Лекция 7

§7. Повърхнинни интеграли от първи и втори род

1. Повърхнини в $\mathbb{R}^3$. Основни примери за повърхнини в $\mathbb{R}^3$ са равнините. Една равнината има геометрична размерност 2 и се задава параметрично чрез два параметъра, при което координатните функции са линейни. В общия случай повърхнина Σ се задава параметрично $\Sigma : \mathbf{r} = \mathbf{r}(u,v)$, $(u,v) \in \Omega$, където Ω е някаква ограничена област в равнината $\mathbb{R}^2_{uv}$, което в скаларна форма е

$$\Sigma : \left| \begin{array}{l} x = \varphi(u,v) \\ y = \psi(u,v) \\ z = \chi(u,v) \\ (u,v) \in \Omega \end{array} \right. .$$

За координатните функции $\varphi(u,v)$, $\psi(u,v)$ и $\chi(u,v)$ ще предполагаме, че са непрекъснато диференцируеми в затворената област $\overline{\Omega}$. Една повърхнина се нарича ***проста***, когато не се самопресича.

Обичайните представи за повърхнина са свързани с графика на дадена функция $z = f(x,y)$, $(x,y) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2_{xy}$. Например полусферата $S : x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $z \geq 0$ $(a > 0)$, може да се запише във вида

$$(7.1) \qquad S : \left| \begin{array}{c} x = x \\ y = y \\ z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} \\ (x,y) \in \Omega \end{array} \right.$$

където $\Omega : x^2 + y^2 \leq a^2$. Тук в качеството на параметри се използват променливите x и y. Ако за параметри използваме сферичните ъгли, получаваме

$$(7.2) \qquad S : \left| \begin{array}{l} x = a\cos\theta\cos\varphi \\ y = a\cos\theta\sin\varphi \\ z = a\sin\theta \\ (\varphi,\theta) \in \Omega \end{array} \right.$$

където $\Omega \subset \mathbb{R}^2_{\varphi\theta}$ е правоъгълникът

$$\Omega : \left| \begin{array}{l} 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ 0 \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{2} \end{array} \right.$$

Нека $\Sigma : \mathbf{r} = \mathbf{r}(u,v)$, $(u,v) \in \Omega$, е проста повърхнина и да разгледаме точка P от дефиниционната област Ω с координати (u_0, v_0), която има за образ точката $M \in \Sigma$ (Рис. 7.1)

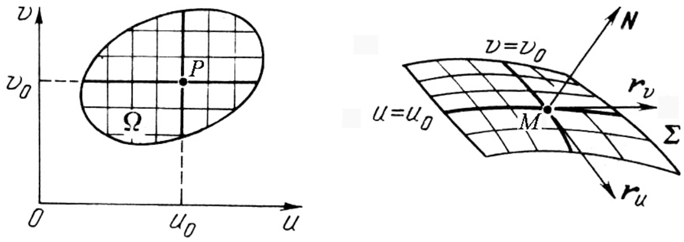

Рис. 7.1.

Тогава линиите $\mathbf{r}(u_0,v)$ и $\mathbf{r}(u,v_0)$ лежат в Σ и се пресичат в точката M, а (u_0,v_0) се наричат ***криволинейни координати*** на точката M. Допирателните вектори към тези линии $\mathbf{r}'_u$ и $\mathbf{r}'_v$ се определят както следва $\mathbf{r}'_u = x'_u\mathbf{i} + y'_u\mathbf{j} + z'_u\mathbf{k}$ и $\mathbf{r}'_v = x'_v\mathbf{i} + y'_v\mathbf{j} + z'_v\mathbf{k}$. Повърхнината Σ се нарича ***гладка***, когато векторното произведение на $\mathbf{r}'_u$ и $\mathbf{r}'_v$ е различно от нула във всяка точка на Ω. В този случай можем да определим различен от нула вектор $\mathbf{N}$ по формулата

$$\mathbf{N} = \mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{vmatrix} \text{ и единичен вектор } \mathbf{n} = \frac{\mathbf{N}}{|\mathbf{N}|}.$$

Този вектор може да се запише във вида

$$\mathbf{N} = \frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\mathbf{i} + \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}\mathbf{j} + \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\mathbf{k},$$

