Лекция 3

§3. Екстремуми

1. Квадратични форми. Функцията $\varphi(\mathbf{x})$, $\mathbf{x}=(x_1,x_2,\dots,x_n)$, се нарича ***квадратична форма*** на променливите x_1, x_2, ..., x_n, когато има вида

$$\varphi(\mathbf{x})=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j .$$

За коефициентите предполагаме, че $a_{ij}=a_{ji}$, $1\le i,j\le n$. При $n=1$ имаме $\varphi(x)=ax^2$, при $n=2$, $\varphi(x,y)=ax^2+2bxy+cy^2$. Коефициентите на формата образуват ***симетрична матрица*** $A=\{a_{ij}\}_{i,j=1}^{n}$ и обратно, всяка симетрична матрица поражда квадратична форма. С помощта на скаларно произведение, квадратичната форма може да се запише във вида

$$(3.1)\qquad \varphi(\mathbf{x})=\langle A\mathbf{x},\mathbf{x}\rangle ,$$

където $A\mathbf{x}$ е векторът, получен от умножението на $(n\times n)$ матрицата A с вектор стълба на променливите $\mathbf{x}$. Чрез матрично умножение, скаларното произведение се записва $\langle\mathbf{x},\mathbf{y}\rangle=\mathbf{y}^T\mathbf{x}$, следователно

$$\varphi(\mathbf{x})=\mathbf{x}^TA\mathbf{x} .$$

Някои квадратични форми приемат стойности с един и същи знак при всяко $\mathbf{x}\ne 0$. Такива форми се наричат знакоопределени.

Определение 3.1. Казва се, че квадратичната форма $\varphi(\mathbf{x})$ е ***положително (отрицателно) определена***, когато за всяко $\mathbf{x}\ne 0$ е изпълнено $\varphi(\mathbf{x})>0$ $(\varphi(\mathbf{x})<0)$. Симетричната матрица A се нарича положително (отрицателно) определена, когато породената от нея квадратична форма е положително (отрицателно) определена.

Когато неравенствата не са строги, формата $\varphi(\mathbf{x})$ и свързаната с нея матрица се наричат неотрицателно (неположително) определени. От (3.1) следва, че ако матрицата A е положително определена, то матрицата $-A$ е отрицателно определена и обратно.

Твърдение 3.1. Нека $\varphi(\mathbf{x})$ е положително определена. Тогава съществува константа $m>0$, за която $\varphi(\mathbf{x})\ge m|\mathbf{x}|^2$.

Доказателство. Единичната сфера $S=\{\mathbf{x}\in\mathrm{R}^n \mid |\mathbf{x}|=1\}$ е ограничено и затворено множество (компактно множество), следователно непрекъснатата функция $\varphi(\mathbf{x}):S\to\mathrm{R}$ е ограничена, при което достига в S най-малка стойност,

$$m=\min_{\mathbf{x}\in S}\varphi(\mathbf{x})=\varphi(\mathbf{x}_{\min}),$$

за някое $\mathbf{x}_{\min}\in S$. По условие $\varphi(\mathbf{x})>0$, за $\mathbf{x}\ne\mathbf{0}$, следователно $m=\varphi(\mathbf{x}_{\min})>0$, понеже $\mathbf{x}_{\min}\ne\mathbf{0}$ $(|\mathbf{x}_{\min}|=1)$. От вида на $\varphi(\mathbf{x})$ следва, че за всяка константа λ е изпълнено $\varphi(\lambda\mathbf{x})=\lambda^2\varphi(\mathbf{x})$. Нека сега $\mathbf{x}\ne\mathbf{0}$. Тогава векторът $\mathbf{y}=\dfrac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|}\in S$, понеже

$$|\mathbf{y}|=\left|\frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|}\right|=\frac{1}{|\mathbf{x}|}|\mathbf{x}|=1 .$$

По определение за константата m имаме $\varphi(\mathbf{y})\ge m$, следователно

$$\varphi\left(\frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|}\right)\ge m \quad\text{или}\quad \frac{1}{|\mathbf{x}|^2}\varphi(\mathbf{x})\ge m ,$$

за всяко $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, което трябваше да докажем. ■

По същия начин се доказва, че ако $\varphi(\mathbf{x})$ е отрицателно определена, то съществува константа $m > 0$, за която $\varphi(\mathbf{x}) \leq -m|\mathbf{x}|^2$.

