

Лекция 12

§12. Диференциални уравнения от първи ред

1. Основни определения. *Диференциално уравнение* се нарича уравнение, в което участват известен брой производни на търсената функция. В общия случай диференциалното уравнение има вида $F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$, където F е непрекъснатата функция. Най-високата производна в записа се нарича ред на уравнението, например уравнението $y''' \sin y + x^2 \cos y' - 2xy'' = 0$ е от трети ред. Променливата x се нарича *независима променлива*, а чрез y е означена функцията която търсим в качеството на решение на въпросното уравнение. Една непрекъснатата функция $y(x)$ се нарича решение на диференциалното уравнение в интервала Δ , когато има непрекъснати производни до реда на уравнението и след заместване го удовлетворява тъждествено в интервала Δ . Ние ще разглеждаме основно уравнения разрешени относно старшата производна, които имат вида $y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$, където f е непрекъснатата функция. Под *общо решение* на дадено диференциално уравнение се разбира съвкупността от всичките негови решения. Намирането на общото решение на дадено диференциално уравнение е специфична и трудна задача, а в повечето случаи общото решение не може да се запише като краен израз от елементарни функции дори когато самото уравнение изглежда достатъчно просто. Едно такова уравнение например е уравнението $y' = y^2 - x^2$.

Намирането на неопределен интеграл от функцията $f(x)$ формално е частен случай на решаване на диференциално уравнение от първи ред $y' = f(x)$. Неговото общо решение е $y = \int f(x)dx + C$, в който запис присъства една произволна константа. Уравнението от n -ти ред $y^{(n)} = f(x)$ се решава чрез последователни интегрирания. Например да решим уравнението $y'' = \cos x$. След едно интегриране получаваме $y' = \sin x + C_1$, а след второто $y = -\cos x + C_1x + C_2$. Тук се получиха две произволни константи колкото е редът на уравнението. В общия случай ситуацията е аналогична. Общото решение на едно диференциално уравнение от ред n зависи от толкова наброй произволни константи и има вида $\Phi(x, y; C_1, C_2, \dots, C_n) = 0$. При фиксирани допустими стойности за тези константи, формулата за общо решение задава връзка между променливите x и y , която в типичния случай представлява (една или повече) крива в декартовата равнина \mathbb{R}_{xy}^2 . Тези криви се наричат *интегрални криви* на уравнението.

За уравнението $y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ ще разглеждаме още и *начална задача*, която се получава ако към това уравнение прибавим определен брой начални условия, които представляват стойностите на търсената функция и нейните производни до ред $n-1$ в дадена начална точка x_0 .

В тази лекция основно ще разглеждаме уравнения от първи ред решени относно производната, които се записват $y' = f(x, y)$, където $f(x, y)$ е непрекъснатата функция. Общото решение тук има вида $\Phi(x, y; C) = 0$. Съвкупността на интегралните криви се определя от един параметър – произволната константа C , а решаването на началната задача с начално условие $y(x_0) = y_0$ означава да се избере онази интегрална крива, която минава през точката на началните данни (x_0, y_0) . За тези уравнения променливите x и y са фактически равнопоставени по смисъла на самото уравнение, независимо от факта, че първоначално x се схваща като независима променлива, а y като функция на x . Тази равнопоставеност добре се забелязва от вида на общото

решение, както и от геометричното тълкуване на решенията като интегрални криви. Ако запишем производната като отношение на двата диференциала, $y' = \frac{dy}{dx}$, то уравнението $y' = f(x, y)$ приема вида

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \text{ или } \frac{dx}{dy} = \frac{1}{f(x, y)} = g(x, y),$$

което още веднъж показва еднаквото значение на променливите x и y . Последното обосновава равенството

$$(12.1) \quad P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0,$$

като най-обща форма на записване на едно диференциално уравнение от първи ред, решено относно производната. Уравнението (12.1) можем да презапишем

$$y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{P(x, y)}{Q(x, y)} \text{ или } x' = \frac{dx}{dy} = -\frac{Q(x, y)}{P(x, y)},$$

където x' означава производната на x като функция на y .

2. Уравнения с разделящи се променливи. Такива са уравненията от вида

$$y' = f(x)g(y),$$

където $f(x)$ и $g(x)$ са непрекъснати функции. Уравнението (12.2) записваме във вида

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y),$$

което позволява да разделим променливите

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx.$$

Като интегрираме последното, за общото решение получаваме формулата

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx + C,$$

където C е произволна константа.