където е използвано следното означение за якобиан

$$\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}, \quad \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \end{vmatrix}, \quad \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}.$$

Векторът $\mathbf{N}$ (както и неговият противоположен $-\mathbf{N}$) се нарича ***нормален вектор*** към повърхнината. Равнината през точка M и перпендикулярна на вектора $\mathbf{N}$ се нарича ***допирателна равнина*** към повърхнината в тази точка. Съгласно определението, тази равнина има уравнение $\mathsf{p}: (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)\mathbf{N} = 0$,

$$\mathsf{p}: \begin{vmatrix} x - x(u_0,v_0) & y - y(u_0,v_0) & z - z(u_0,v_0) \\ x'_u(u_0,v_0) & y'_u(u_0,v_0) & z'_u(u_0,v_0) \\ x'_v(u_0,v_0) & y'_v(u_0,v_0) & z'_v(u_0,v_0) \end{vmatrix} = 0.$$

Това уравнение за допирателна равнина е съгласувано с другото, което дадохме при геометричното тълкуване на формулата на Тейлър. Например за полусферата S (Рис. 7.2) $z = f(x,y) = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ от (7.1) имаме

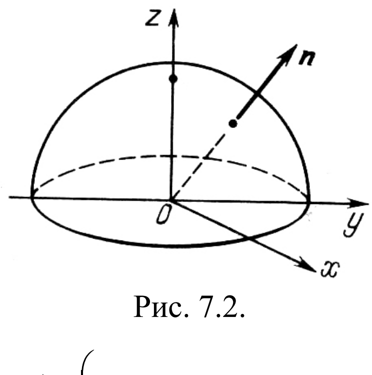

Рис. 7.2.

$$\mathbf{N} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & f'_x \\ 0 & 1 & f'_y \end{vmatrix} = (-f'_x, -f'_y, 1) = \left(\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}, \frac{y}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}, 1 \right).$$

Изобщо за всяка повърхнина $z = f(x,y)$, векторът $\mathbf{N}$ има вида $\mathbf{N} = (-f'_x, -f'_y, 1)$, а неговият единичен

$$\mathbf{n}=\frac{\mathbf{N}}{|\mathbf{N}|}=\left(-\frac{f_x'}{\sqrt{f_x'^2+f_y'^2+1}},-\frac{f_y'}{\sqrt{f_x'^2+f_y'^2+1}},\frac{1}{\sqrt{f_x'^2+f_y'^2+1}}\right).$$

Така определеният нормален вектор $\mathbf{N}$ сключва с оста Oz остър ъгъл, понеже

$$\cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{f_x'^2+f_y'^2+1}}>0.$$

Ако разгледаме S в сферични координати (7.2), то за нормалния вектор $\mathbf{N}$ и неговия единичен $\mathbf{n}$ намираме

$$\mathbf{N}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ x_\varphi' & y_\varphi' & z_\varphi'\\ x_\theta' & y_\theta' & z_\theta'\end{vmatrix}=a^2\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ -\sin\varphi\cos\theta & \cos\varphi\cos\theta & 0\\ -\cos\varphi\sin\theta & -\sin\varphi\sin\theta & \cos\theta\end{vmatrix},$$

$$\mathbf{N}=a^2\cos\theta(\cos\theta\cos\varphi,\cos\theta\sin\varphi,\sin\theta),$$

$$|\mathbf{N}|=a^2\cos\theta,\ \mathbf{n}=(\cos\theta\cos\varphi,\cos\theta\sin\varphi,\sin\theta).$$

Една повърхнина се нарича ***частично гладка***, когато може да се сглоби от гладки елементи. Гладките повърхнини може да имат сложен вид. Например повърхнината ***тор*** (Рис. 7.3) и ***лист на Мьобиус*** (Рис. 7.4)

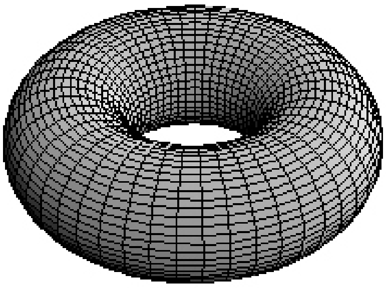

Рис. 7.3.