Положителната (отрицателната) определеност на матрицата A зависи от знаците на нейните главни минори

$$D_1 = a_{11},\ D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},\ D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},\ \ldots,\ D_n = \det A.$$

Теорема 3.1 ***(критерий на Силвестър).*** Симетричната матрица A е положително определена тогава и само тогава, когато всичките главни минори са положителни, $D_1 > 0$, $D_2 > 0$, $D_3 > 0$, ..., $D_n > 0$. ■

Ако A е положително определена, то като разместим редовете и стълбовете по един и същи начин отново се получава положително определена матрица, понеже това разместване означава пренареждане на променливите, което не променя положителната определеност. В този случай от критерия на Силвестър следва, че всеки диагонален елемент на A е положителен и изобщо всеки минор, получен от пресичането на някои редове и стълбове с едни и същи номера е положителен.

Матрицата A е отрицателно определена, когато $-A$ е положително определена, следователно от критерия на Силвестър се получава верността на

Твърдение 3.2. Симетричната матрица A е отрицателно определена тогава и само тогава, когато за нейните главни минори е изпълнено $D_1 < 0$, $D_2 > 0$, $D_3 < 0$, ..., $(-1)^n D_n > 0$. ■

Например матрицата

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

е положително определена, понеже

$$D_1 = 3 > 0,\ D_2 = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 5 > 0 \text{ и } D_3 = \det A = 2 > 0.$$

Това означава, че формата породена от A

$$\varphi(x, y, z) = 3x^2 + 2y^2 + z^2 + 2xy + 2yz > 0,$$

винаги когато поне една от променливите x, y или z е различна от нула.

От курса по линейна алгебра знаем, че за всяка симетрична матрица A може да се намери унитарна матрица H, която ***диагонализира*** A в следния смисъл,

$$H^T A H = \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Матрицата H се нарича ***унитарна***, когато $H^T H = E_n$, където E_n е единичната матрица от ред n (за унитарните матрици $H^{-1} = H^T$). Тогава след смяна на променливите $\mathbf{x} = H\mathbf{y}$, формата (3.1) приема вида

$$\varphi(H^T\mathbf{y}) = \langle AH\mathbf{y}, H\mathbf{y}\rangle = \langle H^T AH\mathbf{y}, \mathbf{y}\rangle = \langle \Lambda\mathbf{y}, \mathbf{y}\rangle,$$

(3.2) $\varphi\left(H^T\mathbf{y}\right)=\lambda_1 y_1^2+\lambda_2 y_2^2+\cdots+\lambda_n y_n^2$.

Смяната на променливите посредством унитарна матрица запазва скаларното произведение, понеже, ако $\mathbf{x}_1=H\mathbf{y}_1$ и $\mathbf{x}_2=H\mathbf{y}_2$, то

$$\left\langle \mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2\right\rangle=\left\langle H\mathbf{y}_1,H\mathbf{y}_2\right\rangle=\left\langle H^T H\mathbf{y}_1,\mathbf{y}_2\right\rangle=\left\langle \mathbf{y}_1,\mathbf{y}_2\right\rangle,$$

следователно тази смяна запазва дължините на векторите и ъглите между тях и по този начин представлява преобразуване на еднаквост в R^n (завъртане на координатната система около началото).

Числата λ_1, λ_2, ..., λ_n се наричат ***собствени значения*** на матрицата A и са корени на характеристичния полином

$$\chi(z)=\det\left(A-zE_n\right)=\det\begin{pmatrix} a_{11}-z & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22}-z & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-z\end{pmatrix}$$

и по тази причина, в конкретен случай, могат да бъдат намерени без да има необходимост от познаване на матрицата H.

От (3.2) се получава друг критерий за положителна (отрицателна) определеност. Условието $\varphi(\mathbf{x})>0$, за всяко $\mathbf{x}\neq\mathbf{0}$, означава, че дясната страна на (3.2) е положителна, за всяко $\mathbf{y}\neq\mathbf{0}$, а последното е вярно тогава и само тогава, когато всичките собствени значения λ_1, λ_2, ..., λ_n на матрицата A са положителни. Следователно е вярна

Теорема 3.2. Симетричната матрица A е положително (отрицателно) определена тогава и само тогава, когато всичките собствени значения са положителни (отрицателни). ■

