Лекция 5

§5. Пресмятане на двоен и троен интеграл

1. Свеждане на двойния интеграл към повторен. Двойните интеграли могат да се пресмятат ефективно с помощта на познатите техники за единичен интеграл след свеждане до повторни интеграли. Да разгледаме криволинейния трапец D (Рис. 5.1)

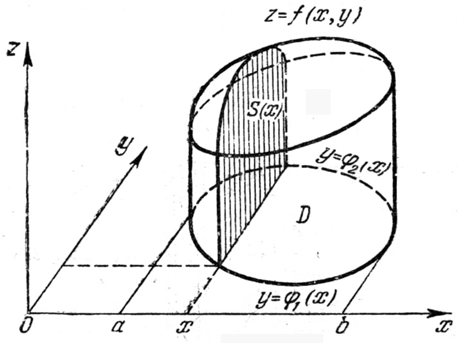

Рис. 5.1.

определен както следва

$$(5.1)\qquad D:\left|\begin{array}{c} a \le x \le b \\ \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x) \end{array}\right.$$

където функциите $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ са непрекъснати в интервала $[a,b]$, $\varphi_1(x) \le \varphi_2(x)$, за всяко $x \in [a,b]$. От направените предположения следва, че криволинейният трапец D е измеримо равнинно (компактно) множество, при което

$$(5.2)\qquad \mu(D) = \iint_D dxdy = \int_a^b [\varphi_2(x) - \varphi_1(x)]dx\,.$$

Теорема 5.1. Нека функцията $z = f(x,y)$ е непрекъсната над криволинейния трапец D, определен в (5.1). Тогава е в сила формулата

$$(5.3)\qquad \iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b \left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy\right]dx\,.$$

Доказателство. Изразът в дясната страна на (5.3) се нарича ***повторен интеграл*** понеже отначало се пресмята интегралът в средните скоби, а след това и външния интеграл в граници от a до b. Определеният интеграл

$$\Phi(x) = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy$$

е добре дефиниран при всяко $x \in [a,b]$ и представлява непрекъсната функция. Формулата (5.3) указва, че

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b \Phi(x)dx\,.$$

Да разгледаме отначало случая, когато $f(x,y) \ge 0$, $(x,y) \in D$. Тогава според геометричното тълкуване на двойния интеграл, за обема на цилиндричното тяло

$$\mathsf{C}:\left|\begin{array}{c} (x,y) \in D \\ 0 \le z \le f(x,y) \end{array}\right.$$

имаме

$$(5.4)\qquad \mu(\mathsf{C}) = \iint_D f(x,y)dxdy\,.$$

Този обем обаче може да се намери и с помощта на принципа на Кавалиери. Ще разглеждаме сечения на C с равнини, перпендикулярни на оста Ox. Нека $S(x)$ е стойността на лицето на текущото сечение (Рис. 5.1). Тогава според принципа на Кавалиери за обема на C имаме

$$(5.5)\qquad \mu(\mathsf{C})=\int_a^b S(x)dx\,.$$

От друга страна в координатната равнина Oyz, проекцията на това сечение представлява криволинейният трапец

$$\Omega_x:\left|\begin{array}{l}\varphi_1(x)\le y\le\varphi_2(x)\\ 0\le z\le f(x,y)\end{array}\right.$$

за чието лице разполагаме с формулата

$$S(x)=\mu(\Omega_x)=\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy\,.$$

Сега като заместим в (5.5) получаваме

$$\mu(\mathsf{C})=\int_a^b\left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy\right]dx\,,$$

което заедно с (5.4) доказва теоремата в този случай.

