Лекция 2

§2. Частни производни. Формула на Тейлър

1. Частни производни и диференцируемост. Нека функцията $f(\mathbf{x})$ е определена в някаква околност на точката $\mathbf{x}^{(0)}\left(x_1^{(0)},x_2^{(0)},\dots,x_n^{(0)}\right)$. Да разгледаме функцията на една променлива $\varphi(x_1)=f\left(x_1,x_2^{(0)},\dots,x_n^{(0)}\right)$. Ако функцията $\varphi(x_1)$ е диференцируема в точката $x_1=x_1^{(0)}$, то нейната производна $\varphi'\left(x_1^{(0)}\right)$ се нарича ***частна производна*** на $f(\mathbf{x})$ относно променливата x_1 в точката $\mathbf{x}^{(0)}$ и се бележи с

$$\frac{\partial f\left(\mathbf{x}^{(0)}\right)}{\partial x_1}=\lim_{\Delta x_1\to 0}\frac{f\left(x_1^{(0)}+\Delta x_1,x_2^{(0)},\dots,x_n^{(0)}\right)-f\left(x_1^{(0)},x_2^{(0)},\dots,x_n^{(0)}\right)}{\Delta x_1}.$$

Аналогично се определят и останалите частни производни,

$$\frac{\partial f\left(\mathbf{x}^{(0)}\right)}{\partial x_k},\ k=2,\dots,n.$$

За частните производни се употребяват следните означения

$$\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_k}=f_{x_k}(\mathbf{x})=D_k f(\mathbf{x})=f'_{x_k}(\mathbf{x})=\frac{\partial}{\partial x_k}f(\mathbf{x}).$$

При функция на две променливи $f(x,y)$ имаме две частни производни

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\ \text{и}\ \frac{\partial f(x,y)}{\partial y},$$

а за функция на три променливи $f(x,y,z)$,

$$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x},\ \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y}\ \text{и}\ \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z}.$$

От определението следва, че когато търсим частната производна на елементарна функция по дадена променлива, останалите променливи се интерпретират като константи. Например за функцията $f(x,y,z)=xy^2+\sin\left(x^2-y^3\right)+2xyz+1$ намираме

$$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x}=y^2+2x\cos\left(x^2-y^3\right)+2yz,$$

$$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y}=2xy-3y^2\cos\left(x^2-y^3\right)+2xz,$$

$$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z}=2xy.$$

Определение 2.1. Нека функцията $f(\mathbf{x})$ е определена в околност на $\mathbf{x}^{(0)}$. Казва се, че $f(\mathbf{x})$ е диференцируема в $\mathbf{x}^{(0)}$, когато в тази околност

(2.1) $$f(\mathbf{x})-f\left(\mathbf{x}^{(0)}\right)=A_1\left(x_1-x_1^{(0)}\right)+A_2\left(x_2-x_2^{(0)}\right)+\dots+A_n\left(x_n-x_n^{0}\right)+o\left(\rho\left(\mathbf{x},\mathbf{x}^{(0)}\right)\right),$$

за някакви константи A_1, A_2, ..., A_n.

Тук $\rho\left(\mathbf{x},\mathbf{x}^{(0)}\right)=\left|\mathbf{x}-\mathbf{x}^{(0)}\right|$ е евклидовото разстояние между $\mathbf{x}$ и $\mathbf{x}^{(0)}$,

$$\rho\left(\mathbf{x},\mathbf{x}^{(0)}\right)=\sqrt{\sum_{k=1}^{n}\left(x_k-x_k^{(0)}\right)^2}.$$

С помощта на символа $o(q)$ означаваме величина, за която $\lim\limits_{q\to 0}\frac{o(q)}{q}=0$. В тези означения е полезен записът $o\left(\left|\mathbf{x}-\mathbf{x}^{(0)}\right|\right)=\left|\mathbf{x}-\mathbf{x}^{(0)}\right|\varepsilon\left(\left|\mathbf{x}-\mathbf{x}^{(0)}\right|\right)$, където $\varepsilon(q)$ е величина, за която $\lim\limits_{q\to 0}\varepsilon(q)=0$. Ако използваме записа $\mathbf{x}=\mathbf{x}^{(0)}+\Delta\mathbf{x}$, където $\Delta\mathbf{x}=(\Delta x_1,\Delta x_2,\dots,\Delta x_n)$, и $\Delta f\left(\mathbf{x}^{(0)}\right)=f\left(\mathbf{x}^{(0)}+\Delta\mathbf{x}\right)-f\left(\mathbf{x}^{(0)}\right)$, то (2.1) приема вида

(2.2) $\quad \Delta f\left(\mathbf{x}^{(0)}\right)=A_1\Delta x_1+A_2\Delta x_2+\dots+A_n\Delta x_n+|\Delta\mathbf{x}|\varepsilon(|\Delta\mathbf{x}|).$

Диференцируемостта една функция в дадена точка е локално свойство. Формулите (2.1) и (2.2) означават, че ако $f(\mathbf{x})$ е диференцируема в точката $\mathbf{x}^{(0)}$, то нейното локално поведение в околност на $\mathbf{x}^{(0)}$ е линейно, като на линейната функция

$$l(\mathbf{x})=f\left(\mathbf{x}^{(0)}\right)+A_1\left(x_1-x_1^{(0)}\right)+A_2\left(x_2-x_2^{(0)}\right)+\dots+A_n\left(x_n-x_n^{0}\right).$$

Изразът

(2.3) $\quad df\left(\mathbf{x}^{(0)}\right)=A_1dx_1+A_2dx_2+\dots+A_ndx_n$

се нарича ***пълен диференциал*** на функцията $f(\mathbf{x})$ в $\mathbf{x}^{(0)}$.