Когато всичките собствени значения на A са различни от нула и между тях има както положителни така и отрицателни се казва, че квадратичната форма има поведение от тип ***седло***. В този случай променливите y_1, y_1, ..., y_n могат да се разделят условно на две групи според знака на съответното λ в дясната страна на (3.2). Нека за определеност $\lambda_k>0$, за $k=1,\ldots,s$, и $\lambda_k<0$, за $k=s+1,\ldots,n$. Тогава формата $\varphi(\mathbf{x})>0$, за всяко $\mathbf{x}=H^T\mathbf{y}$, където $y=\left(y_1,\ldots,y_s,0,\ldots,0\right)\neq\mathbf{0}$ и $\varphi(\mathbf{x})<0$, за всяко $\mathbf{x}=H^T\mathbf{y}$, където $y=\left(0,\ldots,0,y_{s+1},\ldots,y_n\right)\neq\mathbf{0}$. В новата координатна система по една група от променливите формата е положително определена, а по групата на останалите е отрицателно определена. Произведението на собствените числа на A е равно на детерминантата $\det A$, понеже

$$\begin{aligned}\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n&=\det\Lambda=\det\left(H^T AH\right)=\det H^T\det A\det H=\\&=\det H^T\det H\det A=\det\left(H^T H\right)\det A=\det I_n\det A=\det A\end{aligned}$$

следователно ***всичките собствени значения на*** A ***са различни от нула тогава и само тогава, когато*** $\det A\neq 0$.

2. Екстремуми на функция на много променливи. Нека функцията $f(\mathbf{x})$ е определена в областта G и нека $\mathbf{x}^{(0)}\in G$. Казва се, че $f(\mathbf{x})$ има ***локален минимум*** в точката $\mathbf{x}^{(0)}$, когато $f(\mathbf{x})\geq f\left(\mathbf{x}^{(0)}\right)$, за всяко $\mathbf{x}$ от някаква δ-околност $B\left(\mathbf{x}^{(0)},\delta\right)$. Ако $f(\mathbf{x})>f\left(\mathbf{x}^{(0)}\right)$ за $\mathbf{x}\in B\left(x^{(0)},\delta\right)$, $\mathbf{x}\neq\mathbf{x}_0$, то минимумът се нарича ***строг***. Определенията за ***локален максимум*** и ***строг*** локален максимум са аналогични.

Нека $f(\mathbf{x})$ е непрекъснато диференцируема в $\mathbf{x}^{(0)}$, която е точка на локален екстремум и нека $\mathbf{n}=(l_1,l_2,\ldots,l_n)$ е някакъв единичен вектор, $|\mathbf{n}|=1$. Тогава функцията на една променлива

$$\phi(t)=f\left(\mathbf{x}^{(0)}+t\mathbf{n}\right)=f\left(x_1^{(0)}+tl_1,x_2^{(0)}+tl_2,\ldots,x_n^{(0)}+tl_n\right)$$

е диференцируема в околност на точката $t_0=0$ и има екстремум от същия вид, следователно от теоремата на Ферма получаваме, че $\phi'(0)=0$. От друга страна $\phi'(0)$ е точно производната на $f(\mathbf{x})$ по направление $\mathbf{n}$ в точката $\mathbf{x}^{(0)}$. Това показва, че производната по всяко направление в точката $\mathbf{x}^{(0)}$ е равна на нула, следователно всичките частни производни на $f(\mathbf{x})$ в точката $\mathbf{x}^{(0)}$ са равни на нула и градиентът е нулевият вектор, $\nabla f\left(\mathbf{x}^{(0)}\right)=\mathbf{0}$. По този начин доказахме следното необходимо условие за екстремум, което очевидно е аналог на познатата теорема на Ферма за функция на една променлива.

Твърдение 3.3. Нека $f(\mathbf{x})$ е непрекъснато диференцируема в $\mathbf{x}^{(0)}$, която е точка на локален екстремум. Тогава $\nabla f\left(\mathbf{x}^{(0)}\right)=\mathbf{0}$ и производните по всички направления в точката $\mathbf{x}^{(0)}$ са равни на нула. ■

С помощта на пълен диференциал, заключението на твърдение 3.3 се записва $df\left(\mathbf{x}^{(0)}\right)=0$. Точки, в които градиентът се анулира, се наричат ***стационарни точки*** за функцията $f(\mathbf{x})$. Твърдение 3.3 гласи, че всяка екстремална точка е стационарна. Обратното както знаем не е вярно даже за функция на една променлива.

