## Лекция 1

### §1. Функции на много променливи

**1. Топология на $\mathrm{R}^n$.** ***Точка*** $\mathbf{x}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ в $n$***-мерното евклидово пространство*** $\mathrm{R}^n$ наричаме вектора $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, а числото $x_k$, $k = 1,2,\dots,n$, е неговата $k$-та координата. Чрез тези координати векторът се представя като линейна комбинация $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}^{(1)} + x_2\mathbf{e}^{(2)} + \dots + x_n\mathbf{e}^{(n)}$ в каноничния базис, $\mathbf{e}^{(1)}(1,0,\dots,0)$, $\mathbf{e}^{(2)}(0,1,\dots,0)$, ..., $\mathbf{e}^{(n)}(0,0,\dots,1)$. Свойствата на векторите и линейните операции в $\mathrm{R}^n$ са познати от курса по линейна алгебра. Линейните операции събиране и умножение се извършват ***почленно***. Ако $\mathbf{x}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $\mathbf{y}(y_1, y_2, \dots, y_n)$, са два вектора от $\mathrm{R}^n$, то

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n) \text{ и } \lambda\mathbf{x} = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n),\ \lambda \in \mathrm{R}.$$

***Разстоянието*** между двете точки $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ се определя по формулата

$$\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}.$$

В случая, когато $n = 1$ се получава права (числова ос), в случая $n = 2$ имаме геометрична равнина, при $n = 3$ – геометрично пространство. За по-големи стойности на $n$, пространството $\mathrm{R}^n$ няма естествена геометрична интерпретация. Геометрията в $\mathrm{R}^n$ се определя от наличието на (канонично) ***скаларно произведение***

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n.$$

Скаларното произведение има следните основни свойства.

**1)** $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \ge 0$, и ако $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 0$, то $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, където $\mathbf{0} = (0,0,\dots,0)$ е нулевият вектор на $\mathrm{R}^n$.

**2)** $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle$ – симетричност.

**3)** $\langle \lambda_1\mathbf{x}^{(1)} + \lambda_2\mathbf{x}^{(2)} + \dots + \lambda_m\mathbf{x}^{(m)}, \mathbf{y} \rangle = \lambda_1\langle \mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{y} \rangle + \lambda_2\langle \mathbf{x}^{(2)}, \mathbf{y} \rangle + \dots + \lambda_m\langle \mathbf{x}^{(m)}, \mathbf{y} \rangle$ – линейност.

От симетричността следва, че скаларното произведение е линейно и по втория аргумент. Ако разглеждаме векторите като стълбове, то скаларното произведение може да се запише чрез транспониране на втория множител като $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \mathbf{y}^T\mathbf{x}$, а умножението е по известното правило "ред по стълб".

***Дължината*** на вектора $\mathbf{x}$ (модул на вектора $\mathbf{x}$), по аналогия с геометричните пространства $\mathrm{R}^2$ и $\mathrm{R}^3$, се определя по формулата

$$|\mathbf{x}| = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2},$$

което се нарича ***норма*** на вектора $\mathbf{x}$, породена от скаларното произведение.

**Твърдение 1.1** ***(неравенство на Коши).*** За всеки два вектора $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathrm{R}^n$ е изпълнено

(1.1) $\quad |\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle| \le |\mathbf{x}||\mathbf{y}|,$

при което ако има равенство, то векторите $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ са линейно зависими.

*Доказателство.* Неравенството може да бъде записано по следния начин

$$|x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n| \le \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}\sqrt{y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2}.$$

Да разгледаме квадратната функция

$$\varphi(t) = (x_1 + t y_1)^2 + (x_2 + t y_2)^2 + \dots + (x_n + t y_n)^2 = |\mathbf{x}|^2 + 2t\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + t^2|\mathbf{y}|^2.$$

Тя е неотрицателна за всяко $t \in \mathrm{R}$, следователно за нейната нейната дискриминанта имаме

$$D = 4\left[\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle^2 - |\mathbf{x}|^2|\mathbf{y}|^2\right] \le 0,$$

откъдето неравенството на Коши следва непосредствено. Ако $\varphi(t) > 0$, за всяко $t \in \mathrm{R}$, то неравенството за дискриминантата е строго и следователно неравенството (1.1) също е строго, следователно, ако в (1.1) има равенство, то $\varphi(t_0) = 0$, за някое $t_0$, което означава, че $\mathbf{x} + t_0\mathbf{y} = \mathbf{0}$. ■

С помощта на неравенството на Коши можем да докажем

**Твърдение 1.2** ***(неравенство на Минковски).*** За всеки два вектора $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathrm{R}^n$ е изпълнено

(1.2) $\quad |\mathbf{x} + \mathbf{y}| \le |\mathbf{x}| + |\mathbf{y}|$,

при което ако има равенство, то векторите $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ са линейно зависими.

*Доказателство.* Имаме

$$|\mathbf{x} + \mathbf{y}|^2 = \langle \mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{x} + \mathbf{y} \rangle = |\mathbf{x}|^2 + 2\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + |\mathbf{y}|^2,$$

откъдето според неравенството на Коши имаме

$$|\mathbf{x} + \mathbf{y}|^2 \le |\mathbf{x}|^2 + 2|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle| + |\mathbf{y}|^2 \le |\mathbf{x}|^2 + 2|\mathbf{x}||\mathbf{y}| + |\mathbf{y}|^2 = (|\mathbf{x}| + |\mathbf{y}|)^2,$$

което доказва (1.2). ■

Нека $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathrm{R}^n$ са произволни. Тогава

$$\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = |\mathbf{x} - \mathbf{y}| = |(\mathbf{x} - \mathbf{z}) + (\mathbf{z} - \mathbf{y})| \le |\mathbf{x} - \mathbf{z}| + |\mathbf{z} - \mathbf{y}| = \rho(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + \rho(\mathbf{z}, \mathbf{y}),$$

т.е. получихме неравенството на триъгълника за разстоянието между две точки

(1.3) $\quad \rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \le \rho(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + \rho(\mathbf{z}, \mathbf{y})$.