Тук и навсякъде по-нататък в процедура за решаване на диференциални уравнения, под неопределен интеграл ще разбираме само една примитивна, която се избира с оглед на конкретно удобство. Това се прави по целесъобразност да не се смесват по произволен начин константите идващи от неопределения интеграл и за да имат ясен смисъл изразите, в които участват интегралните знаци.

Например да решим уравнението

$$(12.2) \quad y' = 4x\sqrt{y}.$$

Следвайки процедурата за решаване на уравнения с разделящи се променливи намираме

$$\frac{dy}{dx} = 4x\sqrt{y}, \quad \frac{dy}{2\sqrt{y}} = 2x dx,$$

откъдето след интегриране получаваме

$$\int \frac{dy}{2\sqrt{y}} = \int 2x dx + C.$$

Като пресметнем интегралите получаваме, че общото решение на (12.2) е

$$\sqrt{y} = x^2 + C.$$

Този подход крие известен риск да пропуснем някои частни решения, което няма да обсъждаме.

По аналогия с формулата (12.1), най-общата форма на запис за уравнения с разделящи се променливи е

$$P(x)dx + Q(y)dy = 0,$$

в която всъщност променливите са разделени още в запис на уравнението.

Нека едно уравнение може да се преобразува във вида

$$(12.3) \quad y' = f\left(\frac{y}{x}\right).$$

Тогав след полагане $y = xu$, $u = u(x)$, (12.3) се свежда към уравнение с разделящи се променливи. Имаме $y' = u + xu'$. След заместване получаваме

$$xu' + u = f(u), \quad x \frac{du}{dx} + u = f(u), \quad \frac{du}{f(u) - u} = \frac{dx}{x},$$

откъдето за общото решение на (12.3) намираме формулата

$$\int \frac{du}{f(u) - u} = \int \frac{dx}{x} + C,$$

в която след решаване на интегралите трябва да се върнем към първоначалните променливи x и y .

Например да решим уравнението

$$(12.4) \quad xy' = y(\ln y - \ln x).$$

Това уравнение се преобразува до хомогенно

$$y' = \frac{y}{x} \ln \frac{y}{x}.$$

Полагаме $y = xu$, $u = u(x)$, при което $y' = u + xu'$. Заместваме и намираме

$$u + xu' = u \ln u, \quad \frac{du}{u(\ln u - 1)} = \frac{dx}{x},$$

следователно общото решение има вида

$$\int \frac{du}{u(\ln u - 1)} = \int \frac{dx}{x} + C.$$

За неопределените интеграли имаме

$$\int \frac{du}{u(\ln u - 1)} = \ln|\ln u - 1| \quad \text{и} \quad \int \frac{dx}{x} = \ln|x|,$$

откъдето за общото решение получаваме

$$\ln|\ln u - 1| = \ln|x| + C.$$

В последния израз можем да положим $C = \ln C_1$, $C_1 > 0$, и да преобразуваме до вида

$$|\ln u - 1| = C_1|x|, \quad C_1 > 0.$$

Сега ще се освободим от модулите позволявайки константата C_1 да приема всякакви стойности. Окончателно за общото решение намираме формулата

$$\ln u - 1 = Cx, \quad u = e^{Cx+1},$$

което в първоначалните променливи е

$$y = xe^{Cx+1},$$

където C е произволна константа.

3. Линеини уравнения. Диференциалното уравнение от първи ред се нарича линейно, когато има вида

$$(12.5) \quad y' + a(x)y = b(x),$$

където коефициентите $a(x)$ и $b(x)$ се предполагат непрекъснати функции в отворения интервал Δ . Да положим $y(x) = z(x)e^{-\int a(x)dx}$ и да заместим в (12.5). Получаваме

$$z'e^{-\int a(x)dx} - ze^{-\int a(x)dx} a(x) + a(x)ze^{-\int a(x)dx} = b(x),$$

$$z' = e^{\int a(x)dx} b(x),$$

$$z = \int e^{\int a(x)dx} b(x) dx + C,$$

следователно всичките решения на (12.5) се дават по формулата

$$(12.6) \quad y = e^{-\int a(x)dx} \left[\int e^{\int a(x)dx} b(x) dx + C \right].$$

Например да решим уравнението

$$(12.7) \quad y' \cos x + y \sin x = 1.$$

Уравнението е линейно, понеже се преобразува като

$$y' + y \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{1}{\cos x}.$$

Съгласно формулата (12.6), неговото общо решение е

$$(12.8) \quad y = e^{-\int \frac{\sin x}{\cos x} dx} \left[\int e^{\int \frac{\sin x}{\cos x} dx} \frac{1}{\cos x} dx + C \right].$$

Пресмятаме

$$\int \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\ln|\cos x|, \quad e^{-\int \frac{\sin x}{\cos x} dx} = e^{\ln|\cos x|} = |\cos x|$$

и заместваме в (12.8), като разглеждаме два случая.