Сега ще установим условия, при които една стационарна точка е точка на локален екстремум. За тази цел ще използваме формулата на Тейлър. Нека $f(\mathbf{x})$ е определена и има непрекъснати производни до трети ред в някаква околност $B\left(\mathbf{x}^{(0)},\delta\right)$ на стационарната точка $\mathbf{x}^{(0)}$. Тогава, според формулата на Тейлър, имаме

$$f\left(\mathbf{x}^{(0)}+\Delta\mathbf{x}\right)=f\left(\mathbf{x}^{(0)}\right)+\left\langle\nabla f\left(\mathbf{x}^{(0)}\right),\Delta\mathbf{x}\right\rangle+\frac{1}{2}\left\langle\mathbf{H}\left(\mathbf{x}^{(0)}\right)\Delta\mathbf{x},\Delta\mathbf{x}\right\rangle+o\left(|\Delta\mathbf{x}|^2\right),\ |\Delta\mathbf{x}|<\delta,$$

следователно

$$(3.3)\qquad f\left(\mathbf{x}^{(0)}+\Delta\mathbf{x}\right)-f\left(\mathbf{x}^{(0)}\right)=\frac{1}{2}\left\langle\mathbf{H}\left(\mathbf{x}^{(0)}\right)\Delta\mathbf{x},\Delta\mathbf{x}\right\rangle+|\Delta\mathbf{x}|^2\varepsilon(|\Delta\mathbf{x}|),\ \lim_{|\Delta\mathbf{x}|\to 0}\varepsilon(|\Delta\mathbf{x}|)=0,$$

където

$$\mathbf{H}\left(\mathbf{x}^{(0)}\right)=\begin{pmatrix} f''_{x_1x_1}\left(\mathbf{x}^{(0)}\right) & f''_{x_1x_2}\left(\mathbf{x}^{(0)}\right) & \cdots & f''_{x_1x_n}\left(\mathbf{x}^{(0)}\right)\\ f''_{x_2x_1}\left(\mathbf{x}^{(0)}\right) & f''_{x_2x_2}\left(\mathbf{x}^{(0)}\right) & \cdots & f''_{x_2x_n}\left(\mathbf{x}^{(0)}\right)\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ f''_{x_nx_1}\left(\mathbf{x}^{(0)}\right) & f''_{x_nx_1}\left(\mathbf{x}^{(0)}\right) & \cdots & f''_{x_nx_n}\left(\mathbf{x}^{(0)}\right)\end{pmatrix}$$

е хесианът на $f(\mathbf{x})$, пресметнат в $\mathbf{x}^{(0)}$. Дали $\mathbf{x}^{(0)}$ е точка на локален екстремум зависи от поведението на разликата $f\left(\mathbf{x}^{(0)}+\Delta\mathbf{x}\right)-f\left(\mathbf{x}^{(0)}\right)$, при достатъчно малко $\Delta\mathbf{x}$, за която разлика получихме равенството (3.3). Да предположим, че хесианът $\mathbf{H}\left(\mathbf{x}^{(0)}\right)$ е положително определена матрица и нека $m>0$ е константа, за която (твърдение 3.1)

$$\left\langle\mathbf{H}\left(\mathbf{x}^{(0)}\right)\Delta\mathbf{x},\Delta\mathbf{x}\right\rangle\geq m|\Delta\mathbf{x}|^2.$$

Нека освен това $\delta>0$ е избрано достатъчно малко, че за величината $\varepsilon(|\Delta\mathbf{x}|)$ от (3.3) да бъде изпълнено $|\varepsilon(|\Delta\mathbf{x}|)|<\dfrac{m}{4}$ когато $0<|\Delta\mathbf{x}|<\delta$. Тогава, за всяко $\Delta\mathbf{x}$, $0<|\Delta\mathbf{x}|<\delta$,

$$f\left(\mathbf{x}^{(0)}+\Delta\mathbf{x}\right)-f\left(\mathbf{x}^{(0)}\right)\geq\frac{m}{2}|\Delta\mathbf{x}|^2-\frac{m}{4}|\Delta\mathbf{x}|^2=\frac{m}{4}|\Delta\mathbf{x}|^2>0,$$

което показва, че при направените предположения, функцията $f(\mathbf{x})$ има строг локален минимум в точката $\mathbf{x}^{(0)}$. Аналогично се показва, че ако хесианът $\mathbf{H}\left(\mathbf{x}^{(0)}\right)$ е отрицателно определена матрица, то функцията $f(\mathbf{x})$ има строг локален максимум в точката $\mathbf{x}^{(0)}$. По този начин доказахме

Твърдение 3.4. Нека $f(\mathbf{x})$ е определена и има непрекъснати производни до трети ред в някаква околност $B\left(\mathbf{x}^{(0)},\delta\right)$ на стационарната точка $\mathbf{x}^{(0)}$. Тогава, ако хесианът $\mathbf{H}\left(\mathbf{x}^{(0)}\right)$ е положително (отрицателно) определена матрица, то функцията $f(\mathbf{x})$ има строг локален минимум (максимум) в точката $\mathbf{x}^{(0)}$. ■