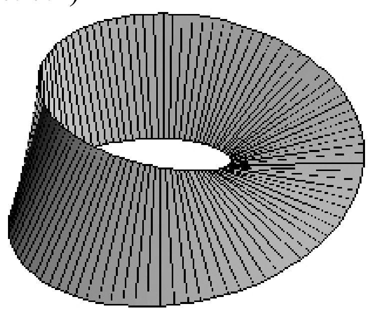

Рис. 7.4.

Нека Σ е проста гладка повърхнина. Тази повърхнина се нарича ***двустранна***, когато един нормален вектор $\mathbf{n}$ не може да се преобразува в своя противоположен $-\mathbf{n}$ посредством непрекъснато предвижване по Σ. Двустранни повърхнини например са сферата и тора както и всяка повърхнина, която се задава като графика на функция. В противен случай повърхнината се нарича ***едностранна***. Такава повърхнина е например листът на Мьобиус. Върху всяка двустранна повърхнина Σ различаваме две страни Σ_+ и Σ_- в зависимост от направленията на единичните нормални вектори, които се получават един от друг чрез непрекъснати трансформации. При затворените двустранни повърхнини можем да говорим за ***външна*** и ***вътрешна*** страна. Например за сферата, зададена в сферични координати, която е затворена двустранна повърхнина, външната страна се определя от нормалните вектори $\mathbf{n}_+=(\cos\varphi\cos\theta,\sin\varphi\cos\theta,\sin\theta)$, а вътрешната страна от нормалните вектори $\mathbf{n}_-=-\mathbf{n}_+$.

2. Повърхнинни интеграли от първи род. Нека гладката повърхнината $\Sigma: z=f(x,y)$, $(x,y)\in D$, е графика на функцията $f(x,y)$, която има непрекъснати производни в затворената измерима област $\overline{D}\subset\mathrm{R}^2_{xy}$. Да изберем една точка $P\in D$ и нека M е образа на P върху повърхнината (Рис. 7.5).

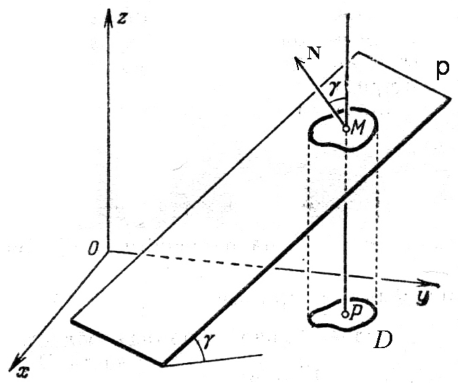

Рис. 7.5.

Да разгледаме допирателната равнина p през точка M и нека γ е ъгълът, който сключва нормалният вектор $\mathbf{N}$ с оста Oz. Тогава лицето на успоредната на Oz проекция на D върху равнината p можем да вземем приблизително в качеството на лице $\mu(\Sigma)$ на тази повърхнина. По този начин от геометрични съображения за лице получаваме формулата

$$\mu(\Sigma) \approx \frac{\mu(D)}{\cos\gamma}.$$

Ако имаме интегрално деление $\tau = \{D_k\}_{k=1}^{n}$, то от последното намираме

$$\mu(\Sigma) \approx \sum_{k=1}^{n} \frac{\mu(D_k)}{\cos\gamma_k} = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1 + [f'_x(P_k)]^2 + [f'_y(P_k)]^2}\,\mu(D_k),$$

което след характерния интегрален граничен преход преминава във формулата

(7.3) $$\mu(\Sigma) = \iint_D \sqrt{1 + f'^2_x + f'^2_y}\,dxdy.$$

В общия случай формулата за лице на повърхнина има вида

(7.4) $$\mu(\Sigma) = \iint_D |\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v|\,dudv = \iint_D |\mathbf{N}|\,dudv,$$

при което лесно се проверява, че (7.3) се явява частен случай на (7.4). Например да пресметнем лицето сферата $S : x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $R > 0$. В този случай след преминаване в сферични координати имаме $|\mathbf{N}| = R^2 \cos\theta$ и съгласно (7.4) намираме

$$\mu(S) = \iint_S a^2 \cos\theta\, d\varphi\, d\theta = R^2 \left[\int_0^{2\pi} d\varphi\right]\left[\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\theta\, d\theta\right] = R^2\, 2\pi \left(\sin\theta\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2}\right) = 4\pi R^2.$$

Изразът $d\sigma = |\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v|\,dudv$ се нарича ***лицев елемент*** на повърхнината.