**Определение 1.1** Едно множество $M$ се нарича ***метрично пространство***, когато между всеки два негови елемента $x, y \in M$, е определена функцията $\rho(x, y)$ със следните три свойства:

**1)** $\rho(x, x) = 0$, за всяко $x \in M$, и ако $\rho(x, y) = 0$ за някои $x, y \in M$, то $x = y$;

**2)** $\rho(x, y) = \rho(y, x)$, за всеки $x, y \in M$ (симетричност);

**3)** $\rho(x, y) \le \rho(x, z) + \rho(z, y)$, за всеки $x, y, z \in M$ (неравенство на триъгълника).

Сега лесно се вижда, че $\mathrm{R}^n$ е метрично пространство с метрика, породена от нормата, понеже $\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$. Свойствата **1)** и **2)** са очевидни, а **3)** следва от (1.3). Поради наличието на норма $|\mathbf{x}| = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle}$ казваме, че ***пространството*** $\mathrm{R}^n$ ***е нормирано***. Нормата има следните характеризиращи основни свойства.

**1)** $|\mathbf{x}| \ge 0$ и $|\mathbf{x}| = 0$ тогава и само тогава, когато $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

**2)** $|\lambda \mathbf{x}| = |\lambda||\mathbf{x}|$, за всеки скалар $\lambda \in \mathrm{R}$.

**3)** $|\mathbf{x} + \mathbf{y}| \le |\mathbf{x}| + |\mathbf{y}|$, за всеки два вектора $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathrm{R}^n$.

**Определение 1.2.** Нека $\mathbf{x} \in \mathrm{R}^n$. Множеството $B(\mathbf{x}, \varepsilon)$ от всички точки $\mathbf{y} \in \mathrm{R}^n$, за които $\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) < \varepsilon$ се нарича ***отворено кълбо*** с център $\mathbf{x}$ и радиус $\varepsilon > 0$. Множеството $\overline{B}(\mathbf{x}, \varepsilon)$ от всички точки $\mathbf{y} \in \mathrm{R}^n$, за които $\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \le \varepsilon$ се нарича ***затворено кълбо*** с център $\mathbf{x}$ и радиус $\varepsilon \ge 0$.

$B(\mathbf{x}, \varepsilon)$ се нарича още $\varepsilon$-околност на $\mathbf{x} \in \mathrm{R}^n$. По този начин имаме

$$B(\mathbf{x}, \varepsilon) = \left\{ \mathbf{y} \in \mathrm{R}^n : \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (x_k - y_k)^2} < \varepsilon \right\}.$$

Когато $n = 1$, $B(x, \varepsilon)$ е отворен интервал с център $x$ и радиус $\varepsilon$ (Рис. 1.1)

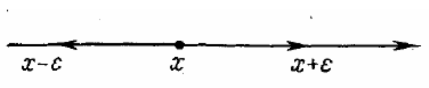


Рис. 1.1

Когато $n=2$, $B(\mathbf{x},\varepsilon)$ е кръг с център $\mathbf{x}(x_1,x_2)$ и радиус $\varepsilon$ (Рис. 1.2)

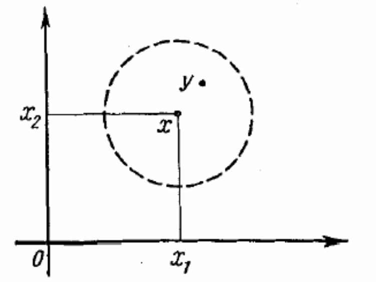


Рис. 1.2

Основните определения и свойства на редиците в $\mathsf{R}^n$ са аналогични на тези, свързани с числови редици.

Ако на всяко естествено число $m\in\mathsf{N}$ е съпоставена точка $\mathbf{x}^{(m)}\in\mathsf{R}^n$, то казваме, че е зададена ***редица*** от точки в $\mathsf{R}^n$. Редиците ще бележим с $\left\{\mathbf{x}^{(m)}\right\}_{m=1}^{\infty}$ или просто с $\left\{\mathbf{x}^{(m)}\right\}$. Ако е дадена редицата $\left\{\mathbf{x}^{(m)}\right\}$ и някаква растяща редица от естествени числа $m_1<m_2<\cdots<m_\nu<\cdots$, то можем да образуваме ***подредицата*** $\left\{\mathbf{x}^{(m_\nu)}\right\}$.

**Определение 1.3.** Точката $\mathbf{x}\in\mathsf{R}^n$ се нарича граница на редицата $\left\{\mathbf{x}^{(m)}\right\}$ и се пише

$$\lim_{m\to\infty}\mathbf{x}^{(m)}=\mathbf{x},$$

когато

$$\lim_{m\to\infty}\rho\left(\mathbf{x}^{(m)},\mathbf{x}\right)=0.$$

Ако $\lim\limits_{m\to\infty}\mathbf{x}^{(m)}=\mathbf{x}$, то се казва, че редицата $\left\{\mathbf{x}^{(m)}\right\}$ е сходяща и клони към границата $\mathbf{x}$.

От горното определение означава, че $\lim\limits_{m\to\infty}\mathbf{x}^{(m)}=\mathbf{x}$ тогава и само тогава, когато за всяко $\varepsilon>0$ може да се намери естествено число $m_0$, такова, че $\rho\left(\mathbf{x}^{(m)},\mathbf{x}\right)=\left|\mathbf{x}^{(m)}-\mathbf{x}\right|<\varepsilon$, винаги когато $m>m_0$. При $n=1$ дадените определения напълно се покриват с известните определения за сходящи числови редици. При $n=2$ сходимостта означава, че за всеки кръг с център $\mathbf{x}(x_1,x_2)$ и радиус $\varepsilon>0$, от известно място нататък (зависещо от $\varepsilon$) всички членове на редицата се съдържат в този кръг (Рис. 1.3)

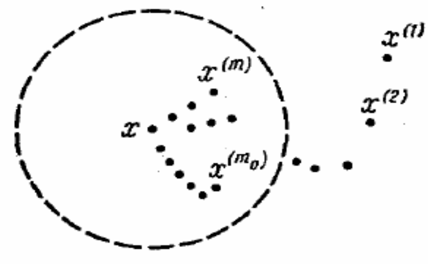


Рис. 1.3

**Определение 1.4.** Редицата $\left\{\mathbf{x}^{(m)}\right\}$ се нарича ***фундаментална***, когато $\lim\limits_{m\to\infty,m'\to\infty}\rho\left(\mathbf{x}^{(m)},\mathbf{x}^{(m')}\right)=0$, т.е. ако за всяко $\varepsilon>0$ съществува $m_0$ такова, че $\rho\left(\mathbf{x}^{(m)},\mathbf{x}^{(m')}\right)<\varepsilon$, винаги когато $m>m_0$ и $m'>m_0$.