Твърдение 2.1. Нека функцията $f(\mathbf{x})$ е определена в околност на точката $\mathbf{x}^{(0)}$ и диференцируема в $\mathbf{x}^{(0)}$. Тогава частните производни на $f(\mathbf{x})$ в $\mathbf{x}^{(0)}$ съществуват, при което $A_k=\dfrac{\partial f\left(\mathbf{x}^{(0)}\right)}{\partial x_k}$, $k=1,2,\dots,n$, следователно

$$\Delta f\left(\mathbf{x}^{(0)}\right)=\frac{\partial f\left(\mathbf{x}^{(0)}\right)}{\partial x_1}\Delta x_1+\frac{\partial f\left(\mathbf{x}^{(0)}\right)}{\partial x_2}\Delta x_2+\dots+\frac{\partial f\left(\mathbf{x}^{(0)}\right)}{\partial x_n}\Delta x_n+|\Delta\mathbf{x}|\varepsilon(|\Delta\mathbf{x}|),$$

а формулата за пълния диференциал (2.3) приема вида

$$df\left(\mathbf{x}^{(0)}\right)=\frac{\partial f\left(\mathbf{x}^{(0)}\right)}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial f\left(\mathbf{x}^{(0)}\right)}{\partial x_2}dx_2+\dots+\frac{\partial f\left(\mathbf{x}^{(0)}\right)}{\partial x_2}dx_n.$$

Доказателство. Ще докажем, че $A_1=\dfrac{\partial f\left(\mathbf{x}^{(0)}\right)}{\partial x_1}$. Останалите равенства се доказват аналогично. Нека дадем нарастване само по x_1, $\Delta\mathbf{x}=(\Delta x_1,0,\dots,0)$. Тогава от (2.2) получаваме

$$f\left(x_1^{(0)}+\Delta x_1,x_2^{(0)},\dots,x_n^{(0)}\right)-f\left(x_1^{(0)},x_2^{(0)},\dots,x_n^{(0)}\right)=A_1\Delta x_1+|\Delta x_1|\varepsilon(\Delta x_1),$$

следователно

$$\frac{f\left(x_1^{(0)}+\Delta x_1,x_2^{(0)},\dots,x_n^{(0)}\right)-f\left(x_1^{(0)},x_2^{(0)},\dots,x_n^{(0)}\right)}{\Delta x_1}=A_1+\varepsilon(|\Delta x_1|),$$

$$\lim_{\Delta x_1\to 0}\frac{f\left(x_1^{(0)}+\Delta x_1,x_2^{(0)},\dots,x_n^{(0)}\right)-f\left(x_1^{(0)},x_2^{(0)},\dots,x_n^{(0)}\right)}{\Delta x_1}=A_1.$$

Последното по определение означава, че $A_1=\dfrac{\partial f\left(\mathbf{x}^{(0)}\right)}{\partial x_1}$. ■

Според твърдение 2.1, ако функцията е диференцируема, то тя притежава частни производни. За да бъде вярно обратното твърдение, е необходимо да бъдат налице допълнителни условия.

Теорема 2.1. Нека функцията $f(\mathbf{x})$ е определена в околност на точката $\mathbf{x}^{(0)}$ и нека в тази околност всичките частни производни $\dfrac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_k}$, $k=1,2,\dots,n$, съществуват и са непрекъснати в $\mathbf{x}^{(0)}$. Тогава $f(\mathbf{x})$ е диференцируема в $\mathbf{x}^{(0)}$. ■

Да отбележим, че при функция на една променлива, диференцируемостта и съществуването на производна като граница на диференчното частно са еквивалентни условия без изискване за непрекъснатост на производната.

Теорема 2.1 оправдава следното определение. Функцията $f(\mathbf{x})$ се нарича ***непрекъснато диференцируема в областта*** D (отворено и линейно свързано множество), когато всичките частни производни на $f(\mathbf{x})$ съществуват и са непрекъснати в D. Ако $f(\mathbf{x})$ е непрекъснато диференцируема в D, то тя е диференцируема във всяка точка на D. Освен това, ще казваме, че функцията $f(\mathbf{x})$ е ***непрекъснато диференцируема в множеството*** M, когато съществува област D, съдържаща M, $M \subset D$, такава, че $f(\mathbf{x})$ е непрекъснато диференцируема в D. Например $f(\mathbf{x})$ е ***непрекъснато диференцируема в точката*** $\mathbf{x}^{(0)}$, когато е непрекъснато диференцируема в някаква околност на $\mathbf{x}^{(0)}$.

Непосредствено от определението се вижда верността на

Твърдение 2.2. Нека функцията $f(\mathbf{x})$ е диференцируема в точката $\mathbf{x}^{(0)}$. Тогава $f(\mathbf{x})$ е непрекъсната в $\mathbf{x}^{(0)}$. ■

За функция на много променливи можем да прилагаме формулата за крайните нараствания по всяка от променливите, когато са налице съответните условия. Например

$$f(x_2, y) - f(x_1, y) = \frac{\partial f(\xi, y)}{\partial x}(x_2 - x_1),$$

където ξ е число между x_1 и x_2. Да разгледаме функцията на две променливи $f(x, y)$, която е непрекъснато диференцируема в точката (x_0, y_0), и нека променливите x и y са функции на променливата t, при което $x(t)$ и $y(t)$ са диференцируеми в точката t_0 и $x_0 = x(t_0)$, $y_0 = y(t_0)$. Да намерим производната на съставната функция $\Phi(t) = f(x(t), y(t))$ в точката t_0. Имаме

$$\Delta\Phi = \Phi(t_0 + \Delta t) - \Phi(t_0) = f(x(t_0 + \Delta t), y(t_0 + \Delta t)) - f(x(t_0), y(t_0)) =$$
$$= f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$$