Определение 7.1. Повърхнинен интеграл от първи род от функцията $f(x, y, z)$ върху гладката повърхнина $\Sigma : \mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$, $(u, v) \in \Omega$, се дефинира чрез формулата

(7.5) $$\iint_\Sigma f(x, y, z)\,d\sigma = \iint_\Omega f(x(u, v), y(u, v), z(u, v))\,|\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v|\,dudv,$$

когато съществува интегралът в дясната страна на равенството.

Когато повърхнината е частично гладка, интегралът над нея се определя като сбор от интегралите по съставящите гладки повърхнини.

Повърхнинният интеграл от първи род има механични приложения, аналогично на тези за криволинеен интеграл от първи род.

Например ако Σ разглеждаме като материална повърхнина с плътност на разпределение на масата $\rho(x, y, z)$, то масата на повърхнината се дава по формулата

$$M=\iint\limits_{\Sigma}\rho d\sigma,$$

а координатите на центъра на тежестта G,

$$G_x=\frac{1}{M}\iint\limits_{\Sigma}x\rho d\sigma,\ G_y=\frac{1}{M}\iint\limits_{\Sigma}y\rho d\sigma,\ G_z=\frac{1}{M}\iint\limits_{\Sigma}z\rho d\sigma.$$

Ако разпределението на масата е хомогенно, то горните формули приемат вида

$$G_x=\frac{1}{\mu(\Sigma)}\iint\limits_{\Sigma}xd\sigma,\ G_y=\frac{1}{\mu(\Sigma)}\iint\limits_{\Sigma}yd\sigma,\ G_z=\frac{1}{\mu(\Sigma)}\iint\limits_{\Sigma}zd\sigma.$$

Например да пресметнем координатите на центъра на тежестта на хомогенна полусфера S с параметричното представяне (7.2). От съображения за симетрия имаме $G_x=G_y=0$. За да намерим G_z пресмятаме интеграла

$$I=\iint\limits_{S}zd\sigma,\ d\sigma=a^2\cos\theta d\varphi d\theta,$$

$$I=\iint\limits_{\Omega}a\sin\theta a^2\cos\theta d\varphi d\theta,\ \Omega:\left|\begin{array}{l}0\le\varphi\le 2\pi\\ 0\le\theta\le\dfrac{\pi}{2}\end{array}\right.,$$

$$I=a^3\left[\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\right]\left[\int\limits_0^{\pi/2}\sin\theta\cos\theta d\theta\right]=\pi a^3,$$

следователно

$$G_z=\frac{I}{\mu(S)}=\frac{\pi a^3}{2\pi a^2}=\frac{a}{2}.$$

Повърхнинният интеграл от първи род е обобщение на двоен интеграл и притежава характерните свойства на интеграла. Когато $f(x,y,z)\equiv 1$, стойността на интеграла е равна на мярката на множеството, над което се интегрира,

$$\iint\limits_{\Sigma}d\sigma=\mu(\Sigma).$$

Линейност. Интегралът от линейната комбинация е равен на съответната линейна комбинация от интеграли, ако $f=\lambda_1f_1+\lambda_2f_2+\cdots+\lambda_nf_n$, то

$$\iint\limits_{\Sigma}fd\sigma=\lambda_1\iint\limits_{\Sigma}f_1d\sigma+\lambda_2\iint\limits_{\Sigma}f_2d\sigma+\cdots+\lambda_n\iint\limits_{\Sigma}f_nd\sigma.$$

Адитивност. Ако $\Sigma=\Sigma_1\bigcup\Sigma_2\bigcup\cdots\bigcup\Sigma_n$, $\mu(\Sigma_i\bigcap\Sigma_j)=0$ за $i\ne j$, то

$$\iint\limits_{\Sigma}fd\sigma=\iint\limits_{\Sigma_1}fd\sigma+\iint\limits_{\Sigma_2}fd\sigma+\cdots+\iint\limits_{\Sigma_n}fd\sigma.$$

