) = T \sum_{-\infty}^{\infty} f(kT) \frac{\sin[\Omega(t - kT)]}{\pi(t - kT)}.$$

Доказателство. Формулата (24.14) показва, че спектърът на $f_s(t)$ се получава от спектъра $F(\omega)$ с отмествания $2\pi/T$, при което картината е аналогична на тази, показана на Рис. 24.13. Д изберем нискочестотен филтър с ширина на лентата 2Ω , за който $H(\omega) = 1$ при $|\omega| \leq \Omega$ и $H(\omega) = 0$ при $|\omega| > \Omega$, имаш импулсна функция

$$h(t) = \frac{\sin \Omega t}{\pi t},$$

и да умножим (24.14) с $H(\omega)$, т.е. да филтрираме сигнала $f_s(t)$ посредством избрания филтър. Получаваме

$$F_s(\omega)H(\omega) = \frac{1}{T} \sum_{-\infty}^{\infty} H(\omega)F\left(\omega - k \frac{2\pi}{T}\right) = \frac{1}{T} F(\omega),$$

$$F(\omega) = TF_s(\omega)H(\omega).$$

Последното показва, че

$$f(t) = Tf_s * h(t),$$

което в преобразуван вид представлява представянето (24.15). ■

Най-икономичният избор на T е $T = \pi/\Omega$, при който (24.15) приема вида

$$f(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} f\left(\frac{\pi}{\Omega}k\right) \frac{\sin(\Omega t - k\pi)}{\Omega t - k\pi},$$

откъдето при $\Omega = \pi$ получаваме формулата

$$f(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} f(k) \frac{\sin[\pi(t - k)]}{\pi(t - k)}.$$

Ако стъпката на дискретизация не е достатъчно малка, то събираемите от (24.14) се застъпват и при възстановяването на сигнала чрез (24.15) се получават нежелани ефекти – *лъжливи честоти (aliasing)*. На практика сигнали с ограничена лента на спектъра се срещат рядко, но от друга страна при сигналите с крайна енергия се наблюдава бързо затихване амплитудата на спектъра, което представлява директно следствие от теоремата на Риман-Лебег. В такъв случай може да се прилага дискретизация на основата на ефективния спектър на сигнала, което води до възстановяване с минимални изкривявания.

5. Дискретни преобразования. Отначало ще разглеждаме крайни редици, представени чрез вектора $\mathbf{x} = (x(0), x(1), x(2), \dots, x(N-1))^T$ с дължина N . **Дискретното преобразование на Фурье (Discrete Fourier Transform)** на \mathbf{x} представлява векторът

$$\mathbf{X} = (X(0), X(1), X(2), \dots, X(N-1))^T,$$

определен по формулите

$$(24.16) X(n) = \sum_{k=0}^{N-1} e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} x(k), \quad n = 0, 1, 2, \dots, N-1.$$

Ако въведем матрицата

$$[F_N] = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & e^{-j\frac{2\pi}{N}} & e^{-j2\frac{2\pi}{N}} & \dots & e^{-j(N-1)\frac{2\pi}{N}} \\ 1 & e^{-j2\frac{2\pi}{N}} & e^{-j2.2\frac{2\pi}{N}} & \dots & e^{-j2(N-1)\frac{2\pi}{N}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & e^{-j(N-1)\frac{2\pi}{N}} & e^{-j2(N-1)\frac{2\pi}{N}} & \dots & e^{-j(N-1)(N-1)\frac{2\pi}{N}} \end{pmatrix},$$

то DFT може да се запише във вида

$$\begin{pmatrix} X(0) \\ X(1) \\ X(2) \\ \vdots \\ X(N-1) \end{pmatrix} = [F_N] \begin{pmatrix} x(0) \\ x(1) \\ x(2) \\ \vdots \\ x(N-1) \end{pmatrix}$$

или още $\mathbf{X} = [F_N]\mathbf{x}$.

Матрицата $[F_N]$ има обратна, за която

$$[F_N]^{-1} = \frac{1}{N} [\overline{F_N}] = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & e^{j\frac{2\pi}{N}} & e^{j2\frac{2\pi}{N}} & \dots & e^{j(N-1)\frac{2\pi}{N}} \\ 1 & e^{j2\frac{2\pi}{N}} & e^{j2.2\frac{2\pi}{N}} & \dots & e^{j2(N-1)\frac{2\pi}{N}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & e^{j(N-1)\frac{2\pi}{N}} & e^{j2(N-1)\frac{2\pi}{N}} & \dots & e^{j(N-1)(N-1)\frac{2\pi}{N}} \end{pmatrix},$$