където $\Delta x = x(t_0 + \Delta t) - x(t_0)$ и $\Delta y = y(t_0 + \Delta t) - y(t_0)$. Преобразуваме последното във вида

$$\Delta\Phi = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0 + \Delta y) + f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0),$$

откъдето чрез формулата за крайните нараствания получаваме

$$\Delta\Phi = \frac{\partial f(\xi, y_0 + \Delta y)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(x_0, \eta)}{\partial y}\Delta y, \tag{2.4}$$

където ξ е число между x_0 и $x_0 + \Delta x$, а η е число между y_0 и $y_0 + \Delta y$. Производната на $\Phi(t)$ в t_0 се определя като границата на диференчното частно $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$, когато тази граница съществува. Сега от (2.4) намираме

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0}\left[\frac{\partial f(\xi, y_0 + \Delta y)}{\partial x}\frac{\Delta x}{\Delta t} + \frac{\partial f(x_0, \eta)}{\partial y}\frac{\Delta y}{\Delta t}\right] = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}x'(t_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}y'(t_0),$$

понеже при граничния преход

$$\lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t} = x'(t_0),\ \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta t} = y'(t_0),\ \lim_{\Delta t \to 0}\xi = x_0,\ \lim_{\Delta t \to 0}\eta = y_0,\ \lim_{\Delta t \to 0}\Delta x = \lim_{\Delta t \to 0}\Delta y = 0,$$

а частните производни $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}$ и $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$ се предполагат непрекъснати. По този начин получихме правилото за диференциране на съставни функции

$$\Phi'(t) = f'_x(x(t), y(t))x'(t) + f'_y(x(t), y(t))y'(t),$$

което можем да запишем като

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}.$$

За функция на три променливи $f(x, y, z)$ аналогично се доказва, че

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dt} \text{ и т.н.} \tag{2.5}$$

Да предположим сега, че променливите x, y и z от своя страна са функции на двете променливи u и v, $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ и $z = z(u, v)$. Понеже частната производна е обикновена производна относно дадена променлива, от (2.5) следва

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u} \text{ и } \frac{\partial f}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial v},$$

което се обобщава по очевиден начин за повече променливи. По този начин доказахме

Теорема 2.2. Нека функцията $f(\mathbf{y})$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_m)$, е непрекъснато диференцируема в точката $\mathbf{y}^{(0)} = \left(y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \ldots, y_m^{(0)}\right)$ и освен това $y_k = y_k(\mathbf{x})$, $k = 1,2,\ldots,m$, където функциите $y_k(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, са непрекъснато диференцируеми в точката $\mathbf{x}^{(0)} = \left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}\right)$ и $y_k\left(\mathbf{x}^{(0)}\right) = y_k^{(0)}$, $k = 1,2,\ldots,m$. Тогава съставната функция $\Phi(\mathbf{x}) = f(y_1(\mathbf{x}), y_2(\mathbf{x}), \ldots, y_m(\mathbf{x}))$ е непрекъснато диференцируема в точката $\mathbf{x}^{(0)}$, при което

$$\frac{\partial \Phi\left(\mathbf{x}^{(0)}\right)}{\partial x_k} = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial \Phi\left(\mathbf{y}^{(0)}\right)}{\partial y_j}\frac{\partial y_j\left(\mathbf{x}^{(0)}\right)}{\partial x_k},\ k = 1,2,\ldots,n. \ \blacksquare \tag{2.6}$$

Формулата (2.6) се записва накратко

$$\frac{\partial f}{\partial x_k} = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial y_j}\frac{\partial y_j}{\partial x_k},\ k = 1,2,\ldots,n.$$

Да разгледаме диференциала на функцията $f(x, y)$, където $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, разглеждана като функция на независимите променливи u и v

$$df = \frac{\partial f}{\partial u}du + \frac{\partial f}{\partial v}dv = \left[\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}\right]du + \left[\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}\right]dv,$$

откъдето след прегрупиране на събираемите намираме

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}\left[\frac{\partial x}{\partial u}du + \frac{\partial x}{\partial v}dv\right] + \frac{\partial f}{\partial y}\left[\frac{\partial y}{\partial u}du + \frac{\partial y}{\partial v}dv\right],$$

което дава очакваната формула

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy,$$

понеже по определение

$$dx = \frac{\partial x}{\partial u}du + \frac{\partial y}{\partial v}dv,\ dy = \frac{\partial y}{\partial u}du + \frac{\partial y}{\partial v}dv.$$

Този извод показва свойството ***инвариантност на диференциала***, което означава, че стойността на диференциала в дадена точка не се променя при смяна на променливите.

Пълният диференциал притежава следните свойства

$$d(u+v) = du + dv,\ d(uv) = vdu + udv,\ d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2},$$

които се проверяват лесно от определенията. Например да намерим диференциала на функцията $\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$. Полагаме $u = \frac{y}{x}$ и пресмятаме

$$d\left(\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\right)=d(\operatorname{arctg}u)=\frac{du}{1+u^2}=\frac{d\frac{y}{x}}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}=\frac{x^2}{x^2+y^2}\frac{xdy-ydx}{x^2}=\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}.$$

Градиент $\nabla f(\mathbf{x})$ на функцията $f(\mathbf{x})$ се нарича векторът от нейните частни производни

$$\nabla f(\mathbf{x})=\left(\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_1},\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_2},\dots,\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_n}\right).$$