Нека константата M е избрана достатъчно голяма, че функцията $g(x,y)=f(x,y)+M$ да бъде положителна, за всяко $(x,y)\in D$. Съгласно доказаното дотук, формулата (5.3) е вярна за функцията $g(x,y)$, следователно,

$$\iint_D g(x,y)dxdy=\int_a^b\left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} g(x,y)dy\right]dx\,,$$

$$\iint_D [f(x,y)+M]dxdy=\int_a^b\left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} [f(x,y)+M]dy\right]dx\,.$$

Сега от линейното свойство на интеграла получаваме

$$M\iint_D dxdy+\iint_D f(x,y)dxdy=\int_a^b\left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy\right]dx+M\int_a^b\left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy\right]dx\,,$$

$$(5.6)\qquad M\iint_D dxdy+\iint_D f(x,y)dxdy=\int_a^b\left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy\right]dx+M\int_a^b[\varphi_2(x)-\varphi_1(x)]dx\,.$$

Съгласно (5.2)

$$M\iint_D dxdy=M\int_a^b[\varphi_2(x)-\varphi_1(x)]dx=M\mu(D),$$

откъдето след съкращаване равните събираеми в (5.6) получаваме верността на формулата (5.3) в общия случай. ■

В това доказателство има непълнота, понеже не сме доказали съгласуваността между определението за обем чрез принципа на Кавалиери и определението за обем посредством двоен интеграл. От друга страна то много добре илюстрира някои основни свойства на интеграла, които имат важно значение за приложенията.

Например да пресметнем двойния интеграл

$$I=\iint_D xydxdy\,,$$

където D е областта, оградена от линиите $y=\sqrt{x}$ и $y=x$ (Рис. 5.2).

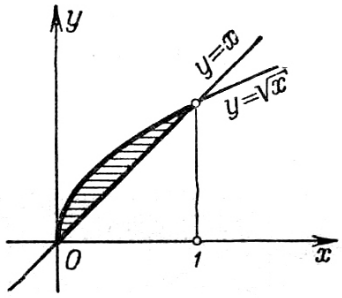

Рис. 5.2.

Тези две криви се пресичат в точките $M_0(0,0)$ и $M_1(1,1)$, а областта може да се запише във вида

$$D:\left|\begin{array}{l} 0\le x\le 1\\ x\le y\le \sqrt{x}\end{array}\right.$$

От формулата (5.3) намираме

$$I=\int_0^1\left[\int_x^{\sqrt{x}} xydy\right]dx .$$

За вътрешния интеграл пресмятаме

$$\int_x^{\sqrt{x}} xydy = x\int_x^{\sqrt{x}} ydy = x\frac{y^2}{2}\bigg|_x^{\sqrt{x}} = x\left(\frac{x}{2}-\frac{x^2}{2}\right)=\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{2} .$$

Заместваме и получаваме

$$I=\int_0^1\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{2}\right)dx=\left(\frac{x^3}{6}-\frac{x^4}{8}\right)\bigg|_0^1=\frac{1}{6}-\frac{1}{8}=\frac{1}{24}.$$

Тази област може да се представи като криволинеен трапец и по следния начин

$$D:\left|\begin{array}{l} 0\le y\le 1\\ y^2\le x\le y\end{array}\right.$$

следователно

$$I=\int_0^1\left[\int_{y^2}^{y} xydx\right]dy ,$$

По същия начин пресмятаме

$$\int_{y^2}^{y} xydy = y\int_{y^2}^{y} xdx = y\frac{x^2}{2}\bigg|_{y^2}^{y} = y\left(\frac{y^2}{2}-\frac{y^4}{2}\right)=\frac{y^3}{2}-\frac{y^5}{2},$$

$$I=\int_0^1\left(\frac{y^3}{2}-\frac{y^5}{2}\right)dy=\left(\frac{y^4}{8}-\frac{y^6}{12}\right)\bigg|_0^1=\frac{1}{8}-\frac{1}{12}=\frac{1}{24} .$$

Когато областта на интегриране е правоъгълник

$$\Pi:\left|\begin{array}{l} a\le x\le b\\ c\le y\le d\end{array}\right.$$

и променливите на подинтегралната функция се разделят, $f(x,y)=X(x)Y(y)$, то (в този и само в този случай) от формулата (5.3) непосредствено следва, че двойният интеграл е равен на произведението от двата единични,

$$\iint_{\Pi} X(x)Y(y)dxdy = \left[\int_a^b X(x)dx\right]\left[\int_c^d Y(y)dy\right].$$