Позитивност. Ако функцията f е положителна над Σ, то

$$\iint\limits_{\Sigma}fd\sigma\ge 0.$$

Теорема за средните стойности. Нека $f(x,y,z)$ е непрекъсната над Σ, а функцията $g(x,y,z)$ не си сменя знака. Тогава

$$\iint\limits_{\Sigma}f(x,y,z)g(x,y,z)d\sigma=f(\xi,\eta,\zeta)\iint\limits_{\Sigma}g(x,y,z)d\sigma,$$

за някоя точка $(\xi,\eta,\zeta)\in\Sigma$. Когато $g(x,y,z)\equiv 1$, получаваме, че

$$\iint\limits_{\Sigma}f(x,y,z)d\sigma=f(\xi,\eta,\zeta)\mu(\Sigma),$$

за някоя точка $(\xi,\eta,\zeta)\in\Sigma$.

Оценка на интеграла. Нека за някои константи m, M и C да бъде изпълнено $m \le f(x,y,z) \le M$ и $|f(x,y,z)| \le C$, за всяко $(\xi,\eta,\zeta)\in\Sigma$. Тогава

$$m\mu(\Sigma) \le \iint_{\Sigma} f(x,y,z)d\sigma \le M\mu(\Sigma) \text{ и } \left|\iint_{\Sigma} f(x,y,z)d\sigma\right| \le C\mu(\Sigma).$$

3. Повърхнинни интеграл от втори род. Нека върху ориентираната чрез нормалите $\mathbf{N}=\mathbf{r}'_u\times\mathbf{r}'_v$ проста гладка повърхнина $\Sigma:\mathbf{r}=\mathbf{r}(u,v)$, $(u,v)\in\Omega$, е зададено векторното поле $\mathbf{F}=P\mathbf{i}+Q\mathbf{j}+R\mathbf{k}$. Тогава можем да образуваме скаларното произведение (Рис. 7.6)

$$\mathbf{Fn}=P\cos\alpha+Q\cos\beta+P\cos\gamma,\ \mathbf{n}=\frac{\mathbf{N}}{|\mathbf{N}|}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma).$$

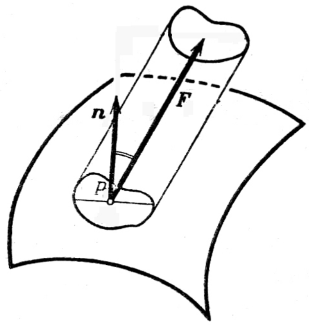

Рис. 7.6.

Определение 7.2. Повърхнинен интеграл от втори род от векторното поле $\mathbf{F}$ върху ориентираната проста гладка повърхнина Σ се нарича повърхнинният интеграл от първи род от скаларното произведение $\mathbf{Fn}$,

$$\iint_{\Sigma}\mathbf{Fn}d\sigma=\iint_{\Sigma}(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)d\sigma.$$

Когато повърхнината Σ е частично гладка, интегралът над се определя като сбор от интегралите по съставящите гладки повърхнини.

Съгласно определенията

$$\mathbf{Fn}d\sigma=\mathbf{F}\frac{\mathbf{N}}{|\mathbf{N}|}|\mathbf{N}|dudv=\mathbf{FN}dudv=\mathbf{F}(\mathbf{r}'_u\times\mathbf{r}'_v)dudv=(\mathbf{F},\mathbf{r}'_u,\mathbf{r}'_v)dudv,$$

където $(\mathbf{F},\mathbf{r}'_u,\mathbf{r}'_v)$ е смесеното произведение на векторите $\mathbf{F}$, $\mathbf{r}'_u$ и $\mathbf{r}'_v$, следователно

$$\mathbf{Fn}d\sigma=\begin{vmatrix}P & Q & R\\ x'_u & y'_u & z'_u\\ x'_v & y'_v & z'_v\end{vmatrix}dudv=\left[P\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}+Q\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}+R\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right]dudv, \tag{7.6}$$

$$\mathbf{Fn}d\sigma=Pdydz+Qdxdz+Rdxdy,$$

където е положено

$$dydz=\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}dudv,\ dzdx=\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}dudv,\ dxdy=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}dudv.$$

С помощта на последното означение, повърхнинният интеграл от втори род се записва във вида

$$\iint_{\Sigma}\mathbf{Fn}d\sigma=\iint_{\Sigma}Pdydz+Qdzdx+Rdxdy,$$

а от (7.6) следва формулата за неговото пресмятане

$$\iint_{\Sigma} \mathbf{Fn} d\sigma = \iint_{\Omega} \begin{vmatrix} P & Q & R \\ x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{vmatrix} dudv .$$