Нека $f(\mathbf{x})$ е непрекъснато диференцируема по отсечката I с краища точките $\mathbf{x}^{(1)}$ и $\mathbf{x}^{(2)}$, които предполагаме различни. Тази отсечка има следното параметрично представяне $I:\mathbf{x}=\mathbf{x}^{(1)}+t\left(\mathbf{x}^{(2)}-\mathbf{x}^{(1)}\right)$, $t\in[0,1]$. Да разгледаме функцията на една променлива $\varphi(t)=f\left(\mathbf{x}^{(1)}+t\left(\mathbf{x}^{(2)}-\mathbf{x}^{(1)}\right)\right)$. Имаме

$$\varphi(t)=f\left(x_1^{(1)}+t\left(x_1^{(2)}-x_1^{(1)}\right),x_2^{(1)}+t\left(x_2^{(2)}-x_2^{(1)}\right),\dots,x_n^{(1)}+t\left(x_n^{(2)}-x_n^{(1)}\right)\right).$$

По определение $\varphi(0)=f\left(\mathbf{x}^{(1)}\right)$ и $\varphi(1)=f\left(\mathbf{x}^{(2)}\right)$. От формулата за крайните нараствания следва, че $\varphi(1)-\varphi(0)=\varphi'(\xi)$, за някое $\xi\in(0,1)$. Сега от правилото за диференциране на съставна функция се получава, че

$$f\left(\mathbf{x}^{(2)}\right)-f\left(\mathbf{x}^{(1)}\right)=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial f\left(\mathbf{x}^{(1)}+\xi\left(\mathbf{x}^{(2)}-\mathbf{x}^{(1)}\right)\right)}{\partial x_k}\left(x_k^{(2)}-x_k^{(1)}\right).$$

На езика на скаларното произведение, последната формула може да се запише

$$f\left(\mathbf{x}^{(2)}\right)-f\left(\mathbf{x}^{(1)}\right)=\left\langle\nabla f\left(\mathbf{x}^{(1)}+\xi\left(\mathbf{x}^{(2)}-\mathbf{x}^{(1)}\right)\right),\mathbf{x}^{(2)}-\mathbf{x}^{(1)}\right\rangle.$$

Точката $\mathbf{x}^{(0)}=\mathbf{x}^{(1)}+\xi\left(\mathbf{x}^{(2)}-\mathbf{x}^{(1)}\right)$ лежи вътре в отсечката I. По този начин доказахме

Теорема 2.3 ***(за крайните нараствания).*** Нека $f(\mathbf{x})$ е непрекъснато диференцируема по отсечката I с краища $\mathbf{x}^{(1)}$ и $\mathbf{x}^{(2)}$ ($\mathbf{x}^{(1)}\neq\mathbf{x}^{(2)}$). Тогава

$$f\left(\mathbf{x}^{(2)}\right)-f\left(\mathbf{x}^{(1)}\right)=\left\langle\nabla f\left(\mathbf{x}^{(0)}\right),\mathbf{x}^{(2)}-\mathbf{x}^{(1)}\right\rangle,$$

за някоя точка $\mathbf{x}^{(0)}$ от отсечката I. ■

Нека $\mathbf{n}=(l_1,l_2,\dots,l_n)$ е даден единичен вектор и функцията $f(\mathbf{x})$ е непрекъснато диференцируема в точката $\mathbf{x}^{(0)}$. Да положим $\varphi(t)=f\left(\mathbf{x}^{(0)}+t\mathbf{n}\right)$. Тогава производната $\varphi'(0)$ се нарича ***производна*** на функцията $f(\mathbf{x})$ ***по направление*** $\mathbf{n}$ в точката $\mathbf{x}^{(0)}$ и се бележи с $\frac{\partial f\left(\mathbf{x}^{(0)}\right)}{\partial\mathbf{n}}$. Имаме

$$\varphi(t)=f\left(x_1^{(0)}+tl_1,x_2^{(0)}+tl_2,\dots,x_n^{(0)}+tl_n\right),$$

следователно, съгласно правилото за диференциране на съставни функции

$$\frac{\partial f\left(\mathbf{x}^{(0)}\right)}{\partial\mathbf{n}}=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial f\left(\mathbf{x}^{(0)}\right)}{\partial x_k}l_k=\left\langle\nabla f\left(\mathbf{x}^{(0)}\right),\mathbf{n}\right\rangle. \tag{2.7}$$

Частните производни могат да се разглеждат като частни случаи на производни по направление. Производната по направление $\mathbf{n}=(1,0,\dots,0)$ съвпада с частната производна $\frac{\partial f\left(\mathbf{x}^{(0)}\right)}{\partial x_1}$, производната по направление $\mathbf{n}=(0,1,\dots,0)$ съвпада с частната производна $\frac{\partial f\left(\mathbf{x}^{(0)}\right)}{\partial x_2}$ и т.н.

При функция на три променливи $f(x,y,z)$, векторът $\mathbf{n}$ се задава чрез своите направляващи косинуси, $\mathbf{n}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$, и формулата (2.7) приема вида

(2.8) $$\frac{\partial f(x_0,y_0,z_0)}{\partial \mathbf{n}}=\frac{\partial f(x_0,y_0,z_0)}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f(x_0,y_0,z_0)}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial f(x_0,y_0,z_0)}{\partial z}\cos\gamma\,.$$

Чрез оператора ∇ (***набла***) , определен в тримерното пространство както следва

$$\nabla=\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x}+\mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y}+\mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z},$$

градиентът на $f(x,y,z)$ може да се разглежда като вектор, получен след прилагането на ∇ върху функцията $f(x,y,z)$,

$$\nabla f(x,y,z)=\left(\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x}+\mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y}+\mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)f(x,y,z)=\mathbf{i}\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x}+\mathbf{j}\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y}+\mathbf{k}\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z}.$$

Формалното скаларно произведение на $\mathbf{n}$ и ∇ има вида

$$\langle\mathbf{n},\nabla\rangle=\cos\alpha\frac{\partial}{\partial x}+\cos\beta\frac{\partial}{\partial y}+\cos\gamma\frac{\partial}{\partial z}$$

и по този начин производната (2.8) се записва

$$\frac{\partial f(x_0,y_0,z_0)}{\partial \mathbf{n}}=\langle\mathbf{n},\nabla\rangle f(x_0,y_0,z_0).$$

Производната по направление показва поведението на функцията в това направление от тип нарастване/намаляване по добре известния начин.