което означава, че **обратното дискретно преобразование на Фурие (Inverse Discrete Fourier Transform)** се дава по формулата

$$(24.17) \quad x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}nk} X(k), \quad n = 0, 1, 2, \dots, N-1.$$

Например при $N = 4$ имаме следните матрици на преобразование

$$[F_4] = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & e^{-j\frac{2\pi}{4}} & e^{-j2\frac{2\pi}{4}} & e^{-j3\frac{2\pi}{4}} \\ 1 & e^{-j2\frac{2\pi}{4}} & e^{-j4\frac{2\pi}{4}} & e^{-j6\frac{2\pi}{4}} \\ 1 & e^{-j3\frac{2\pi}{4}} & e^{-j6\frac{2\pi}{4}} & e^{-j9\frac{2\pi}{4}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -j \end{pmatrix}$$

и

$$[F_4]^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & e^{j\frac{2\pi}{4}} & e^{j2\frac{2\pi}{4}} & e^{j3\frac{2\pi}{4}} \\ 1 & e^{j2\frac{2\pi}{4}} & e^{j4\frac{2\pi}{4}} & e^{j6\frac{2\pi}{4}} \\ 1 & e^{j3\frac{2\pi}{4}} & e^{j6\frac{2\pi}{4}} & e^{j9\frac{2\pi}{4}} \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & -1 & -j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -j & -1 & j \end{pmatrix}.$$

Ако редицата има вида $\{1, 2, 3, 4\}$, то за образа получаваме

$$\begin{pmatrix} X(0) \\ X(1) \\ X(2) \\ X(3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -2 + 2j \\ -2 \\ -2 - 2j \end{pmatrix}.$$

Оригиналът се възстановява след прилагане на обратното преобразование

$$\begin{pmatrix} x(0) \\ x(1) \\ x(2) \\ x(3) \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & -1 & -j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -j & -1 & j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 \\ -2+2j \\ -2 \\ -2-2j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Дискретното преобразование на Фурие придобива голяма популярност след откриване алгоритъма на **бързото преобразование на Фурие (Fast Fourier Transform)**, който позволява дискретни трансформации на Фурие в реално време на огромни редове.

Тук дискретното преобразование на Фурие е зададено в несиметричен вид. Ако вместо с матрицата $[F_N]$ преобразуваме с матрицата

$$(24.18) \frac{1}{\sqrt{N}} [F_N],$$

която се явява унитарна матрица, то ще получим преобразованието в симетричен вид, понеже в този случай

$$\left(\frac{1}{\sqrt{N}} [F_N] \right)^{-1} = \frac{1}{\sqrt{N}} [F_N],$$

т.е. обратната матрица се получава след комплексно спрягане елементите на изходната. Матрицата $[F_N]$ е симетрична, следователно матрицата (24.18) е симетрична и унитарна. Да припомним, че една комплексна квадратна матрица се нарича унитарна, когато нейната обратна се получава след транспониране и комплексно спрягане.

Дискретното косинус преобразование (Discrete Cosine Transform), в симетричен вид, на вектора $\mathbf{x} = (x(0), x(1), x(2), \dots, x(N-1))^T$ представлява векторът

$$\mathbf{X} = (X(0), X(1), X(2), \dots, X(N-1))^T,$$

определен по формулите

$$X(n) = w(n) \sum_{k=0}^{N-1} \cos \frac{\pi n(2k+1)}{2N} x(k), \quad n = 0, 1, 2, \dots, N-1,$$

където

$$w(0) = \frac{1}{\sqrt{N}} \text{ и } w(n) = \frac{2}{\sqrt{N}} \text{ за } n = 1, 2, \dots, N-1.$$

Ако въведем $(N \times N)$ матрицата

$$[C_N] = \left\{ w(n) \cos \frac{\pi n(2k+1)}{2N} \right\},$$

то DFT може да се запише във вида

$$\mathbf{X} = [C_N] \mathbf{x}.$$

Понеже матрицата $[C_N]$ е ортогонална, нейната обратна се получава чрез транспониране $[C_N]^{-1} = [C_N]^T$ и следователно обратното косинус преобразование има вида

$$\mathbf{x} = [C_N]^T \mathbf{X}.$$

DCT намира широко приложение при компресията на графични изображения.