Тройните интеграли също могат да се свеждат до повторни, когато областта на интегриране е цилиндрично множество. Нека $V \subset \mathsf{R}^3$ е множеството

$$V: \left| \begin{array}{c} (x,y)\in D \\ \varphi_1(x,y) \le z \le \varphi_2(x,y) \end{array} \right. ,$$

където D е измеримо равнинно компактно множество, а функциите $\varphi_1(x,y)$ и $\varphi_2(x,y)$ са определени и непрекъснати в D, при което $\varphi_1(x,y) \le \varphi_2(x,y)$, за всяко $(x,y)\in D$ (Рис 5.3).

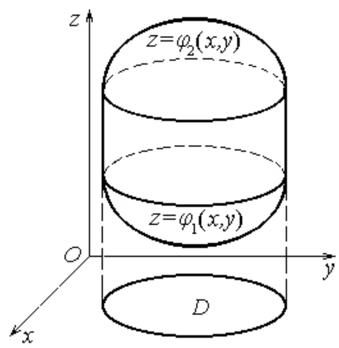

Рис. 5.3.

Тогава за всяка непрекъсната над V функция $f(x,y,z)$ е в сила формулата

$$(5.7)\qquad \iiint_V f(x,y,z)dxdydz = \iint_D \left[\int_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} f(x,y,z)dz\right]dxdy,$$

която свежда тройния интеграл към повторен. Тук интегралът в средните скоби се разглежда като частен интеграл по променливата z,

$$\Phi(x,y) = \int_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} f(x,y,z)dz$$

и представлява непрекъсната функция по съвкупност на променливите си (x,y). Формулата (5.7) указва, че

$$\iiint_V f(x,y,z)dxdydz = \iint_D \Phi(x,y)dxdy.$$

И тук, когато областта на интегриране е правоъгълна

$$\Pi: \left| \begin{array}{l} a \le x \le b \\ c \le y \le d \\ p \le z \le q \end{array} \right.$$

а променливите на подинтегралната функция се разделят, $f(x,y,z) = X(x)Y(y)Z(z)$, то (в този и само в този случай) тройният интеграл е равен на произведението от трите единични,

$$\iiint_{\Pi} X(x)Y(y)Z(z)dxdydz = \left[\int_a^b X(x)dx\right]\left[\int_c^d Y(y)dy\right]\left[\int_p^q Z(z)dz\right].$$

2. Смяна на променливите. Смяната не променливите е начин за опростяване на областта на интегриране или на подинтегралната функция. Съдържанието на основните определения ще покажем върху пример. Да разгледаме криволинейния четириъгълник от първи квадрант $D \subset \mathsf{R}^2_{xy}$, получен от пресичането на двете хиперболи $xy = 1$, $xy = 3$ и двете параболи $y = x^2$ и $y = 2x^2$ (Рис. 5.4)

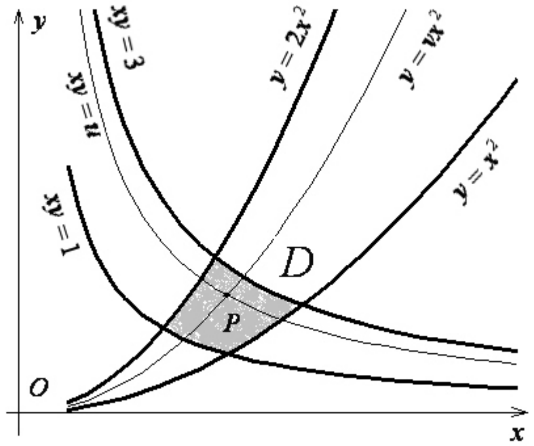

Рис. 5.4.

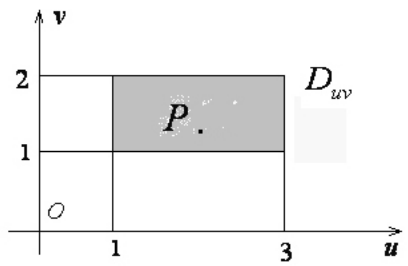

Рис 5.5.