Частните производни от втори и по висок ред се определят последователно чрез производните от по-нисък ред,

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_j}\right)=\frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_i\partial x_j}.$$

За функция на две променливи имаме следните четири производни от втори ред

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\partial x}=\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2},\ \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\partial y},\ \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y\partial x},\ \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}.$$

При достатъчно общи предположения, ***смесените производни са равни***

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y\partial x}.$$

Такова равенство е налице например, ако и двете смесени производни са непрекъснати. Ние винаги ще предполагаме равенство на смесените производни, което се отнася и за частните производни от ред трети и по-висок, когато се налага да боравим с тях. Например

$$\frac{\partial^3 f(x,y)}{\partial x\partial x\partial y}=\frac{\partial^3 f(x,y)}{\partial x\partial y\partial x}=\frac{\partial^3 f(x,y)}{\partial y\partial x\partial x}\ \text{и т.н.}$$

Това предположение оправдава означението

$$\frac{\partial^m f(x,y)}{\partial x^j\partial y^{m-j}},$$

което показва, че частната производна е от ред m, при което по променливата x е диференцирано j пъти, а по променливата y е диференцирано $m-j$ пъти, а последователността , по която се извършва това диференциране е без значение.

Без да привеждаме съображения за целесъобразност, определяме пълен диференциал от втори ред за функцията $f(\mathbf{x})$,

$$d^2 f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j \ ,$$

а пълният диференциал от трети ред е

$$d^3 f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^3 f(\mathbf{x})}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} dx_i dx_j dx_k \ \text{ и т.н.}$$

2. Формула на Тейлър. Да разгледаме отначало функцията на две променливи $f(x, y)$, за която ще предполагаме, че е $m+1$ пъти непрекъснато диференцируема в околност на точката $M_0(x_0, y_0)$. Нека $M = M(x, y)$ е точката с текущи координати. Да положим $\varphi(t) = f(x_0 + t(x - x_0), y_0 + t(y - y_0))$. За функцията на една променлива $\varphi(t)$ ще приложим познатата формула на Тейлър с остатъчен член във формата на Лагранж, в околност на $t_0 = 0$. Съгласно тази формула

$$(2.9) \qquad \varphi(1) = \varphi(0) + \varphi'(0) + \frac{\varphi''(0)}{2} + \frac{\varphi'''(0)}{6} + \cdots + \frac{\varphi^{(m)}(0)}{m!} + \frac{\varphi^{(m+1)}(\xi)}{(m+1)!},$$

където $\xi \in (0,1)$. Формулата за развитие на функцията $f(x, y)$ по Тейлър в околност на точката $M_0(x_0, y_0)$ се получава от (2.9) след привеждане на събираемите в подходящ вид. Очевидно

$$\varphi(0) = f(x_0, y_0) = f(M_0) \ \text{ и } \ \varphi(1) = f(x, y) = f(M).$$

За да пресметнем $\varphi'(0)$ трябва първо на намерим $\varphi'(t)$. От правилото за диференциране на съставни функции имаме

$$(2.10) \quad \varphi'(t) = \frac{\partial f(x_0 + t(x - x_0), y_0 + t(y - y_0))}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial f(x_0 + t(x - x_0), y_0 + t(y - y_0))}{\partial y}(y - y_0),$$

следователно

$$\varphi'(0) = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}(y - y_0) = f'_x(M_0)\Delta x + f'_y(M_0)\Delta y \ ,$$

където $\Delta x = x - x_0$ и $\Delta y = y - x_0$. За да намерим $\varphi''(t)$ диференцираме (2.10) въз основа на правилото за диференциране на съставни функции, след което по същия начин получаваме

$$\varphi''(0) = \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2}(x - x_0)^2 + 2\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x \partial y}(x - x_0)(y - y_0) + \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y^2}(y - y_0)^2 =$$
$$= f''_{xx}(M_0)\Delta x^2 + 2 f''_{xy}(M_0)\Delta x \Delta y + f''_{xx}(M_0)\Delta y^2$$

Разсъждавайки аналогично, за $\varphi^{(k)}(0)$, $k = 1, 2, \ldots, m$, получаваме

$$\varphi^{(k)}(0) = \sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\frac{\partial^k f(M_0)}{\partial x^j \partial y^{m-j}}\Delta x^j \Delta y^{k-j} \ , \ \varphi^{(m+1)}(\xi) = \sum_{j=0}^{m+1}\binom{m+1}{j}\frac{\partial^{m+1} f(M_1)}{\partial x^j \partial y^{m+1-j}}\Delta x^j \Delta y^{m+1-j} \ ,$$

където M_1 е точка от отсечката с краища M_0 и M (формулата е вярна и за $k = 0$).