Редицата $\{\mathbf{x}^{(m)}\}$ се нарича ***ограничена***, когато съществува константа $C$ такава, че $\left|\mathbf{x}^{(m)}\right| < C$, за всяко $m \in \mathsf{N}$.

Както за числови редици се установява, че всяка сходяща редица е фундаментална и всяка фундаментална редица е ограничена. Освен това, ако една редица е сходяща, то нейната граница е единствена.

**Твърдение 1.3** ***(свойства на подредиците).***
**1**) Нека редицата $\{\mathbf{x}^{(m)}\}$ е фундаментална. Тогава всяка нейна подредица $\{\mathbf{x}^{(m_\nu)}\}$ също е фундаментална.
**2**) Нека редицата $\{\mathbf{x}^{(m)}\}$ е сходяща и клони към границата $\mathbf{x}$. Тогава всяка нейна подредица $\{\mathbf{x}^{(m_\nu)}\}$ също е сходяща и клони към същата граница $\mathbf{x}$.
**3**) Ако редицата $\{\mathbf{x}^{(m)}\}$ е фундаментална и има някаква сходяща подредица $\{\mathbf{x}^{(m_\nu)}\}$, която клони към границата $\mathbf{x}$, то цялата редица $\{\mathbf{x}^{(m)}\}$ също е сходяща, при това клони към същата граница $\mathbf{x}$. ■

Всеки член $\mathbf{x}^{(m)}$ на една редица $\{\mathbf{x}^{(m)}\}$ се задава посредством своите координати, $\mathbf{x}^{(m)} = \left(x_1^{(m)}, x_2^{(m)}, \ldots, x_n^{(m)}\right)$. Сходимостта в $\mathsf{R}^n$ е еквивалентна на покоординатна сходимост.

**Твърдение 1.4.** Редицата $\left\{\mathbf{x}^{(m)} = \left(x_1^{(m)}, x_2^{(m)}, \ldots, x_n^{(m)}\right)\right\}$ е сходяща и клони към границата $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ тогава и само тогава, когато за всяка координатна редица $\{x_k^{(m)}\}$, $k = 1,2,\ldots,n$, е изпълнено

$$\lim_{m\to\infty} x_k^{(m)} = x_k .$$

*Доказателство.* **1**) Нека $\lim\limits_{m\to\infty} \mathbf{x}^{(m)} = \mathbf{x}$ и нека изберем някакво $\varepsilon > 0$. Тогава може да се намери $m_0$, за което

$$\rho\left(\mathbf{x}^{(m)}, \mathbf{x}\right) = \sqrt{\sum_{k=1}^{n}\left(x_k^{(m)} - x_k\right)^2} < \varepsilon ,$$

когато $m > m_0$, следователно при всяко $k = 1,2,\ldots,n$ е изпълнено $\left|x_k^{(m)} - x_k\right| < \varepsilon$, когато $m > m_0$, което означава по определение, че всичките координатни редици са сходящи и клонят към съответната координата на границата.

**2**) Да предположим сега, че за всяка координатна редица е $\{x_k^{(m)}\}$, $k = 1,2,\ldots,n$, изпълнено

$$\lim_{m\to\infty} x_k^{(m)} = x_k$$

и да изберем едно $\varepsilon > 0$. Тогава за всеки индекс $k = 1,2,\ldots,n$ съществува $m_{0,k}$, за което $\left|x_k^{(m)} - x_k\right| < \varepsilon/\sqrt{n}$, при $m > m_{0,k}$. Нека $m_0 = \max\left(m_{0,1}, m_{0,2}, \ldots, m_{0,n}\right)$ и да положим $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Ще докажем, че това $\mathbf{x}$ е граница на редицата $\{\mathbf{x}^{(m)}\}$. Наистина, ако $m > m_0$, то е изпълнено

$$\rho\left(\mathbf{x}^{(m)}, \mathbf{x}\right) = \sqrt{\sum_{k=1}^{n}\left(x_k^{(m)} - x_k\right)^2} < \varepsilon ,$$

което доказва твърдението, понеже $\varepsilon > 0$ беше избрано произволно. ■

По същия начин се доказва, че една редица е фундаментална тогава и само тогава, когато е покоординатно фундаментална, т.е. когато всичките координатни редици са фундаментални и разбира се една редица е ограничена тогава и само тогава, когато е покоординатно ограничена, т.е. когато всяка координатна редица е ограничена.

Най-важната характеристика на полето на реалните числа е, че то пълно, което означава, ***че всяка фундаментална редица има граница*** (всяка фундаментална редица е сходяща). Това свойство притежават и фундаменталните редици в $\mathsf{R}^n$.

**Теорема 1.1.** Една редица в $\mathsf{R}^n$ е фундаментална тогава и само тогава, когато е сходяща.

*Доказателство.* Вече знаем, че всяка сходяща редица е фундаментална. Остава да покажем обратното. Нека редицата $\{\mathbf{x}^{(m)}\}$ е фундаментална. Тогава тя е покоординатно фундаментална, следователно всяка координатна редица $\{x_k^{(m)}\}$, $k = 1,2,\ldots,n$, е фундаментална и сходяща към някоя граница $x_k$. Сега от твърдение 1.4 следва, че

$$\lim_{m\to\infty} \mathbf{x}^{(m)} = \mathbf{x} \overset{\text{def}}{=} (x_1, x_2, \ldots, x_n). \ \blacksquare$$

**Определение 1.5.** Множеството $A \subset \mathsf{R}^n$ се нарича ***ограничено***, когато съществува константа $C$ такава, че $|\mathbf{x}| < C$, за всяко $\mathbf{x} \in A$.