Условията за положителна (отрицателна) определеност на хесианът понякога се означават с помощта на втория диференциал $d^2 f\left(\mathbf{x}^{(0)}\right)>0$ $\left(d^2 f\left(\mathbf{x}^{(0)}\right)<0\right)$ при $|d\mathbf{x}|>0$, понеже формално вторият диференциал задава същата квадратична форма, само че относно "променливите" dx_1, dx_2, ..., dx_n,

$$d^2 f(\mathbf{x})=\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_i\partial x_j}dx_i dx_j .$$

Чрез същите разсъждения може да се установи, че ако квадратичната форма, породена от хесиана $\mathbf{H}\left(\mathbf{x}^{(0)}\right)$ има поведение от тип седло, то функцията $f(\mathbf{x})$ сигурно няма локален екстремум в стационарната точка $\mathbf{x}^{(0)}$, което означава, че могат да се намерят точки $\mathbf{x}$, произволно близки до $\mathbf{x}^{(0)}$, за които $f(\mathbf{x})>f\left(\mathbf{x}^{(0)}\right)$, както и произволно близки точки, за които $f(\mathbf{x})<f\left(\mathbf{x}^{(0)}\right)$. В този случай се казва, че $\mathbf{x}^{(0)}$ е ***седлова точка*** за функцията $f(\mathbf{x})$.

Като съпоставим направените изводи с критерия на Силвестър, получаваме верността на следната

Теорема 3.3. Нека $f(\mathbf{x})$ е определена и има непрекъснати производни до трети ред в околност $B\left(\mathbf{x}^{(0)},\delta\right)$ на стационарната точка $\mathbf{x}^{(0)}$ и да разгледаме главните минори на хесиана $\mathbf{H}\left(\mathbf{x}^{(0)}\right)$

$$D_1=f''_{x_1x_1}\left(\mathbf{x}^{(0)}\right),\ D_2=\begin{vmatrix} f''_{x_1x_1}\left(\mathbf{x}^{(0)}\right) & f''_{x_1x_2}\left(\mathbf{x}^{(0)}\right) \\ f''_{x_2x_1}\left(\mathbf{x}^{(0)}\right) & f''_{x_2x_2}\left(\mathbf{x}^{(0)}\right)\end{vmatrix},$$

$$D_3=\begin{vmatrix} f''_{x_1x_1}\left(\mathbf{x}^{(0)}\right) & f''_{x_1x_2}\left(\mathbf{x}^{(0)}\right) & f''_{x_1x_3}\left(\mathbf{x}^{(0)}\right) \\ f''_{x_2x_1}\left(\mathbf{x}^{(0)}\right) & f''_{x_2x_2}\left(\mathbf{x}^{(0)}\right) & f''_{x_2x_3}\left(\mathbf{x}^{(0)}\right) \\ f''_{x_3x_1}\left(\mathbf{x}^{(0)}\right) & f''_{x_3x_2}\left(\mathbf{x}^{(0)}\right) & f''_{x_3x_3}\left(\mathbf{x}^{(0)}\right)\end{vmatrix},\ ...,\ D_n=\det\mathbf{H}\left(\mathbf{x}^{(0)}\right).$$

Тогава:

1) Ако $D_1>0$, $D_2>0$, $D_3>0$, ..., $D_n>0$, то функцията $f(\mathbf{x})$ има строг локален минимум в точката $\mathbf{x}^{(0)}$.

2) Ако $D_1<0$, $D_2>0$, $D_3<0$, ..., $(-1)^n D_n>0$, то функцията $f(\mathbf{x})$ има строг локален максимум в точката $\mathbf{x}^{(0)}$.

3) Ако $D_n=\det\mathbf{H}\left(\mathbf{x}^{(0)}\right)\neq 0$, но не са изпълнени условията за строг локален минимум от пункт **1**) нито условията за строг локален максимум от пункт **2**), то $\mathbf{x}^{(0)}$ е седлова точка за функцията $f(\mathbf{x})$. ■

Например да намерим точките на екстремум на функцията

$$f(x,y,z) = x^2 + 2xy + 4xz + 8yz + 5y^2 + 9z^2 .$$

Стационарните точки на тази функция определяме от системата

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + 2y + 4z = 0 ,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2x + 10y + 8z = 0 ,$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 4x + 8y + 18z = 0 .$$

За детерминантата на тази хомогенна система имаме

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 2 & 10 & 8 \\ 4 & 8 & 18 \end{vmatrix} = 8 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 9 \end{vmatrix} = 8.16 \neq 0 ,$$

следователно единственото решение е точката $M_0(0,0,0)$. Хесианът на $f(x,y,z)$ във всяка точка има вида

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 2 & 10 & 8 \\ 4 & 8 & 8 \end{pmatrix} ,$$

откъдето намираме

$$D_1 = 2 > 0 , \ D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 10 \end{vmatrix} = 16 > 0 , \ D_3 = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 2 & 10 & 8 \\ 4 & 8 & 18 \end{vmatrix} = 8.16 > 0 ,$$

следователно, съгласно теорема 3.3, функцията $f(x,y,z)$ има строг локален минимум в точката $M_0(0,0,0)$.