Всяка точка $P \in D$ се получава по единствен начин от пресичането на хиперболата $xy = u$, за някое u, $u \in [1,3]$ и параболата $y = vx^2$, за някое v, $v \in [1,2]$. Това показва, че има взаимно еднозначно съответствие между точките на D и точките от правоъгълника

$$D_{uv} : \left| \begin{array}{l} 1 \le u \le 3 \\ 1 \le v \le 2 \end{array} \right.$$

Като решим системата $xy = u$, $y = vx^2$ относно променливите x и y, получаваме

$$x = \sqrt[3]{\frac{u}{v}} = u^{\frac{1}{3}} v^{-\frac{1}{3}} \text{ и } y = \sqrt[3]{u^2 v} = u^{\frac{2}{3}} v^{\frac{1}{3}}.$$

По този начин определяме изображението $\Phi : D_{uv} \to D_{xy}$ с координатни функции

$$x = \varphi(u,v) = u^{\frac{1}{3}} v^{-\frac{1}{3}} \text{ и } y = \psi(u,v) = u^{\frac{2}{3}} v^{\frac{1}{3}},$$

което привежда взаимно еднозначно областта D_{uv} в областта D_{xy}. ***Якобиан*** $J = J(u,v)$ на това изображение се нарича детерминантата

$$J(u,v) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial \varphi(u,v)}{\partial u} & \dfrac{\partial \varphi(u,v)}{\partial v} \\ \dfrac{\partial \psi(u,v)}{\partial u} & \dfrac{\partial \psi(u,v)}{\partial v} \end{vmatrix}.$$

За нашия пример имаме

$$J(u,v) = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{3} u^{-\frac{2}{3}} v^{-\frac{1}{3}} & -\dfrac{1}{3} u^{\frac{1}{3}} v^{-\frac{4}{3}} \\ \dfrac{2}{3} u^{-\frac{1}{3}} v^{\frac{1}{3}} & \dfrac{1}{3} u^{\frac{2}{3}} v^{-\frac{2}{3}} \end{vmatrix} = \frac{1}{3v}.$$

В общия случай такива изображения и техните якобиани имат важно значение при смяната на променливите при кратни интеграли. За тях ***винаги*** ще предполагаме, че са изпълнени следните условия.

1) Изображението Φ е взаимно еднозначно.

2) Координатните функции имат непрекъснати частни производни в дефиниционната област на Φ.

3) Навсякъде в дефиниционната област на Φ е изпълнено $J>0$ или навсякъде в дефиниционната област на Φ е изпълнено $J<0$.

В горния пример и трите условия са налице. Да разгледаме едно интегрално деление на областта D_{uv} с прави линии, успоредни на координатните оси (Рис. 5.6)

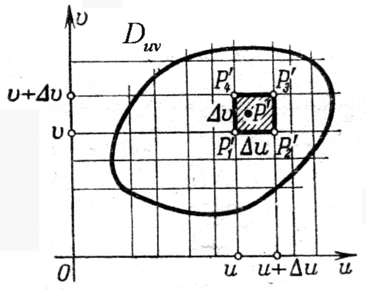

Рис. 5.6.

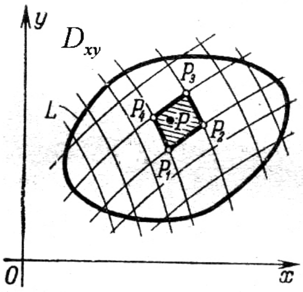

Рис. 5.7.