От тези изрази получаваме формулата на Тейлър,

$$(2.11) \quad \begin{aligned} f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) &= \sum_{k=0}^{m}\frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\frac{\partial^k f(M_0)}{\partial x^j \partial y^{k-j}}\Delta x^j \Delta y^{k-j} + \\ &+ \frac{1}{(m+1)!}\sum_{j=0}^{m+1}\binom{m+1}{j}\frac{\partial^{m+1} f(M_1)}{\partial x^j \partial y^{m+1-j}}\Delta x^j \Delta y^{m+1-j} \end{aligned}$$

първите няколко члена на която имат вида

$$
\begin{aligned}
f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) = f(M_0) &+ \left\lfloor f'_x(M_0)\Delta x + f'_y(M_0)\Delta y \right\rfloor + \\
&+\frac{1}{2}\left[f''_{xx}(M_0)\Delta x^2 + 2f''_{xy}(M_0)\Delta x\Delta y + f''_{xx}(M_0)\Delta y^2\right] + \\
&+\frac{1}{6}\left[f'''_{xxx}(M_0)\Delta x^3 + 3f'''_{xxy}(M_0)\Delta x^2\Delta y + 3f'''_{xyy}(M_0)\Delta x\Delta y^2 + f'''_{yyy}(M_0)\Delta y^3\right] + \cdots
\end{aligned}
$$

За остатъчния член на формулата имаме

$$
R_m = \frac{1}{(m+1)!}\sum_{j=0}^{m+1}\binom{m+1}{j}\frac{\partial^{m+1} f(M_1)}{\partial x^j \partial y^{m+1-j}}\Delta x^j \Delta y^{m+1-j} = o\left(\left|\overline{M_0M}\right|^m\right),
$$

където $\left|\overline{M_0M}\right| = \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$ е дължината на отсечката $\overline{M_0M}$. Използвайки диференциалните оператори $\dfrac{\partial}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial}{\partial y}$, общият член на (2.11) се записва като

$$
\frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\frac{\partial^k f(M_0)}{\partial x^j \partial y^{k-j}}\Delta x^j \Delta y^{k-j} = \frac{1}{k!}\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x}+\Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)^k f(M_0),\ k=0,1,2,\dots,m,
$$

а самата формула приема вида

$$
f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) = \sum_{k=0}^{m}\frac{1}{k!}\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x}+\Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)^k f(M_0) + o\left(\left|\overline{M_0M}\right|^m\right).
$$

Разсъждавайки по същия начин, за случая на функция на три променливи $f(x,y,z)$ получаваме

$$
f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y, z_0+\Delta z) = \sum_{k=0}^{m}\frac{1}{k!}\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x}+\Delta y\frac{\partial}{\partial y}+\Delta z\frac{\partial}{\partial z}\right)^k f(M_0) + o\left(\left|\overline{M_0M}\right|^m\right),
$$

и т.н.

В общия случай на функция $f(\mathbf{x})$, $\mathbf{x}=(x_1,x_2,\dots,x_n)$, от основен интерес представляват събираемите от първи и втори ред. Да въведем матрицата на Хесе ***(хесиан)*** $\mathbf{H}(\mathbf{x})$,

$$
\mathbf{H}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix}
f''_{x_1x_1}(\mathbf{x}) & f''_{x_1x_2}(\mathbf{x}) & \cdots & f''_{x_1x_n}(\mathbf{x}) \\
f''_{x_2x_1}(\mathbf{x}) & f''_{x_2x_2}(\mathbf{x}) & \cdots & f''_{x_2x_n}(\mathbf{x}) \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
f''_{x_nx_1}(\mathbf{x}) & f''_{x_nx_1}(\mathbf{x}) & \cdots & f''_{x_nx_n}(\mathbf{x})
\end{pmatrix},
$$

която е симетрична $(n\times n)$ матрица, поради равенството на смесените производни. Тогава чрез скаларно произведение и матрично умножение формулата на Тейлър с точност до събираеми от втори ред може да се запише

$$
(2.12)\quad f(\mathbf{x}+\Delta\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) + \langle\nabla f(\mathbf{x}), \Delta\mathbf{x}\rangle + \frac{1}{2}\langle\mathbf{H}(\mathbf{x})\Delta\mathbf{x}, \Delta\mathbf{x}\rangle + o\left(|\Delta\mathbf{x}|^2\right).
$$

Тук $\mathbf{H}(\mathbf{x})\Delta\mathbf{x}$ е векторът, който се получава като умножим матрицата $\mathbf{H}(\mathbf{x})$ с вектор стълба на нарастванията $\Delta\mathbf{x}$. В този вид формулата на Тейлър е особено полезна при изследване локалното поведение на функцията $f(\mathbf{x})$.

3. Геометрична тълкуване на производните. Такова тълкуване е възможно за функция на две променливи $z=f(x,y)$, понеже свойствата на функцията се показват върху нейната графика Γ в тримерното пространство. Нека функцията $z=f(x,y)$ е непрекъснато диференцируема, в околност на точката $M_0(x_0,y_0)$. Тогава от формулата на Тейлър следва представянето

$$f(x,y)=f(M_0)+\left[f'_x(M_0)(x-x_0)+f'_y(M_0)(y-y_0)\right]+o\left(\left|\overline{M_0M}\right|\right).$$

Събираемите от нулев и първи ред формират ***допирателната равнина*** π към графиката на функцията за точката M_0

(2.13) $\pi: z=f(M_0)+f'_x(M_0)(x-x_0)+f'_y(M_0)(y-y_0)$.