Да разгледаме подробно случая на функция на две променливи $f(x,y)$ и стационарна точка $M_0(x_0,y_0)$. За хесиана имаме

$$\mathbf{H}(x_0,y_0) = \begin{pmatrix} f''_{xx}(x_0,y_0) & f''_{xy}(x_0,y_0) \\ f''_{yx}(x_0,y_0) & f''_{yy}(x_0,y_0) \end{pmatrix} .$$

Да положим $A = f''_{xx}(x_0,y_0)$, $B = f''_{xy}(x_0,y_0) = f''_{yx}(x_0,y_0)$, $C = f''_{yy}(x_0,y_0)$. Тук имаме $D_1 = A$ и $D_2 = AC - B^2$. И в двата случая на екстремум е налице $AC - B^2 > 0$, а в кой от случаите се намираме зависи от знака на A. Когато $AC - B^2 < 0$ е налице седлова точка. Открит остава въпросът само когато $AC - B^2 = 0$. Следващият пример показва колко сложни могат да бъдат нещата, когато $AC - B^2 = 0$. Да разгледаме функцията

$$f(x,y) = (y - x^2)(y - 2x^2)$$

в околност на стационарната точка $M_0(0,0)$. Производната на тази функция по всяко направление в точката $M_0(0,0)$ е равна на нула, по-точно, по всяко направление функцията има локален минимум, но въпреки това, $M_0(0,0)$ не е точка на локален минимум, понеже $f(x,y)$ е отрицателна в ивицата между параболите $y = x^2$ и $y = 2x^2$ и положителна извън тази ивица (по самите параболи е нула).

3. Условен екстремум. Множители на Лагранж. Да разгледаме отначало случая на функция на две променливи $f(x,y)$ при наличие на едно условие $g(x,y) = 0$. Нека функцията $f(x,y)$ е непрекъснато диференцируема в областта G. Нека $\gamma \subset G$ е множеството, определено от условието $g(x,y)=0$, където $g(x,y)$ е непрекъснато диференцируема в G. Казва се, че функцията $f(x,y)$ има ***условен локален минимум*** в точката $M_0 \in \gamma$, $g(x_0,y_0)=0$, $|g'_x(x_0,y_0)|+|g'_y(x_0,y_0)|>0$, когато съществува околност $B((x_0,y_0),\delta)$ такава, че $f(x,y) \geq f(x_0,y_0)$, за всяко $(x,y) \in \gamma \cap B((x_0,y_0),\delta)$. Ако $f(x,y) > f(x_0,y_0)$ за $(x,y) \in \gamma \cap B((x_0,y_0),\delta)$, $(x,y) \neq (x_0,y_0)$, то минимумът се нарича ***строг***. Определенията за условен локален максимум и строг условен локален максимум са аналогични.

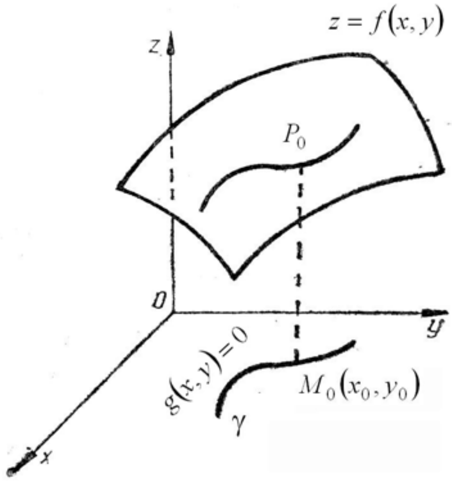

Рис. 3.1.

Условието $g(x,y)=0$ задава локално някаква крива γ, съдържаща точката M_0 (Рис. 3.1). Когато сравняваме стойностите на $f(x,y)$ със стойността $f(x_0,y_0)$, точката (x,y) се мени в някаква малка околност на (x_0,y_0), оставайки по кривата γ.

Ако M_0 е точка на обикновен (безусловен) екстремум, то очевидно M_0 е точка на условен екстремум при всякакво условие. От друга страна една функция може да няма безусловен екстремум в дадена точка, но при различни условия да има условни екстремуми от различен вид. Такова например е поведението на функцията $f(x,y)=x^2-y^2$, за която стационарната точка $M_0(0,0)$ е седлова. При условието $y=0$, функцията $f(x,y)=x^2$ има локален условен минимум в M_0, а при условието $x=0$, функцията $f(x,y)=-y^2$ има локален условен максимум в M_0.