При изображението Φ, $x=\varphi(u,v)$, $y=\psi(u,v)$, тези линии ще зададат едно интегрално деление на областта D_{xy}, при което правоъгълникът $P_1'P_2'P_3'P_4'$ с върхове

$$P_1'(u,v),\ P_2'(u+\Delta u,v),\ P_3'(u+\Delta u,v+\Delta v),\ P_4'(u,v+\Delta v),$$

се изобразява в криволинейния четириъгълник $P_1P_2P_3P_4$ с върхове

$$P_1(x_1,y_1),\ x_1=\varphi(u,v),\ y_1=\psi(u,v),$$
$$P_2(x_2,y_2),\ x_2=\varphi(u+\Delta u,v),\ y_2=\psi(u+\Delta u,v),$$
$$P_3(x_3,y_3),\ x_3=\varphi(u+\Delta u,v+\Delta v),\ y_3=\psi(u+\Delta u,v+\Delta v),$$
$$P_4(x_4,y_4),\ x_4=\varphi(u,v+\Delta v),\ y_4=\psi(u,v+\Delta v).$$

Сега нарастванията на координатните функции ще представим по формулата на Тейлър, пренебрегвайки събираемите от ред втори и по-висок,

$$x_1=\varphi(u,v),\ y_1=\psi(u,v),$$
$$x_2\approx\varphi(u,v)+\frac{\partial\varphi}{\partial u}\Delta u,\ y_2\approx\psi(u,v)+\frac{\partial\psi}{\partial u}\Delta u,$$
$$x_3\approx\varphi(u,v)+\frac{\partial\varphi}{\partial u}\Delta u+\frac{\partial\varphi}{\partial v}\Delta v,\ y_3\approx\psi(u,v)+\frac{\partial\psi}{\partial u}\Delta u+\frac{\partial\psi}{\partial v}\Delta v,$$
$$x_4\approx\varphi(u,v)+\frac{\partial\varphi}{\partial v}\Delta v,\ y_4\approx\psi(u,v)+\frac{\partial\psi}{\partial v}\Delta v.$$

При направените предположения криволинейният четириъгълник $P_1P_2P_3P_4$ може да се разглежда приблизително като успоредник, за чието лице от геометрията знаем, че е равно на

$$\left\|\begin{matrix} x_3-x_1 & y_3-y_1 \\ x_3-x_2 & y_3-y_2 \end{matrix}\right\| = \left\|\begin{matrix} \dfrac{\partial\varphi}{\partial u} & \dfrac{\partial\varphi}{\partial v} \\ \dfrac{\partial\psi}{\partial u} & \dfrac{\partial\psi}{\partial v} \end{matrix}\right\|\Delta u\Delta v = |J(u,v)|\Delta u\Delta v.$$

По този начин за лицето на $P_1P_2P_3P_4$ получихме

(5.8) $\quad \mu(P_1P_2P_3P_4)\approx|J(u,v)|\mu(P_1'P_2'P_3'P_4')$.

Нека функцията $f(x,y)$ е интегруема над D_{xy}. Тогава интегралът се получава като граница на интегрални суми със събираеми от вида $f(P)\mu(P_1P_2P_3P_4)$, където P е някаква точка от $P_1P_2P_3P_4$. Съгласно (5.8) за това събираемо имаме

(5.9) $\quad f(P)\mu(P_1P_2P_3P_4)\approx f(\varphi(P'),\psi(P'))|J(u,v)|\mu(P_1'P_2'P_3'P_4')$, където P' е точка в правоъгълника $P_1'P_2'P_3'P_4'$, следователно за римановите интегрални суми имаме

(5.10) $r(f,\tau)=\sum f(P)\mu(P_1P_2P_3P_4)\approx\sum f(\varphi(P'),\psi(P'))|J(u,v)|\mu(P_1'P_2'P_3'P_4')$.

Тук в дясната страна на $\approx$ стои риманова сума на интеграла

(5.11) $\iint\limits_{D_{uv}} f(\varphi(u,v),\psi(u,v))|J(u,v)|dudv$.