Преобразуване на дискретни периодични редици. Естествената среда за прилагане дискретното преобразование на Фурие представляват периодичните дискретни редици $\{x(n)\}$, $n \in \mathbb{Z}$, с период някакво естествено число N . Тук

периодичността означава, че $x(n+N) = x(n)$, за всяко $n \in \mathbb{Z}$. Такива редици напълно се определят посредством своите стойности за дължина на периода, например чрез стойностите $x(0), x(1), \dots, x(N-1)$. Непосредствено се установява, че N -периодичната редица $\{x(n)\}$ чрез формулата (24.16) се преобразува в N -периодичната редица $\{X(n)\}$,

$$(24.19) X(n) = \sum_{k=0}^{N-1} e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} x(k), \quad n \in \mathbb{Z},$$

като самата формула (24.16) служи за определяне редицата $\{X(n)\}$ за дължина на периода. Обратното преобразование на редицата (24.19) в редицата $\{x(n)\}$ се извършва с помощта на (24.17).

Циклична конволюция (Circular Convolution) на двете N -периодични редици $\{x(n)\}$ и $\{y(n)\}$ се нарича N -периодичната редица, определена от

$$z(n) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k)y((n-k) \bmod N).$$

Цикличността се състои в това, че вместо натуралната стойност на индекса $(n-k)$ се взема неговият остатък при деление на N . В такъв случай за образа на $\{z(n)\}$ е изпълнено

$$Z(n) = X(n)Y(n),$$

което свойство е аналог на непрекъснатия случай за образ на конволюция. Аналог има и формулата за произведение. Ако $z(n) = x(n)y(n)$, то

$$Z(n) = \frac{1}{N} X(n) * Y(n),$$

където конволюцията се разглежда като циклична. Цикличната конволюция притежава характерните основни свойства на традиционната конволюция.

6. Двумерни преобразования. Дотук разглеждахме случая на скалярни величини. Описаните преобразования могат да се определят и върху векторни величини. Двумерното Фурие преобразование на функцията $f(t_1, t_2)$ от класа $L^2(\mathbb{R}^2)$ се определя като

$$F(\omega_1, \omega_2) = \int_{-\infty-\infty}^{\infty} \int_{-\infty-\infty}^{\infty} f(t_1, t_2) e^{-j\omega_1 t_1} e^{-j\omega_2 t_2} dt_1 dt_2,$$

а обратното преобразование

$$f(t_1, t_2) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty-\infty}^{\infty} \int_{-\infty-\infty}^{\infty} F(\omega_1, \omega_2) e^{j\omega_1 t_1} e^{j\omega_2 t_2} d\omega_1 d\omega_2.$$

Двумерното преобразование в дискретно време за таблицата $f(m, n)$, $m, n \in \mathbb{Z}$, се определя като

$$F(\omega_1, \omega_2) = \sum_{-\infty}^{\infty} \sum_{-\infty}^{\infty} f(m, n) e^{-j\omega_1 m} e^{-j\omega_2 n},$$

а обратното преобразование

$$f(m, n) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty-\infty}^{\infty} \int_{-\infty-\infty}^{\infty} F(\omega_1, \omega_2) e^{j\omega_1 m} e^{j\omega_2 n} d\omega_1 d\omega_2, \quad m, n \in \mathbb{Z}.$$

Двумерното дискретно преобразование на Фурие за таблицата $f(m, n)$, $0 \leq m \leq M-1$, $0 \leq n \leq N-1$, се определя като

$$F(p, q) = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} f(m, n) e^{-j\frac{2\pi}{M}pm} e^{-j\frac{2\pi}{N}qn}, \quad 0 \leq p \leq M-1, \quad 0 \leq q \leq N-1,$$

а обратното преобразование

$$f(m, n) = \frac{1}{MN} \sum_{p=0}^{M-1} \sum_{q=0}^{N-1} F(p, q) e^{j\frac{2\pi}{M}pm} e^{j\frac{2\pi}{N}qn}, \quad 0 \leq m \leq M-1, \quad 0 \leq n \leq N-1.$$

Двумерното дискретно косинус преобразование за крайната таблица $f(m, n)$, $0 \leq m \leq M-1$, $0 \leq n \leq N-1$, в симетричен вид се определя като

$$F(p, q) = \alpha(p)\beta(q) \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} f(m, n) \cos \frac{\pi(2m+1)p}{2M} \cos \frac{\pi(2n+1)q}{2N},$$

$0 \leq p \leq M-1$, $0 \leq q \leq N-1$, където

$$\alpha(0) = \frac{1}{\sqrt{M}} \text{ и } \alpha(p) = \frac{2}{\sqrt{M}} \text{ за } p = 1, 2, \dots, M-1,$$

$$\beta(0) = \frac{1}{\sqrt{N}} \text{ и } \beta(q) = \frac{2}{\sqrt{N}} \text{ за } q = 1, 2, \dots, N-1,$$

а обратното преобразование

$$f(m, n) = \sum_{p=0}^{M-1} \sum_{q=0}^{N-1} \alpha(p)\beta(q) F(p, q) \cos \frac{\pi(2m+1)p}{2M} \cos \frac{\pi(2n+1)q}{2N},$$

$0 \leq m \leq M-1$, $0 \leq n \leq N-1$.