Повърхнинният интеграл от втори род е ***линеен***, ***адитивен*** и ***ориентиран***. Последното означава, че интегралът си сменя знака, когато сменим ориентацията на повърхнината,

$$\iint_{\Sigma_+} \mathbf{Fn} d\sigma = -\iint_{\Sigma_-} \mathbf{Fn} d\sigma .$$

Нека тялото $G \subset \mathrm{R}^3_{xyz}$ е оградено от гладката (или частично гладка) повърхнина $\Sigma = \partial G$, ориентирана по външните нормали и освен това нека G има цилиндричен вид

$$G : \left| \begin{array}{l} (x, y) \in \Omega \subset \mathrm{R}^2_{xy} \\ \varphi(x, y) \le z \le \psi(x, y) \end{array} \right.$$

където функциите $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$ са гладки в ограничената измерима затворена област $\overline{\Omega}$. Тогава повърхнината Σ се представя като обединение на три части $\Sigma = \Sigma_1 \bigcup \Sigma_2 \bigcup \Sigma_3$, където $\Sigma_1 : z = \varphi(x, y)$, $(x, y) \in \Omega$, Σ_2 е околната повърхнина на цилиндричната част на G и $\Sigma_3 : z = \psi(x, y)$, $(x, y) \in \Omega$ (Рис. 7.7). Нека функцията $R(x, y, z)$ има непрекъснати частни производни в G.

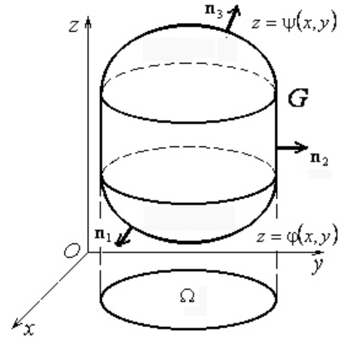

Рис. 7.7.

Да означим с $\mathbf{n}_1$, $\mathbf{n}_2$ и $\mathbf{n}_3$ единичните нормалите към съответните повърхнини. Тогава

$$\cos\gamma_1 = \mathbf{kn}_1 = -\frac{1}{\sqrt{1 + {\varphi'_x}^2 + {\varphi'_y}^2}} , \ \cos\gamma_2 = \mathbf{kn}_1 = 0 , \ \cos\gamma_3 = \mathbf{kn}_3 = \frac{1}{\sqrt{1 + {\psi'_x}^2 + {\psi'_y}^2}} .$$

Сега въз основа на определенията пресмятаме последователно следните повърхнинни интеграли от втори род

$$\iint_{\Sigma_3} R(x, y, z) \cos\gamma_3 d\sigma = \iint_{\Omega} R(x, y, \psi(x, y)) dxdy ,$$

$$\iint_{\Sigma_2} R(x, y, z) \cos\gamma_2 d\sigma = 0 ,$$

$$\iint_{\Sigma_1} R(x, y, z) \cos\gamma_1 d\sigma = -\iint_{\Omega} R(x, y, \varphi(x, y)) dxdy .$$

Като съберем последните три формули получаваме

$$\iint_{\Sigma} R \cos\gamma d\sigma = \iint_{\Omega} [R(x, y, \psi(x, y)) - R(x, y, \varphi(x, y))] dxdy ,$$

което според правилото за свеждане на троен интеграл към двоен може да се запише

$$\iint_{\Sigma} R\cos\gamma d\sigma = \iint_{\Omega}\left[\int_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} R'_z(x,y,z)dz\right]dxdy = \iiint_{G} R'_z dxdydz .$$

По същия начин намираме другите две равенства

$$\iint_{\Sigma} Q\cos\beta d\sigma = \iiint_{G} Q'_y dxdydz \text{ и } \iint_{\Sigma} P\cos\alpha d\sigma = \iiint_{G} P'_x dxdydz ,$$

откъдето след събиране получаваме

$$\iint_{\Sigma}(P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)d\sigma = \iiint_{G}\left[P'_x + Q'_y + R'_z\right]dxdydz ,$$