Нека $g'_y(x_0,y_0) \neq 0$. Тогава от теоремата за неявните функции следва, че променливата y може да се представи като неявна функция $y=\varphi(x)$ в околност $(x_0-\delta, x_0+\delta)$, $\delta>0$, т.е. $g(x,\varphi(x))=0$ за $x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$ и $\varphi(x_0)=y_0$. Нека $f(x,y)$ има условен локален екстремум в $M_0(x_0,y_0)$. Това означава, че функцията на една променлива $\phi(x)=f(x,\varphi(x))$ има обикновен екстремум от същия вид в x_0 и по теоремата на Ферма $\phi'(x_0)=0$. От друга страна $\phi'(x)=f'_x(x,\varphi(x))+f'_y(x,\varphi(x))\varphi'(x)$, следователно

(3.4) $\quad f'_x(x_0,y_0)+f'_y(x_0,y_0)\varphi'(x_0)=0$.

За производната на неявната функция имаме също

(3.5) $\quad g'_x(x_0,y_0)+g'_y(x_0,y_0)\varphi'(x_0)=0$.

Да разгледаме сега ***функцията на Лагранж***

$L(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda g(x,y)$,

където константата λ е ***множител на Лагранж***, който ще определим от изискването

(3.6) $\quad L'_y(x_0,y_0,\lambda)=f'_y(x_0,y_0)+\lambda g'(x_0,y_0)=0\,,\lambda=\lambda_0=-\dfrac{f'_x(x_0,y_0)}{g'_x(x_0,y_0)}$.

Ще покажем, че при този избор на λ имаме също $L'_x(x_0,y_0,\lambda)=0$. Наистина, като умножим (3.5) с λ и съберем почленно със (3.4) получаваме

$$\left[f'_x(x_0,y_0)+\lambda g'_x(x_0,y_0)\right]+\left[f'_y(x_0,y_0)+\lambda g'_y(x_0,y_0)\right]\varphi'(x_0)=0\,,$$

което заедно със (3.6) показва, че $L'_x(x_0,y_0,\lambda)=f'_x(x_0,y_0)+\lambda g'_x(x_0,y_0)=0$. Очевидно $L'_\lambda(x_0,y_0,\lambda_0)=g(x_0,y_0)=0$. По този начин доказахме

Теорема 3.4. Нека $M_0(x_0,y_0)$ е точка на локален условен екстремум за функцията $f(x,y)$ с условие $g(x,y)=0$, при което $f(x,y)$ и $g(x,y)$ са непрекъснато диференцируеми в околност на M_0 и $|g'_x(x_0,y_0)|+|g'_y(x_0,y_0)|>0$. Тогава съществува константа λ_0 (множител на Лагранж) такава, че точката (x_0,y_0,λ_0) е стационарна за функцията на Лагранж $L(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda g(x,y)$. ■

Теорема 3.4 ни учи, че условните екстремуми трябва да се търсят между стационарните точки на функцията на Лагранж, т.е. като решения на системата

$$L'_x(x,y,\lambda)=f'_x(x,y)+\lambda g'_x(x,y)=0\,,$$
$$L'_y(x,y,\lambda)=f'_y(x,y)+\lambda g'_y(x,y)=0\,,$$
$$L'_\lambda(x,y,\lambda)=g(x,y)=0\,.$$

Последното уравнение е всъщност самото условие.

Например да намерим условните екстремуми на функцията $f(x,y)=e^{xy}$ при ограничението $g(x,y)=x^3+y^3+x+y-4=0$. Тук функцията на Лагранж е

$$L=e^{xy}+\lambda\left(x^3+y^3+x+y-4\right),$$

а системата за определяне на стационарните точки има вида

$$L'_x=ye^{xy}+\lambda\left(3x^2+1\right)=0\,,$$
$$L'_y=xe^{xy}+\lambda\left(3y^2+1\right)=0\,,$$
$$L'_\lambda=x^3+y^3+x+y-4=0\,.$$

Умножаваме първото равенство с x, второто с y и изваждаме. Получаваме

(3.7) $\quad \lambda\left(3x^3-3y^3-x+y\right)=\lambda(x-y)\left(3x^2+3xy+3y^2+1\right)=0$.