Всяка ограничена редица представлява ограничено множество. Теоремата на Болцано-Вайерщрас за числови редици гласи, че от всяка ограничена числова редица може да се избере сходяща подредица. Такава теорема е валидна и за редиците от $\mathsf{R}^n$.

**Теорема 1.2 *(Болцано-Вайерщрас).*** От всяка ограничена редица $\{\mathbf{x}^{(m)}\}$ може да се избере сходяща подредица.

*Доказателство.* Нека редицата $\{\mathbf{x}^{(m)}\}$ е ограничена. Тогава тя е покоординатно ограничена и следователно от всяка координатна редица $\{x_k^{(m)}\}$, $k = 1,2,\ldots,n$, може да се избере сходяща подредица $\{x_k^{(m_\nu)}\}$ с граница $x_k$. За простота да предположим, че $n = 2$. Имаме $\lim\limits_{\nu\to\infty} x_1^{(m_\nu)} = x_1$. Сега да разгледаме редицата $\{x_2^{(m_\nu)}\}$, която е подредица на $\{x_2^{(m)}\}$ и следователно е ограничена. От нея може да се избере сходяща подредица $\{x_2^{(m_{\nu_\mu})}\}$, която ще има за граница числото $x_2$, $\lim\limits_{\mu\to\infty} x_2^{(m_{\nu_\mu})} = x_2$. Тогава подредицата $\{\mathbf{x}^{(m_{\nu_\mu})}\}$ е сходяща и клони към $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$, понеже и двете координатни редици $\{x_1^{(m_{\nu_\mu})}\}$ и $\{x_2^{(m_{\nu_\mu})}\}$ са сходящи и клонят съответно към $x_1$ и $x_2$. За да завършим доказателството остава да се позовем на твърдение 1.4. Случаят на произволно $n$ съдържа само технически усложнения в сравнение с изложеното доказателство. ■

Казваме, че редицата $\{\mathbf{x}^{(m)}\}$ ***клони към безкрайност*** и пишем $\lim\limits_{m\to\infty} \mathbf{x}^{(m)} = \infty$, когато $\lim\limits_{m\to\infty} |\mathbf{x}^{(m)}| = \infty$. Ако една редица не е ограничена, то тя съдържа подредица, която клони към безкрайност.

Следващото определение касае взаимното разположение на точка и множество.

**Определение 1.6.** Нека $\mathbf{x} \in \mathsf{R}^n$ и $A \subset \mathsf{R}^n$, $A \neq \varnothing$.
**1**) Точката $\mathbf{x} \in A$ се нарича ***вътрешна*** за $A$, когато се съдържа в $A$ заедно с някоя своя $\varepsilon$-околност $B(\mathbf{x}, \varepsilon)$.

**2**) Точката $\mathbf{x}$ се нарича ***външна*** за $A$, когато е вътрешна за допълнението $A^c = \mathrm{R}^n \setminus A$.
**3**) Точката $\mathbf{x}$ се нарича ***гранична*** (***контурна***) за $A$, когато не е нито вътрешна нито външна за $A$.
**4**) Точката $\mathbf{x}$ се нарича ***точка на сгъстяване*** за $A$, когато всяка нейна $\varepsilon$-околност $B(\mathbf{x},\varepsilon)$ съдържа точки от $A$, различни от $\mathbf{x}$.
**5**) Точката $\mathbf{x} \in A$ се нарича ***изолирана***, когато съществува някаква нейна $\varepsilon$-околност $B(\mathbf{x},\varepsilon)$, която не съдържа други точки от $A$ освен $\mathbf{x}$.

Една гранична точка може да принадлежи или да не принадлежи на множеството. Точката $\mathbf{x}$ е външна за $A$, когато съществува някаква $\varepsilon$-околност $B(\mathbf{x},\varepsilon)$, за която $B(\mathbf{x},\varepsilon)\bigcap A = \varnothing$. Очевидно всяка изолирана точка е и гранична. От последното определение следва, че ***всяка точка е или вътрешна или външна или гранична*** относно дадено множество. Една точка $\mathbf{x}$ е точка на сгъстяване за $A$ тогава и само тогава, когато може да се намери редица от точки $\left\{\mathbf{x}^{(m)} \in A, \mathbf{x}^{(m)} \neq \mathbf{x}\right\}$, за която $\lim\limits_{m\to\infty} \mathbf{x}^{(m)} = \mathbf{x}$.

Следващото определение касае основните видове множества в анализа. Да отбележим, че едно множество се нарича ***крайно***, когато неговите елементи са краен брой и ***безкрайно***, когато неговите елементи са безбройно много.

**Определение 1.7** ***(отворени, затворени и компактни множества).***
**1**) Множеството $U \subset \mathrm{R}^n, U \neq \varnothing$, се нарича ***отворено***, когато се състои само от вътрешни точки. Празното множество $\varnothing$ също определяме като отворено.
**2**) Множеството $F \subset \mathrm{R}^n$ се нарича ***затворено***, когато неговото допълнение $F^c = \mathrm{R}^n \setminus F$ е отворено.
**3**) Множеството $K \subset \mathrm{R}^n$, $K \neq \varnothing$, се нарича ***компактно***, когато е едновременно затворено и ограничено.

От горното определение следва, че множеството $U \neq \varnothing$ е отворено, точно когато за всяка негова точка $\mathbf{x} \in U$ съществува някаква нейна $\varepsilon$-околност $B(\mathbf{x},\varepsilon)$, за която $B(\mathbf{x},\varepsilon) \subset U$. Единствените множества, които са едновременно отворени и затворени са цялото $\mathrm{R}^n$ и празното множество $\varnothing$. Освен това всяко отворено кълбо е отворено множество и всяко затворено кълбо е затворено множество.