което се нарича ***формула на Гаус-Остроградски***. Изразът $P'_x + Q'_y + R'_z$ се нарича ***дивергенция*** на векторното поле $\mathbf{F}$ и се бележи $\operatorname{div}\mathbf{F} = P'_x + Q'_y + R'_z$. По този начин обосновахме верността на следната

Теорема 7.1 ***(Гаус-Остроградски)***. Нека ограниченото тяло $G \subset \mathsf{R}^3_{\mathsf{xyz}}$ е оградено от затворената частично гладка повърхнина $\Sigma = \partial G$, ориентирана по направление на външните нормали и нека векторното поле $\mathbf{F}(P,Q,R)$ е гладко в G. Тогава е в сила формулата

(7.7) $$\iint_{\Sigma}\mathbf{Fn}d\sigma = \iiint_{G}\operatorname{div}\mathbf{F}dxdydz . \blacksquare$$

Доказателството което приведохме се отнася за случаите, когато тялото G има цилиндричен вид и по трите направления (или може да се представи като крайно обединение от такива тела).

Повърхнинният интеграл от втори род се нарича още ***поток на векторното поле*** $\mathbf{F}$ през ориентираната повърхнина Σ и има физическа интерпретация в този смисъл. Едно векторно поле се нарича ***соленоидално***, когато неговата дивергенция е равна на нула. От формулата на Гаус-Остроградски се вижда, че потокът на соленоидално поле през затворена повърхнинна е равен на нула. Соленоидално например е полето на скоростите на частиците на течащ несвиваем флуид. В този случай теоремата на Гаус-Остроградски гласи, че количеството на входящия поток през затворена повърхнина е равно на количеството на изходящия, което е физически очевидно.

Формулата (7.7) може да се използва за пресмятане на обеми. Ако положим $F = (x,y,z)$, то $\operatorname{div}\mathbf{F} = 3$ и от (7.7) за обема на G намираме

$$\mu(G) = \frac{1}{3}\iint_{\Sigma}(x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)d\sigma ,$$

където интегралът се разглежда по външната страна на повърхнината.

4. Теорема на Стокс. Нека $\Sigma : \mathbf{r} = \mathbf{r}(u,v)$, $(u,v) \in \Omega$, е проста гладка двустранна повърхнина и $\gamma = \partial\Omega$ (Рис. 7.8). Тогава образът $\Gamma = \mathbf{r}(\gamma)$ на контура γ се нарича ***контур*** на повърхнината Σ (и се бележи с $\partial\Sigma$).

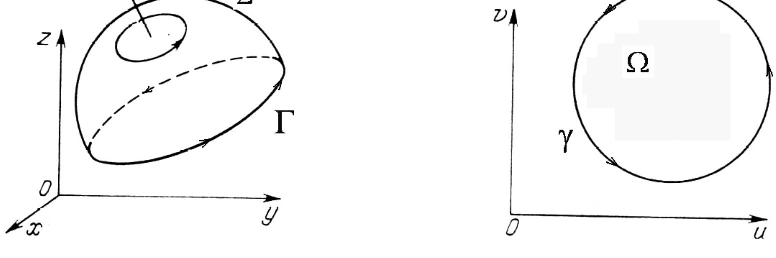

Рис. 7.8.

Контурът Γ е затворена гладка линия в пространството. Казва се, че Γ е ***положително ориентиран***, когато контурът γ е положително ориентиран в равнината $\mathsf{R}^2_{\mathsf{uv}}$. Освен това се казва, че ориентацията на Σ, породена от нормалите $\mathbf{n}$, е съгласувана с ориентацията на Γ, когато взаимното разположение на нормалите и ориентацията на Γ са както на рис. 7.8. Може да се докаже, че при зададена положителна ориентация на γ и Γ, съгласуваната ориентация на Σ се получава при определяне на единичните нормали точно по формулата

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v}{\left|\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v\right|}.$$

Ротор $\operatorname{rot}\mathbf{F}$ на векторното поле $\mathbf{F}(P,Q,R)$ се определя като стойността на формалната детерминанта

$$\operatorname{rot}\mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left(R'_y - Q'_z, P'_z - R'_x, Q'_x - P'_y\right),$$

където в първия ред стоят базисните вектори, във втория ред операторите на частно диференциране, а в третия ред координатните функции на векторното поле.