При интегрален граничен преход, лявата страна на (5.10) преминава в интеграла

$$\iint\limits_{D_{xy}} f(x,y)dxdy,$$

а дясната в интеграла (5.11). Може да се докаже, че натрупаната грешка от формула (5.9) при интегралния граничен преход клони към нула. По този начин получихме

Теорема 5.2. Нека изображението $\Phi: D_{uv}\to D_{xy}$ преобразува взаимно еднозначно измеримото множество D_{uv} в измеримото множество D_{xy}, координатните функции $x=\varphi(u,v)$ и $y=\psi(u,v)$ са непрекъснато диференцируеми в D_{uv} и $J(u,v)\neq 0$, $(u,v)\in D_{uv}$. Тогава, за всяка ограничена интегруема в D_{xy} функция $f(x,y)$ е в сила

(5.12) $\iint\limits_{D_{xy}} f(x,y)dxdy=\iint\limits_{D_{uv}} f(\varphi(u,v),\psi(u,v))|J(u,v)|dudv$. ■

Формулата (5.12) се нарича ***формула за смяна на променливите*** при двоен интеграл. Теорема 5.2 продължава да бъде вярна, даже и когато някое нейно условие е нарушено над множество с мярка нула.

При аналогични предположения за областта, якобиана и подинтегралната функция е валидна следната ***формула за смяна на променливите при троен интеграл***

$$\iiint\limits_{D_{xyz}} f(x,y,z)dxdydz=\iiint\limits_{D_{uvw}} f(x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w))|J(u,v,w)|dudvdw,$$

където якобианът се определя от детерминантата

$$J(u,v,w)=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w}\\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w}\end{vmatrix}.$$

Например да пресметнем интеграла

$$I=\iint\limits_{D} xydxdy,$$

където D е областта от рис. 5.4. При смяната на променливите $x=\varphi(u,v)=u^{\frac{1}{3}}v^{-\frac{1}{3}}$ и $y=\psi(u,v)=u^{\frac{2}{3}}v^{\frac{1}{3}}$, D се превръща в правоъгълника $D_{uv}:\left|\begin{array}{l}1\le u\le 3\\ 1\le v\le 2\end{array}\right.$, а за якобиана имаме $J(u,v)=\dfrac{1}{3v}$. Като приложим формулата (5.12) намираме

$$I=\iint\limits_{\substack{1\le u\le 3\\ 1\le v\le 2}} u^{\frac{1}{3}}v^{-\frac{1}{3}}u^{\frac{2}{3}}v^{\frac{1}{3}}\frac{1}{3v}dudv=\frac{1}{3}\iint\limits_{\substack{1\le u\le 3\\ 1\le v\le 2}} u\frac{1}{v}dudv=\frac{1}{3}\left[\int_1^3 udu\right]\left[\int_1^2\frac{dv}{v}\right]=\frac{4}{3}\ln 2.$$

Тук се възползвахме от факта, че при наличните условия двойният интеграл се явява произведение на двата единични. Областта зададохме описателно под интегралния знак вместо да използваме символ за нея.

Преминаването към ***полярни*** координати е една от най-често използваните смени на променливите в равнината.

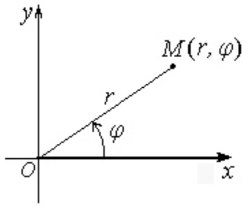

Рис. 5.8.

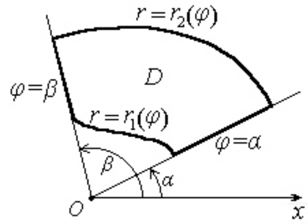

Рис. 5.9

Всяка точка M от равнината (Рис. 5.8) се определя чрез своите полярни координати r и φ, където полярният радиус $r = \left|\overline{OM}\right|$, а полярният ъгъл е ъгълът, който сключва лъча $\overline{OM}$ с оста Ox, измерван в посока, обратна на движението на часовниковата стрелка. Формулите $x = r\cos\varphi$ и $y = r\sin\varphi$ дават връзката между декартовите и полярните координати. Естествените максимални граници за полярните променливи са интервалите $r \geq 0$ и $0 \leq \varphi < 2\pi$ (или $-\pi < \varphi \leq \pi$), които граници съответстват на цялата равнина R^2_{xy}, а всяко подмножество задава някакви ограничения върху тези интервали. За якобиана пресмятаме

$$J = J(r,\varphi) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r .$$

В полярни координати (Рис. 5.9), секторът

$$D : \left| \begin{array}{c} \alpha \leq \varphi \leq \beta \\ r_1(\varphi) \leq r \leq r_2(\varphi) \end{array} \right.$$