Следващото твърдение дава характеризира затворените множества.

**Твърдение 1.5.** Едно множество $F \subset \mathrm{R}^n$, $F \neq \varnothing$, е затворено тогава и само тогава, когато съдържа всичките си точки на сгъстяване. ■

Произволно обединение $U = \bigcup\limits_{\alpha} U_\alpha$, $\alpha \in I$, на отворени множества $U_\alpha$ е отворено множество. Сега от закона на Де-Морган $\left(\bigcap\limits_{\alpha} F_\alpha\right)^c = \bigcup\limits_{\alpha} F_\alpha^c$ следва, че произволно сечение на затворени множества също е затворено. В общия случай произволно сечение на отворени множества може да не бъде отворено, както и произволно обединение на затворени множества може да не бъде затворено. Сечението на краен брой отворени множества е отворено и обединението на краен брой затворени множества е затворено.

От твърдение 1.5 следва, че ако към дадено множество $A$ добавим неговите точки на сгъстяване, то се получава затворено множество, което всъщност е "най-малкото" затворено множество, което съдържа $A$ и се нарича ***затворена обвивка*** на $A$ и се бележи с $\overline{A}$.

**Определение 1.8.** ***Граница (контур)*** $\partial A$ на едно множество $A \subset \mathrm{R}^n$ се нарича съвкупността от всичките му гранични точки.

Понеже всяка гранична точка е или точка на сгъстяване или изолирана, то затворената обвивка на едно множество се получава, като добавим неговите гранични точки, т.е. $\overline{A} = A \bigcup \partial A$.

Сега ще дадем друга характеристика на затворените множества.

**Твърдение 1.6.** Едно множество $F \subset \mathrm{R}^n$, $F \neq \varnothing$, е затворено тогава и само тогава, когато съдържа границите на всички свои сходящи редици, т.е. когато от $\lim\limits_{m\to\infty} \mathbf{x}^{(m)} = \mathbf{x}$ и $\mathbf{x}^{(m)} \in F$ следва, че $\mathbf{x} \in F$. ■

Да припомним, че множеството $K \subset \mathrm{R}^n$ е компактно, когато е едновеменно ограничено и затворено. Следващата теорема има особено важна роля в анализа.

**Теорема 1.3.** Едно множество $K \subset \mathrm{R}^n$ е компактно тогава и само тогава, когато от всяка негова редица може да се избере сходяща подредица, чиято граница принадлежи на $K$. ■

Една от най-важните теореми на анализа е теоремата на Кантор за вложените интервали. Ограничените затворени интервали са основни примери за компактни множества. Теоремата на Кантор може да се обобщи за случая на редица от вложени едно в друго компактни множества от $\mathrm{R}^n$.

**Теорема 1.4** ***(Кантор).*** Нека е дадена редицата от (непразни) компактни множества $K_1 \supseteq K_2 \supseteq \cdots \supseteq K_m \supseteq \cdots$. Тогава тяхното сечение не е празно. ■

За да характеризираме "размера" на едно множество $A \subset \mathrm{R}^n$ въвеждаме следното

**Определение 1.9.** ***Диаметър*** $d(A)$ на ограниченото множество $A \subset \mathrm{R}^n$ се нарича $d(A) = \sup\{|\mathbf{x} - \mathbf{y}| : \mathbf{x}, \mathbf{y} \in A\}$.

***Отсечка*** $I$ в $\mathrm{R}^n$, свързваща точките $\mathbf{x}^{(1)}$ и $\mathbf{x}^{(2)}$, се нарича множеството $I : \mathbf{x}^{(1)} + t\left(\mathbf{x}^{(2)} - \mathbf{x}^{(1)}\right)$, $0 \le t \le 1$. Когато $n = 2$ или $n = 3$, множеството $I$ представлява геометрична отсечка, което оправдава названието в общия случай. ***Начупена линия*** $\gamma = \left[\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}, \ldots, \mathbf{x}^{(m)}\right]$ се нарича множество, състоящо се от краен брой отсечки $I_k : \left[\mathbf{x}^{(k)}, \mathbf{x}^{(k+1)}\right]$, $k = 1, 2, \ldots, m-1$, свързани последователно.

**Определение 1.10.** Множеството $A \subset \mathrm{R}^n$ се нарича ***линейно свързано***, когато всеки две негови точки могат да се съединят с начупена линия. Множеството $D \subset \mathrm{R}^n$ се нарича ***област***, когато е едновременно отворено и линейно свързано. Затворената обвивка $\overline{D}$ на дадена област $D$ се нарича ***затворена област***.

Аналогично се определя ***права*** $g$ в $\mathrm{R}^n$, минаваща през точките $\mathbf{x}^{(1)}$ и $\mathbf{x}^{(2)}$: $g : \mathbf{x}^{(1)} + t\left(\mathbf{x}^{(2)} - \mathbf{x}^{(1)}\right)$, $t \in \mathrm{R}$. ***Хиперравнина*** $\boldsymbol{\alpha}$ в $\mathrm{R}^n$ с нормален вектор $\vec{\mathbf{a}}(a_1, a_2, \ldots, a_n) \neq \vec{\mathbf{0}}$ се определя като съвкупността от точките $\mathbf{x}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, за които е изпълнено равенството $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n + b = 0$. Когато $b = 0$, хипрравнината минава през началото $O(0, 0, \ldots, 0)$. В $\mathrm{R}^3$ хиперравнини са обичайните геометрични равнини, а в $\mathrm{R}^2$ хиперравнини са правите.