Нека $\Gamma \subset \mathsf{R}^3_{\mathsf{xyz}}$ е затворена частично гладка крива, а $\mathbf{F}(P,Q,R)$ е гладко векторно поле в Γ. Тогава интегралът

$$\oint_\Gamma \mathbf{F}d\mathbf{r} = \oint_\Gamma Pdx + Qdy + Rdz$$

се нарича ***циркулация*** на полето по кривата.

Теорема 7.2 ***(Стокс)***. Нека $\Sigma \subset \mathsf{R}^3_{\mathsf{xyz}}$ е проста частично гладка ориентирана повърхнина с контур $\Gamma = \partial\Sigma$ и нека $\mathbf{F}(P,Q,R)$ е гладко векторно поле, определено в Σ, при което ориентациите на Γ и Σ са съгласувани. Тогава циркулацията на полето $\mathbf{F}$ по контура Γ е равна на потока на $\operatorname{rot}\mathbf{F}$ през Σ,

(7.8) $$\oint_{\partial\Sigma} \mathbf{F}d\mathbf{r} = \iint_\Sigma \operatorname{rot}\mathbf{F}\mathbf{n}d\sigma.$$

Доказателство. Теоремата ще докажем при допълнителното предположение за наличие на непрекъснати втори производни за координатните функции на Σ. Да разгледаме отначало частния случай, когато $P \equiv Q \equiv 0$. Тогава

$$\operatorname{rot}\mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & R \end{vmatrix} = \left(R'_y, -R'_x, 0\right), \quad \iint_\Sigma \operatorname{rot}\mathbf{F}\mathbf{n}d\sigma = \iint_\Omega \begin{vmatrix} R'_y & -R'_x & 0 \\ x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{vmatrix} dudv,$$

следователно

(7.9) $$\iint_\Sigma \operatorname{rot}\mathbf{F}\mathbf{n}d\sigma = \iint_\Omega \left[R'_y\left(y'_u z'_v - y'_v z'_u\right) - R'_x\left(z'_u x'_v - z'_v x'_u\right)\right] dudv.$$

От друга страна

$$\oint_{\partial\Sigma} \mathbf{F}d\mathbf{r} = \oint_{\partial\Sigma} Rdz = \int_\gamma Rz'_u du + Rz'_v dv,$$

което съгласно формулата на Грийн, приложена за равнинната област $\Omega \subset \mathsf{R}^2_{\mathsf{uv}}$, може да се преобразува във вида

$$\oint_{\partial\Sigma} \mathbf{F}d\mathbf{r} = \iint_\Omega \left[\frac{\partial}{\partial u}\left(Rz'_v\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(Rz'_u\right)\right] dudv.$$

След диференциране намираме

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(Rz'_v\right)-\frac{\partial}{\partial v}\left(Rz'_u\right)=\left(R'_x x'_u+R'_y y'_u+R'_z z'_u\right)z'_v+Rz''_{vu}-\left(R'_x x'_v+R'_y y'_v+R'_z z'_v\right)z'_u-Rz''_{uv}=$$

$$=\left(R'_x x'_u+R'_y y'_u\right)z'_v-\left(R'_x x'_v+R'_y y'_v\right)z'_u$$

следователно

(7.10) $\oint\limits_{\partial\Sigma}\mathbf{F}d\mathbf{r}=\iint\limits_{\Omega}\left[\left(R'_x x'_u+R'_y y'_u\right)z'_v-\left(R'_x x'_v+R'_y y'_v\right)z'_u\right]dudv$.

Десните страни в равенствата (7.9) и (7.10) са равни, което доказва формулата на Стокс в този случай,

$$\oint\limits_{\partial\Sigma}\mathbf{F}d\mathbf{r}=\iint\limits_{\Sigma}\operatorname{rot}\mathbf{F}\mathbf{n}d\sigma,\text{ когато }\mathbf{F}=\left(0,0,R\right).$$

Аналогично се получава верността на формулата на Стокс за другите два частни случая, когато $\mathbf{F}=\left(0,Q,0\right)$ и когато $\mathbf{F}=\left(P,0,0\right)$. Общата формула за $\mathbf{F}=\left(P,Q,R\right)$ се получава след почленно събиране на трите частни формули. ■