представлява криволинеен трапец, което открива възможност двойният интеграл да се сведе до повторен. Освен това $x^2 + y^2 = r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi = r^2$, което позволява да се опростяват изрази, съдържащи групата $x^2 + y^2$. Например да пресметнем интеграла

$$I = \iint_D \frac{\ln\left(x^2 + y^2\right)}{\sqrt{x^2 + y^2}}\, dxdy ,$$

където D (Рис. 5.10) е венецът $D : 1 \leq x^2 + y^2 \leq e^2$.

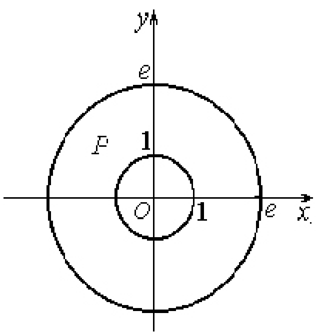

Рис. 5.10.

Преминаваме в полярни координати $x = r\cos\varphi$ и $y = r\sin\varphi$, при което за областта на интегриране имаме

$$D : \left| \begin{array}{l} 1 \le r \le e \\ 0 \le \varphi < 2\pi \end{array} \right.$$

а якобианът $J = r$. От формулата за смяна на променливите получаваме

$$I = \iint\limits_{\left|\begin{smallmatrix}1\le r\le e\\ 0\le\varphi<2\pi\end{smallmatrix}\right.} \frac{\ln r}{r} r dr d\varphi = \left[\int_1^e \ln r dr\right]\left[\int_0^{2\pi} d\varphi\right] = 2\pi\int_1^e \ln r dr,$$

$$\int_1^e \ln r dr = r\ln r\Big|_1^e - \int_1^e r d\ln r = e - (e-1) = 1,$$

следователно $I = 2\pi$.

При тройните интеграли често се използва преминаване към ***цилиндрични*** (Рис. 5.11) или ***сферични*** (Рис. 5.12) координати.

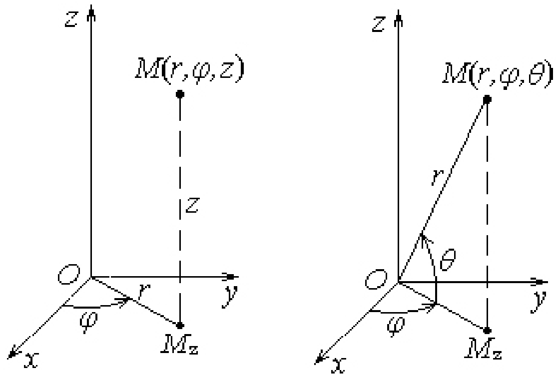

Рис. 5.11. Рис. 5.12.

Цилиндричните координати (r, φ, z) представляват комбинация между полярните координати в равнината Oxy и декартовата координата z. Те са удобни за представяне на цилиндрични тела, а якобианът $J(r, \varphi, z) = r$.

Нека M е точка от R^3_{xyz} и нека M_z е ортогоналната проекция на тази точка в координатната равнина Oxy. Сферичните координати (r, φ, θ) на M са полярните координати на проекцията M_z и ъгълът θ, който сключва лъча $\overline{OM}$ с равнината Oxy. По този начин естествените максимални граници на тези променливи са интервалите $r \ge 0$, $0 \le \varphi < 2\pi$ (или $-\pi < \varphi \le \pi$) и $-\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$, които определят цялото пространство R^3, а всяко подмножество задава някакви ограничения върху тези интервали. Връзката между декартовите и сферичните координати се дава от формулите

$$x = r\cos\theta\cos\varphi,\ y = r\cos\theta\sin\varphi,\ z = r\sin\theta,$$

а за якобиана пресмятаме

$$J(r, \varphi, \theta) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial \theta} \end{vmatrix} = r^2\cos\theta.$$

Освен това $x^2+y^2+z^2=r^2$, което позволява да се опростяват изрази, съдържащи такава група.