**2. Граница на функция и непрекъснатост.** Тук ще разглеждаме функции $f(\mathbf{x}) : E \to \mathrm{R}$, определени в някакво подмножество $E$ на $\mathrm{R}^n$ и приемащи реални стойности. Ще пишем $f(\mathbf{x})$ или $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. При $n = 1$ имаме функция на една променлива $f(x)$, при $n=2$ имаме функция на две променливи, за която обикновено ще пишем $f(x,y)$ вместо $f(x_1,x_2)$, а при $n=3$ имаме функция на три променливи, за която обикновено ще пишем $f(x,y,z)$ вместо $f(x_1,x_2,x_3)$.

Нека е дадена функцията $y=f(\mathbf{x})$, определена в множеството $E\subset \mathrm{R}^{\mathrm{n}}$. Тогава множеството от точки $\Gamma(f)$ в евклидовото пространство $\mathrm{R}^{\mathrm{n+1}}$ от вида $(x_1,x_2,\ldots,x_n,y)$, където $(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in E$ и $y=f(\mathbf{x})$ се нарича ***графика*** на функцията $f(\mathbf{x})$. В случай на функция на две променливи, графиката на функцията има геометричен образ в пространството (Рис. 1.4)

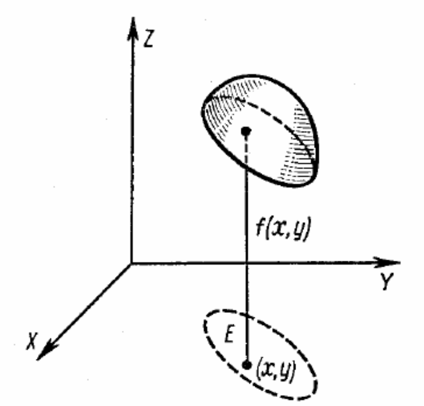


Рис. 1.4

**Определение 1.11.** Нека функцията $f(\mathbf{x})$ е определена в някакво множество $E\subset \mathrm{R}^{\mathrm{n}}$ и $\mathbf{x}^{(0)}$ се явява точка на сгъстяване за $E$. Числото $a$ се нарича граница на функцията $f(\mathbf{x})$ при $\mathbf{x}$ клонящо към $\mathbf{x}^{(0)}$ $\left(\mathbf{x}\to\mathbf{x}^{(0)}\right)$ (или още граница на функцията $f(\mathbf{x})$ в точката $\mathbf{x}^{(0)}$), когато за всяка редица от точки $\left\{\mathbf{x}^{(m)}\in E,\mathbf{x}^{(m)}\neq\mathbf{x}^{(0)}\right\}$, за която $\lim\limits_{m\to\infty}\mathbf{x}^{(m)}=\mathbf{x}^{(0)}$, числовата редица $\left\{f\left(\mathbf{x}^{(m)}\right)\right\}$ клони към числото $a$. Пишем $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}^{(0)}} f(\mathbf{x})=a$.

В горното определение $\mathbf{x}^{(0)}$ е точка на сгъстяване за $E$, следователно съществуват редици $\left\{\mathbf{x}^{(m)}\in E\right\}$, такива, че всяко $\mathbf{x}^{(m)}\neq\mathbf{x}^{(0)}$ и $\lim\limits_{m\to\infty}\mathbf{x}^{(m)}=\mathbf{x}^{(0)}$. Да отбележим специално, че функцията $f(\mathbf{x})$ не се предполага определена в самата точка $\mathbf{x}^{(0)}$. Следващото определение е полезна модификация на определение 1.11 и се отнася за граница на функция по множество.

**Определение 1.12.** Нека функцията $f(\mathbf{x})$ е определена в някакво множество $E\subset \mathrm{R}^{\mathrm{n}}$, $A\subset E$, и $\mathbf{x}^{(0)}$ се явява точка на сгъстяване за $A$. Числото $a$ се нарича граница на функцията $f(\mathbf{x})$ по множеството $A$ при $\mathbf{x}$ клонящо към $\mathbf{x}^{(0)}$, когато за всяка редица от точки $\left\{\mathbf{x}^{(m)}\in A,\mathbf{x}^{(m)}\neq\mathbf{x}^{(0)}\right\}$, за която $\lim\limits_{m\to\infty}\mathbf{x}^{(m)}=\mathbf{x}^{(0)}$, числовата редица $\left\{f\left(\mathbf{x}^{(m)}\right)\right\}$ клони към числото $a$. Пишем $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}^{(0)},\mathbf{x}\in A} f(\mathbf{x})=a$.

Съществуването на граница на функция може да се определи в термините на околности на точката $\mathbf{x}^{(0)}$ и числото $a$.

**Твърдение 1.7.** Числото $a$ е граница на функцията $f(\mathbf{x})$ при $\mathbf{x}\to\mathbf{x}^{(0)}$ тогава и само тогава, когато за всяко $\varepsilon>0$ съществува $\delta$ такова, че $|f(\mathbf{x})-a|<\varepsilon$, когато $\rho\left(\mathbf{x},\mathbf{x}^{(0)}\right)<\delta$, $\mathbf{x}\neq\mathbf{x}^{(0)}$. ■

Твърдение 1.7 дава еквивалентно определение за граница на функция в точка и затова самото то може да се разглежда и като определение.

Определението за граница на функция може да се улесни, ако въведем понятието пробита $\varepsilon$-околност на точка $\mathbf{x}$, $\overset{\circ}{B}(\mathbf{x},\varepsilon)=B(\mathbf{x},\varepsilon)\setminus\{\mathbf{x}\}$. Числото $a$ е граница на функцията $f(\mathbf{x})$ при $\mathbf{x}\to\mathbf{x}^{(0)}$ тогава и само тогава, когато за всяко $\varepsilon>0$ съществува $\delta$ такова, че $f(\mathbf{x})\in B(a,\varepsilon)$, когато $\mathbf{x}\in\overset{\circ}{B}(\mathbf{x}^{(0)},\delta)$.

Ако функцията $f(\mathbf{x}):E\to\mathsf{R}$ има граница $a$ при $\mathbf{x}\to\mathbf{x}^{(0)}$, където $\mathbf{x}^{(0)}$ е точка на сгъстяване за множеството $E$, то $f(\mathbf{x})$ има същата граница и по всяко множество $A\subset E$, за което $\mathbf{x}^{0}$ е точка на сгъстяване. В общия една функция може да има граница по някакво множество и да няма граница по друго (или да има друга граница).