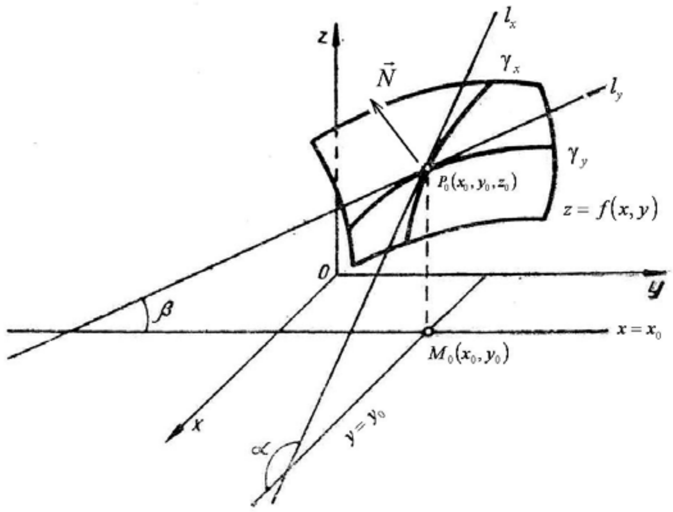

Рис. 2.1.

Нека γ_x (Рис. 2.1) е пространствената линия, която се получава от пресичането на равнината $y=y_0$ с графиката Γ и аналогично, γ_y е сечението на Γ с равнината $x=x_0$. Линиите γ_x и γ_y се пресичат върху Γ в точката $P_0(x_0,y_0,z_0)$, където $z_0=f(x_0,y_0)$. Нека правата l_x лежи в равнината $y=y_0$ и е допирателна към γ_x, при която α е ъгълът, който сключва l_x с правата $y=y_0$ от координатната равнина Oxy. Тогава в равнината $y=y_0$ уравнението на правата l_x е $l_x: z=z_0+f'_x(x_0,y_0)(x-x_0)$ и според известното тълкуване на производната имаме $\operatorname{tg}\alpha=f'_x(x_0,y_0)$. Разсъждавайки аналогично за правата l_y (Рис. 2.1) получаваме, че в равнината $x=x_0$ уравнението тази права е $l_y: z=z_0+f'_y(x_0,y_0)(y-y_0)$ и $\operatorname{tg}\beta=f'_y(x_0,y_0)$, което представлява геометричното тълкуване на стойностите на частните производни. Правите l_x и l_y лежат в допирателната равнина π. От уравнението (2.13) следва, че π има нормален вектор $\vec{N}\left(-f'_x(M_0),-f'_y(M_0),1\right)$ с положителен направляващ косинус относно базисния вектор $\mathbf{k}$. Този вектор се нарича ***нормален вектор към повърхнината*** $z=f(x,y)$ за точката $M_0(x_0,y_0)$.

4. Неявни функции. Основната идея на диференциалното смятане е моделиране локалното поведение на сложно структурирани нелинейни функции с помощта на линейни такива. Тази идея се откроява най-добре при работа с неявни функции и обратни изображения.

Да разгледаме отначало уравнението $f(x,y)=0$, което се удовлетворява $(f(x_0,y_0)=0)$ в дадена (начална) точка $M_0(x_0,y_0)$ от областта G. За функцията $f(x,y)$ ще предполагаме, че е непрекъснато диференцируема в областта G. В типичния случай, когато $\left|f'_x(x_0,y_0)\right|+\left|f'_y(x_0,y_0)\right|>0$ (поне една от двете частни производни не се анулира в M_0), множеството от точки в равнината, което удовлетворява това уравнение представлява крива γ, съдържаща M_0. В много случаи е невъзможно уравнението да се реши в елементарни функции относно y (или относно x) въпреки, че в околност на x_0 кривата γ във всяко отношение наподобява графика на някаква функция $y = \varphi(x)$ (Рис. 2.2).

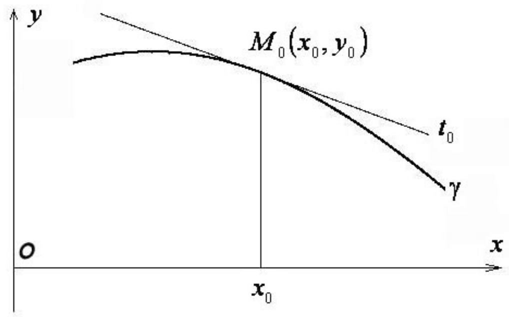

Рис. 2.2.

Кривата γ има допирателна $\mathbf{t}_0$ в точката M_0, чието уравнение се получава по следния начин. Пресмятайки пълния диференциал на лявата и дясната страна на равенството $f(x, y) = 0$ в точката M_0 получаваме $f'_x(x_0, y_0)dx + f'_y(x_0, y_0)dx = 0$. Сега като заместим $dx = \Delta x = x - x_0$ и $dy = \Delta y = y - y_0$, за допирателната намираме

$$\mathbf{t}_0 : f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0) = 0 .$$

В частност векторът $\vec{N}\left(f'_x(x_0, y_0), f'_y(x_0, y_0)\right)$ е нормален към допирателната. Този вектор се нарича ***нормален вектор към кривата*** γ в точката M_0.

Средствата на диференциалното смятане позволяват при определени условия да разглеждаме променливата y като функция на x, $y = y(x)$, в някаква околност на x_0 (или x като функция на y в някаква околност на y_0). В този случай говорим за ***неявни функции***. Идеята за неявна функция се състои в следното. Избираме една начална точка $M_0(x_0, y_0)$, която удовлетворява уравнението $f(x_0, y_0) = 0$. Ако такава точка не може да се намери, то уравнението е безпредметно. След това се интересуваме от възможността променливата y да се изрази като неявна функция на променливата x, $y = y(x)$, в някаква достатъчно малка околност $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, $\delta > 0$, т.е. да бъде изпълнено $f(x, y(x)) = 0$, за всяко $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, при което да е налице и началното условие $y(x_0) = y_0$. Оказва се, че така формулираната задача за неявна функция има решение при условията на следната теорема.