Например да пресметнем интеграла

$$I=\iiint\limits_D xydxdydz,$$

където D е тялото от първи октант $x\ge 0$, $y\ge 0$, $z\ge 0$, оградено от сферата $x^2+y^2+z^2=R^2$, $R>0$, и правия кръгов конус $x^2+y^2=z^2$ (Рис. 5.13)

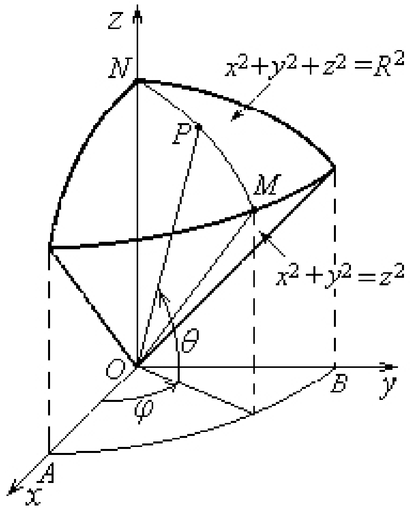

Рис. 5.13.

Нека $N(R,0,0)$ е пресечната точка на сферата с оста Oz, M е точка от пресечната линия на сферата и конуса, а P е точка от централната дъга от сферата, свързваща M и N. Тогава тялото D се състои от точките на всичките лъчи $\overline{OP}$, които в сферични координати се задават от ограниченията

$$0\le\varphi\le\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{4}\le\theta\le\frac{\pi}{2},\ 0\le r\le R.$$

След сферична смяна намираме

$$I=\iiint\limits_D r\cos\theta\cos\varphi\ r\cos\theta\sin\varphi\, r^2\cos\theta\, drd\varphi d\theta=\iiint\limits_D r^4\cos^3\theta\cos\varphi\sin\varphi\, drd\varphi d\theta,$$

$$I=\left[\int\limits_0^R r^4dr\right]\left[\int\limits_0^{\pi/2}\cos\varphi\sin\varphi\, d\varphi\right]\left[\int\limits_{\pi/4}^{\pi/2}\cos^3\theta d\theta\right]=\frac{R^5}{120}\left(8-5\sqrt{2}\right).$$

Пресмятането на такива интеграли понякога може да се извърши без направата на чертеж. Например да изчислим обема на тялото D, определено от условието $\left(x^2+y^2+z^2\right)^2\le z$. В сферични координати това условие приема вида $r^4\le r\sin\theta$ или $r\le\sqrt[3]{\sin\theta}$. За φ не се получават ограничения, следователно остава $0\le\varphi<2\pi$. Изискването $\sqrt[3]{\sin\theta}\ge r\ge 0$ означава, че $0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$. Следователно в сферични координати, D има цилиндричен вид

$$D:\left|\begin{array}{l}(\varphi,\theta)\in\Omega\\ 0\le r\le\sqrt[3]{\sin\theta}\end{array}\right.$$

където Ω е правоъгълникът

$$\Omega : \left| \begin{array}{l} 0 \le \varphi < 2\pi \\ 0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{2} \end{array} \right. .$$

Обемът на тялото е

$$\mu(D) = \iiint\limits_D dxdydz = \iiint\limits_D r^2 \cos\theta drd\varphi d\vartheta$$

От формулата за свеждане на троен интеграл към повторен получаваме

$$\mu(D) = \iint\limits_\Omega \left[\int\limits_0^{\sqrt[3]{\sin\theta}} r^2 \cos\theta dr \right] d\varphi d\vartheta = \iint\limits_\Omega \left[\frac{1}{3} \cos\theta \sin\theta \right] d\varphi d\vartheta ,$$

$$\mu(D) = \left[\frac{1}{3} \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \right] \left[\int\limits_0^{\pi/2} \cos\theta \sin\theta d\vartheta \right] = \frac{2\pi}{3} \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3} .$$