Верността на следното твърдение произтича непосредствено от определенията.

**Твърдение 1.8.** Нека $\mathbf{x}^{(0)}$ е точка на сгъстяване за дефиниционното множество на функциите $f(\mathbf{x})$ и $g(\mathbf{x})$, $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}^{(0)}} f(x)=a$ и $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}^{(0)}} g(x)=b$. Тогава:

**1**) функцията $f(\mathbf{x})+g(\mathbf{x})$ също има граница в $\mathbf{x}^{(0)}$, при което $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}^{(0)}}[f(\mathbf{x})+g(\mathbf{x})]=a+b$;

**2**) функцията $f(\mathbf{x})g(\mathbf{x})$ също има граница в $\mathbf{x}^{(0)}$, при което $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}^{(0)}}[f(\mathbf{x})g(\mathbf{x})]=ab$;

**3**) ако $b\neq 0$, то функцията $f(\mathbf{x})/g(\mathbf{x})$ също има граница в $\mathbf{x}^{(0)}$, при което $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}^{(0)}}[f(\mathbf{x})/g(\mathbf{x})]=a/b$. ■

Сега сме готови да дадем определения за непрекъснатост на функция в точка и множество.

**Определение 1.13.** Нека функцията $f(\mathbf{x})$ е определена в някакво множество $E\subset\mathsf{R}^{\mathsf{n}}$ и $\mathbf{x}^{(0)}\in E$ се явява точка на сгъстяване за $E$. Казва се, че $f(\mathbf{x})$ е ***непрекъсната*** в точката $\mathbf{x}^{(0)}$ (***по съвкупност на променливите***), когато $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}^{(0)}} f(\mathbf{x})=f(\mathbf{x}^{(0)})$. По дефиниция приемаме, че ако $\mathbf{x}^{(0)}$ е изолирана точка за $E$, то $f(\mathbf{x})$ е непрекъсната в $\mathbf{x}^{(0)}$. Ако функцията $f(\mathbf{x})$ е непрекъсната във всяка точка от дефиниционното си множество $E$, то тя се нарича непрекъсната в $E$.

Например метриката е непрекъсната по всяка от двете си променливи, т.е. функциите $f(\mathbf{x})=\rho(\mathbf{x},\mathbf{y}^{(0)})$ и $g(\mathbf{y})=\rho(\mathbf{x}^{(0)},\mathbf{y})$ са непрекъснати във всяка точка на $\mathsf{R}^{\mathsf{n}}$.

**Определение 1.14.** Нека функцията $f(\mathbf{x})$ е определена в някакво множество $E\subset\mathsf{R}^{\mathsf{n}}$, $A\subset E$, и $\mathbf{x}^{(0)}$ се явява точка на сгъстяване за $A$. Функцията $f(\mathbf{x})$ се нарича непрекъсната по множеството $A$ при $\mathbf{x}$ клонящо към $\mathbf{x}^{(0)}$, когато $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}^{(0)},\mathbf{x}\in A} f(\mathbf{x})=f(\mathbf{x}^{(0)})$.

При определението за непрекъснатост в точка се иска функцията да бъде дефинирана в тази точка и по този начин определението за непрекъснатост може да се изкаже в следния вид.

**Твърдение 1.9.** Функцията $f(\mathbf{x})$, определена в множеството $E$, е непрекъсната в точката $\mathbf{x}^{(0)}\in E$ тогава и само тогава, когато:

**1**) за всяка редица от точки $\{\mathbf{x}^{(m)}\in E\}$, за която $\lim\limits_{m\to\infty}\mathbf{x}^{(m)}=\mathbf{x}^{(0)}$, числовата редица $\{f(\mathbf{x}^{(m)})\}$ е сходяща и клони към $f(\mathbf{x}^{(0)})$;

**2**) за всяко $\varepsilon > 0$ съществува $\delta$ такова, че $\left|f(\mathbf{x}) - f\left(\mathbf{x}^{(0)}\right)\right| < \varepsilon$, когато $\rho\left(\mathbf{x}, \mathbf{x}^{(0)}\right) < \delta$. ■

Твърдение 1.9 се модифицира по очевиден начин за случая на непрекъснатост по множество.

От твърдение 1.8 следва, че ако $f(\mathbf{x})$ и $g(\mathbf{x})$ са непрекъснати в точката $\mathbf{x}^{(0)}$, то $f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})$, $f(\mathbf{x})g(\mathbf{x})$ и $f(\mathbf{x})/g(\mathbf{x})$ $\left(g\left(\mathbf{x}^{(0)}\right) \neq 0\right)$ също са непрекъснати в $\mathbf{x}^{(0)}$. Аналогично твърдение е вярно и когато $f(\mathbf{x})$ и $g(\mathbf{x})$ са непрекъснати в някакво множество $E$.

***Композицията на непрекъснати функции също е непрекъсната функция.***

Функциите, които се получават от променливите $x_1$, $x_2$, ..., $x_n$ чрез краен брой композиции на основните елементарни функции на една променлива и операциите събиране, умножение и деление се наричат ***елементарни функции*** на променливите $x_1$, $x_2$, ..., $x_n$. ***Елементарните функции са непрекъснати във всяка вътрешна точка на дефиниционната си област.***

Ако една функция е определена и непрекъсната над компактно множество, то тя е ограничена и равномерно непрекъсната. Една функция се нарича ***ограничена*** (отгоре/отдолу) в дадено множество, когато множеството на нейните стойности е ограничено (отгоре/отдолу).