Двумерното дискретно косинус преобразование доскоро е било основен стандарт за компресиране на JPEG изображения. На Рис. 24.16 е дадено изображение на снимка на автора на тази лекция в нюанси на сивото, като на Рис. 24.17 същото изображение е приведено в псевдо-архивен формат.



Рис. 24.16.



Рис. 24.17.

Изображението от Рис. 24.16 е разделено на квадратни блокове от по 8×8 пиксела, които съдържат едно число – информация за наситеност на сивото. Тези матрици се подлагат на двумерно дискретно косинус преобразование, след което се филтрират, като от преобразуваната матрица е запазен само коефициента с най-ниска честота, който съответства на $p = q = 0$, а останалите 63 коефициента се полагат да бъдат нули. Така филтрираните блокове се подлагат на обратно двумерно дискретно косинус преобразование. Резултатът от описаната процедура е показан на Рис. 24.17. Добре се вижда, че качеството на изображението на практика се запазва в много добър вид, независимо от това, че в този случай е взета предвид само $\frac{1}{64}$ от наличната първоначално информация. Тези високи показатели на компресия са в основата на

избора на DCT за един от JPEG стандартите за компресия. Ако се вземат само десет на брой коефициента, което означава компресия с коефициент $\frac{10}{64}$, то възстановеното изображение практически не се различава от първоначалното.

В последно време обаче се налага друг стандарт, основан на така нареченото **вейвлет преобразование (Wavelet Transform)**.

Следващата таблица съдържа основните правила и често използвани съответствия за преобразованието на Фурие.

$s(t)$	$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)e^{-j\omega t} dt$
$s(\alpha t), \alpha \neq 0$	$\frac{1}{ \alpha } S\left(\frac{\omega}{\alpha}\right)$
$s(t-\alpha)$	$e^{-j\omega\alpha} S(\omega)$
$e^{j\alpha t} s(t)$	$S(\omega-\alpha)$
$\cos \alpha t s(t)$	$\frac{1}{2}[S(\omega-\alpha)+S(\omega+\alpha)]$
$\sin \alpha t s(t)$	$\frac{1}{2j}[S(\omega-\alpha)-S(\omega+\alpha)]$
$s'(t)$	$j\omega S(\omega)$
$s^{(n)}(t)$	$(j\omega)^n S(\omega)$
$tf(t)$	$jS'(\omega)$
$t^n s(t)$	$j^n S^{(n)}(\omega)$
$\int_{\alpha}^t s(\tau)d\tau$	$-j \frac{S(\omega)}{\omega} + c_{\alpha}\delta(\omega)$
$\frac{s(t)}{t}$	$-j \int_{\alpha}^{\omega} S(\xi)d\xi + c_{\alpha}$
$f(t)g(t)$	$\frac{1}{2\pi} F(\omega)*G(\omega)$
$f(t)*g(t)$	$F(\omega)G(\omega)$
$e^{-\alpha t }, \alpha > 0$	$\frac{2\alpha}{\omega^2 + \alpha^2}$
$e^{-\alpha t^2}, \alpha > 0$	$\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{-\frac{\omega^2}{4\alpha}}$
$e^{-\alpha t^2 + \beta t}, \alpha > 0$	$\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{-\frac{\omega^2}{4\alpha} - j\frac{\beta\omega}{2\alpha} + \frac{\beta^2}{4\alpha}}$
$\frac{\sin \Omega t}{t}, \Omega > 0$	$\pi p_{\Omega}(t), p_{\Omega}(\omega) = \begin{cases} 1 & 3\alpha \omega \leq \Omega \\ 0 & 3\alpha \omega > \Omega \end{cases}$
1	$2\pi\delta(\omega)$
$t^n, n = 0,1,2,\dots$	$j^n 2\pi\delta^{(n)}(\omega)$
$e^{j\beta t}$	$2\pi\delta(\omega-\beta)$

$\delta(t - \beta)$	$e^{-j\omega\beta}$
$\delta^{(n)}(t), n = 0, 1, 2, \dots$	$(j\omega)^n$
$\sin \alpha t$	$-j\pi[\delta(\omega - \alpha) - \delta(\omega + \alpha)]$
$\cos \alpha t$	$\pi[\delta(\omega - \alpha) + \delta(\omega + \alpha)]$
$\text{sgn}(t)$	$-j\frac{2}{\omega}$
$\eta(t)$	$\pi\delta(\omega) - j\frac{1}{\omega}$
$\frac{1}{t}$	$-j\pi\text{sgn}(\omega)$

* handbook – 249