Ако $\lambda=0$, то ще имаме $x=y=0$, което не удовлетворява третото уравнение (условието). Множителят $3x^2+3xy+3y^2+1>0$ за всеки x и y, следователно (3.7) ни дава единствено възможността $x=y$. Сега замествайки в третото уравнение намираме $x^2+x=2$, следователно $x=y=1$. При така намерените стойности, за λ получаваме $\lambda=-\dfrac{e}{4}$. Единствената стационарна точка е $\left(1,1,-\dfrac{e}{4}\right)$.

За да определим дали в тази точка функцията има локален условен екстремум и вида на екстремума ще пресметнем втория диференциал по променливите x и y на функцията на Лагранж

$$d^2L(1,1,\lambda_0)=e\left[(dx+dy)^2+2dxdy-\frac{3}{2}\left(dx^2+dy^2\right)\right].$$

Тук обаче променливите dx и dy не са независими, понеже са свързани от условието. Тази връзка определяме след като пресметнем пълния диференциал на връзката

$g'_x(1,1)dx + g'_y(1,1)dy = 0$, откъдето намираме $dx + dy = 0$. Сега като заместим, получаваме $d^2L(1,1,\lambda_0) = -5edx^2 < 0$, което означава, че става дума за условен локален максимум.

В общия случай се постъпва аналогично. Нека $\mathbf{x}^{(0)} \in G$ е точка на локален условен екстремум за функцията $f(\mathbf{x})$, която е непрекъснато диференцируема в областта G, при наличие m на брой условия $(m < n)$ $g_1(\mathbf{x}) = 0$, $g_2(\mathbf{x}) = 0$, ..., $g_m(\mathbf{x}) = 0$, които също се предполагат непрекъснато диференцируеми в точката $\mathbf{x}^{(0)}$, при което се иска още рангът на ***якобиана*** (***матрицата производна***)

$$J\left(\mathbf{x}^{(0)}\right) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial g_1\left(\mathbf{x}^{(0)}\right)}{\partial x_1} & \dfrac{\partial g_1\left(\mathbf{x}^{(0)}\right)}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial g_1\left(\mathbf{x}^{(0)}\right)}{\partial x_n} \\ \dfrac{\partial g_2\left(\mathbf{x}^{(0)}\right)}{\partial x_1} & \dfrac{\partial g_2\left(\mathbf{x}^{(0)}\right)}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial g_2\left(\mathbf{x}^{(0)}\right)}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial g_m\left(\mathbf{x}^{(0)}\right)}{\partial x_1} & \dfrac{\partial g_m\left(\mathbf{x}^{(0)}\right)}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial g_m\left(\mathbf{x}^{(0)}\right)}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

да бъде ***максимален***, $r\left(J\left(\mathbf{x}^{(0)}\right)\right) = m$. Тогава могат да се намерят константи $\lambda_1^{(0)}$, $\lambda_2^{(0)}$, ..., $\lambda_m^{(0)}$ такива, че точката $\left(\mathbf{x}^{(0)}, \boldsymbol{\lambda}^{(0)}\right)$ да бъде стационарна за ***функцията на Лагранж***

$$L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) = f(\mathbf{x}) + \lambda_1 g_1(\mathbf{x}) + \lambda_2 g_2(\mathbf{x}) + \cdots + \lambda_m g_m(\mathbf{x}).$$

Изследването на откритите след решаване на съответната система стационарни точки се провежда по аналогичен начин. Например да намерим условните екстремуми на линейната функция $u = x - 2y + 2z$ върху сферата $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Тук функцията на Лагранж има вида

$$L = x - 2y + 2x + \lambda\left(x^2 + y^2 + z^2 - 1\right).$$

Нейните стационарни точки определяме от системата

$$L'_x = 1 + 2\lambda x = 0,$$
$$L'_y = -2 + 2\lambda y = 0,$$
$$L'_z = 2 + 2\lambda z = 0,$$
$$L'_\lambda = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0.$$

Като изключим x, y и z получаваме $\left(\dfrac{1}{2\lambda}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{\lambda}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{\lambda}\right)^2 = 1$, откъдето намираме $\lambda_1 = \dfrac{3}{2}$ и $\lambda_2 = -\dfrac{3}{2}$. Така за функцията на Лагранж получихме две стационарни точки

$$M_1\left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{3}{2}\right) \text{ и } M_2\left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{3}{2}\right).$$

Пресмятаме $d^2L(M_1) = 3\left(dx^2 + dy^2 + dz^2\right) > 0$, следователно M_1 е точка на условен локален минимум за функцията u, и $d^2L(M_1) = -3\left(dx^2 + dy^2 + dz^2\right) < 0$, следователно M_2 е точка на условен локален максимум за функцията u.