**Теорема 1.5.** Нека функцията $f(\mathbf{x})$ е определена над компактното множество $K \subset \mathsf{R}^n$. Тогава $f(\mathbf{x})$ е ограничена, при което $f(\mathbf{x})$ достига най-голяма и най-малка стойности. Съществуват точка $\mathbf{x}_{\max} \in K$ и точка $\mathbf{x}_{\min} \in K$, за които

$$f(\mathbf{x}_{\max}) = \max_{\mathbf{x}\in K} f(\mathbf{x}) \text{ и } f(\mathbf{x}_{\min}) = \min_{\mathbf{x}\in K} f(\mathbf{x}).$$

*Доказателство.* Да допуснем, че $f(\mathbf{x})$ не е ограничена, т.е. че множеството от нейните стойности не е ограничено. Тогава за всяко $m \in \mathsf{N}$ може да се намери $\mathbf{x}^{(m)} \in K$, за което $\left|f\left(\mathbf{x}^{(m)}\right)\right| > m$. По условие множеството $K$ е компактно, следователно от редицата $\left\{\mathbf{x}^{(m)}\right\}$ може да се избере сходяща подредица с граница от $K$, $\lim\limits_{\nu\to\infty} \mathbf{x}^{(m_\nu)} = \mathbf{x}^{(0)} \in K$. По условие функцията $f(\mathbf{x})$ е непрекъсната, следователно $\lim\limits_{\nu\to\infty} f\left(\mathbf{x}^{(m_\nu)}\right) = f\left(\mathbf{x}^{(0)}\right)$, което противоречи на заключението, че $\left|f\left(\mathbf{x}^{(m_\nu)}\right)\right| > m_\nu$.

Нека $\mathbf{M}$ и $\mathbf{m}$ са точната горна и точната долна граница на множеството от стойностите на $f(\mathbf{x})$. Тогава за всяко $\varepsilon > 0$ съществува някакво $x_\varepsilon \in K$, за което $\mathbf{M} - \varepsilon < f(\mathbf{x}_\varepsilon) \le \mathbf{M}$; в частност за всяко $m \in \mathsf{N}$ съществува $\mathbf{x}^{(m)} \in K$, за което $\mathbf{M} - 1/m < f(\mathbf{x}_m) \le \mathbf{M}$. Понеже $K$ е компактно, от редицата $\left\{\mathbf{x}^{(m)}\right\}$ може да се избере сходяща подредица с граница от $K$, $\lim\limits_{\nu\to\infty} \mathbf{x}^{(m_\nu)} = \mathbf{x}^{(0)} \in K$, за която

$$\mathbf{M} - 1/m_\nu < f\left(\mathbf{x}_{m_\nu}\right) \le \mathbf{M}.$$

Сега от непрекъснатостта на $f(\mathbf{x})$, след граничен преход по $\nu \to \infty$, от последното следва, че $f\left(\mathbf{x}^{(0)}\right) = \mathbf{M}$ и можем да положим $\mathbf{x}_{\max} = \mathbf{x}^{(0)}$. Аналогично се доказва съществуването на $\mathbf{x}_{\min} \in K$ с указаното свойство. ■

**Определение 1.15.** Казва се, че функцията $f(\mathbf{x}): E \to \mathsf{R}$, $E \subset \mathsf{R}^n$, е равномерно непрекъсната, когато за всяко $\varepsilon > 0$ може да се намери $\delta$ такова, че $\left|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})\right| < \varepsilon$, винаги когато $\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) < \delta$, $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E$.

Ако една функция $f(\mathbf{x})$ е равномерно непрекъсната в множеството $E$, то тя е и непрекъсната във всяка точка от $\mathbf{x}^{(0)} \in E$ ($f(\mathbf{x})$ е непрекъсната в $E$), понеже за всяко $\varepsilon > 0$ може да се намери $\delta$ такова, че $\left|f(\mathbf{x}) - f\left(\mathbf{x}^{(0)}\right)\right| < \varepsilon$, когато $\rho\left(\mathbf{x}, \mathbf{x}^{(0)}\right) < \delta$. Равномерната непрекъснатост означава, че това $\delta$ може да се избере едно също за всяко $\mathbf{x}^{(0)} \in E$, докато обикновената непрекъснатост допуска $\delta$ да зависи от $\mathbf{x}^{(0)}$.

Една функция може да бъде непрекъсната, но да не бъде равномерно непрекъсната, например функцията на една променлива $f(x): (0,1] \to \mathrm{R}$ е непрекъсната в дефиниционното си множество $(0,1]$ но не е равномерно непрекъсната. Ако обаче дефиниционната област на една непрекъсната функция е компактно множество, то тя е и равномерно непрекъсната.

**Теорема 1.6.** Нека функцията $f(\mathbf{x})$ е определена и непрекъсната над компактното множество $K \subset \mathrm{R}^{\mathrm{n}}$. Тогава $f(\mathbf{x})$ е равномерно непрекъсната. ■

Нека $f(\mathbf{x})$ е определена в областта $E \subset \mathrm{R}^{\mathrm{n}}$ и нека $\mathbf{x}^{(1)}$ и $\mathbf{x}^{(2)}$ са две точки от $E$. По определение $E$ е отворено и линейно свързано множество, следователно точките $\mathbf{x}^{(1)}$ и $\mathbf{x}^{(2)}$ могат да бъдат съединени с непрекъсната (начупена) линия $\gamma: \mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$, $\alpha \le t \le \beta$, $\mathbf{x}(\alpha) = \mathbf{x}^{(1)}$, $\mathbf{x}(\beta) = \mathbf{x}^{(2)}$. Да положим $f\left(\mathbf{x}^{(1)}\right) = a$ и $f\left(\mathbf{x}^{(2)}\right) = b$, при което за определеност да предположим, че $a \le b$. Тогава функцията $\varphi(t) = f(\mathbf{x}(t))$ е определена и непрекъсната в интервала $[\alpha, \beta]$ и съгласно теоремата за междинните стойности за непрекъсната функция на една променлива, за всяко $c$ между $a$ и $b$ съществува някакво $\theta \in [\alpha, \beta]$, за което $\varphi(\theta) = c$, което означава, че съществува точка $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\theta) \in \gamma$, за която $f(\mathbf{x}) = c$. Последното твърдение е обобщение на познатата ***теорема за междинните стойности*** на функция на една променлива.