Теорема 2.4. Нека функцията $f(x, y)$ е непрекъснато диференцируема в някаква околност на точката $M_0(x_0, y_0)$, при което $f(x_0, y_0) = 0$ и $f'_y(x_0, y_0) \neq 0$. Тогава променливата y може да се изрази като неявна функция на x в достатъчно малка околност на x_0. Освен това тази функция е диференцируема в околност на x_0, при което $y'(x_0) = -\dfrac{f'_x(x_0, y_0)}{f'_y(x_0, y_0)}$. ■

Горната теорема е типичен локален резултат, което означава, че се изследват свойства и характеристики в околност на някаква точка, която околност може да бъде много малка. По тази причина единственото достъпно за въпросната неявна функция са нейните локални свойства, като например монотонност и изпъкналост. Всички тези свойства в типичния случай могат да бъдат открити в развитието на функцията по Тейлър около x_0,

(2.14) $y(x)=y(x_0)+y'(x_0)(x-x_0)+\dfrac{y''(x_0)}{2}(x-x_0)^2+\dfrac{y'''(x_0)}{6}(x-x_0)^3+\dfrac{y^{(4)}(x_0)}{24}(x-x_0)^4+\cdots$.

Макар функцията $y(x)$ да е неявна, коефициентите в горната формула могат да се определят ефективно. За да определим $y'(x_0)$ постъпваме по следния начин. Диференцираме $f(x,y(x))=0$, съгласно правилото за диференциране на съставни функции и получаваме $f'_x+f'_y y'=0$. Сега заместваме $x\to x_0$, $y\to y_0$ и получаваме $f'_x(x_0,y_0)+f'_y(x_0,y_0)y'(x_0)=0$, откъдето намираме $y'(x_0)$. Тук беше важно, че можем да разделим на $f'_y(x_0,y_0)$, което по условие е различно от нула. Както ще се убедим след малко, същото условие е достатъчно и за получаване на останалите коефициенти в развитието. За да пресметнем $y''(x_0)$, диференцираме по x съотношението $f'_x+f'_y y'=0$ следвайки правилото за диференциране на съставни функции и помнейки, че $y=y(x)$. Получаваме $\lfloor f''_{xx}+f''_{yx}y'\rfloor y+\lfloor f''_{yx}+f''_{yy}y'\rfloor y'+f'_y y''=0$. Заместваме $x\to x_0$, $y\to y_0$ и $y'(x_0)$, което е вече пресметнато и получаваме

$$\textit{известни величини}+f'_y(x_0,y_0)y''(x_0)=0,$$

което ни позволява да пресметнем $y''(x_0)$. Този механизъм може да се повтори за определяне на следващите коефициенти.

Описаната току що процедура ще покажем върху пример. Да разгледаме съотношението

(2.15) $f(x,y)=x^2+y^2-1=0$

и да фиксираме начално значение $x_0=0$. Тогава за начално значение на y остават две възможности $y_0=\pm1$. Избираме $y_0=1$. По този начин избрахме началната точка $M_0(0,1)$. В този илюстративен пример става дума за явната функция $y=\sqrt{1-x^2}$. Накрая на примера ще се върнем към явния вид на $y(x)$ за да съпоставим получения резултат. Първо трябва да се погрижим за условията на теорема 2.4. Функцията $f(x,y)$, както и нейните частни производни са непрекъснати навсякъде, при което $f'_y=2y$ и $f'_y(x_0,y_0)=2\neq0$. Следователно е валидно и заключението на теоремата, според което y може да се изрази като неявна функция на x в някаква околност на $x_0=0$ с изпълнение на началното условие $y(0)=1$.

Нашата следваща цел е да получим първите няколко коефициента в развитието (2.14). По условие $y(0)=1$. Диференцирайки (2.15) по x получаваме $2x+2yy'=0$, което може да опростим

(2.16) $x+yy'=0$.

Заместваме $x\to0$, $y\to1$ и получаваме $0+1.y'(0)=0$, откъдето намираме $y'(0)=0$. Сега диференцираме (2.16) и получаваме

(2.17) $1+y'y'+yy''=0$.

Заместваме $x\to0$, $y\to1$, $y'\to0$ и намираме $y''(0)=-1$. По-нататък за да определим $y'''(0)$, диференцираме (2.17) по x и получаваме

(2.18) $2y'y''+y'y''+yy'''=0$.

Заместваме $x \to 0$, $y \to 1$, $y' \to 0$, $y'' \to -1$ и намираме $y'''(0) = 0$. Сега диференцирайки (2.18) по x получаваме $3y''y'' + 3y'y''' + y'y''' + yy^{(4)} = 0$. Заместваме $x \to 0$, $y \to 1$, $y' \to 0$, $y'' \to -1$, $y''' \to 0$ и получаваме $y^{(4)}(0) = -3$.

Събирайки получените дотук резултати можем да напишем следното развитие

(2.18) $y = 1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{24}x^4 + \cdots$.

Информацията с която разполагаме е достатъчна да установим, че $x_0 = 0$ е точка на строг локален максимум за въпросната неявна функция без да познаваме самата функция, понеже първата производна се анулира, а втората производна е отрицателна.

От друга страна, съгласно формулата за обобщения нютонов бином,

$$y = \sqrt{1 - x^2} = \left(1 - x^2\right)^{\frac{1}{2}} = 1 + \binom{\frac{1}{2}}{1}\left(-x^2\right)^1 + \binom{\frac{1}{2}}{2}\left(-x^2\right)^2 + \cdots,$$

което е същото като (2.18), понеже за обобщените биномни коефициенти имаме

$$\binom{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2} \text{ и } \binom{\frac{1}{2}}{2} = \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - 1\right)}{2} = -\frac{1}{8}.$$

Ако бяхме избрали другото начално условие $y_0 = -1$, щяхме да разсъждаваме за явната функция $y = -\sqrt{1 - x^2}$.