1) $\cos x > 0$. Тогава имаме

$$y = \cos x \left[\int \frac{dx}{\cos^2 x} + C \right] = \cos x [\operatorname{tg} x + C] = \sin x + C \cos x.$$

2) $\cos x < 0$. Тогава имаме

$$y = -\cos x \left[-\int \frac{dx}{\cos^2 x} + C \right] = -\cos x [-\operatorname{tg} x + C] = \sin x - C \cos x.$$

Понеже C е произволна константа, горните два случая могат да бъдат обединени с единствената формула

$$y = \sin x + C \cos x,$$

което е общото решение на (12.7). Изобщо когато целият първи множител във формулата (12.6) се получи в модул, при следващите преобразувания модульът се пренебрегва.

Уравнението на Бернули

$$(12.9) \quad y' + a(x)y = b(x)y^m, \quad m \neq 0, \quad m \neq 1,$$

се свежда до линейно след полагането $z = y^{1-m}$,

$$z' + (1-m)a(x)z = (1-m)b(x).$$

4. Точни диференциални уравнения. В този раздел ще разглеждаме уравнения от първи ред, записани в общата форма (12.1). Диференциалното уравнение

$$(12.10) \quad P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$$

се нарича **точно**, когато диференциалната форма $Pdx + Qdy$ се явява пълен диференциал на някоя функция $U(x, y)$. По тази причина точните уравнения се наричат още **уравнения, произхождащи от пълен диференциал**. Тук функциите $P(x, y)$ и

$Q(x, y)$ се предполагат гладки (имат непрекъснати частни производни) в областта $D \subset \mathbb{R}^2$. Съгласно определението за пълен диференциал, уравнението (12.10) е точно, ако за някоя гладка в D функция $U(x, y)$ е изпълнено

$$(12.11) \begin{cases} U'_x = P(x, y) \\ U'_y = Q(x, y) \end{cases}$$

при всяко $(x, y) \in D$. Ако уравнението (12.10) е точно, то имаме $U''_{xy} = P'_y(x, y)$ и $U''_{yx} = Q'_x(x, y)$. Сега от равенството на смесените производни следва, че по необходимост е налице условието

$$(12.12) Q'_x(x, y) \equiv P'_y(x, y),$$

което се нарича **условие за точност**. Ако уравнението (12.10) е точно и е породено от пълния диференциал на $U(x, y)$, то може да се запише във вида $dU(x, y) = 0$, а неговото общо решение се дава по формулата

$$(12.13) U(x, y) = C,$$

където C е произволна константа. Например да разгледаме уравнението

$$(y + 2x)dx + (x + 2y)dy = 0.$$

Това уравнение е точно, понеже е породено от пълния диференциал на функцията $U = xy + x^2 + y^2$, следователно неговото общо решение е

$$x^2 + y^2 + xy = C.$$

Решаването на дадено точно уравнение означава да се намери функцията $U(x, y)$, която го поражда. Това може да стане например по следната схема. Разглеждаме първото от равенствата (12.11) и го интегрираме по x . Получаваме

$$(12.14) U(x, y) = \int P(x, y)dx + \phi(y).$$

Тук $\phi(y)$ е константата на интегрирането, която може да зависи от другата променлива y . Диференцираме (12.14) по y и получаваме

$$U'_y = \frac{d}{dy} \left(\int P(x, y)dx \right) + \phi'(y),$$

откъдето съгласно второто равенство в (12.12) намираме

$$(12.15) \phi'(y) = Q(x, y) - \frac{d}{dy} \left(\int P(x, y)dx \right).$$

От последното, след преобразуване и евентуално опростяване на изразите, чрез интегриране определяме функцията $\phi(y)$. За да бъде възможно извършването на всичките действия е необходимо дясната страна на (12.15) да не зависи от x . Това условие е налице, понеже производната на израза по x е тъждествено нула,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left[Q(x, y) - \frac{d}{dy} \left(\int P(x, y)dx \right) \right] &= Q'_x - \frac{d^2}{dx dy} \left(\int P(x, y)dx \right) = \\ &= Q'_x - \frac{d^2}{dy dx} \left(\int P(x, y)dx \right) = Q'_x - \frac{d}{dy} P(x, y) \equiv 0 \end{aligned}$$

съгласно условието за точност (12.12).

Например да решим по тази схема уравнението

$$(12.16) (y - 2x)dx + (x + 3y^2)dy = 0.$$

Тук $P = y - 2x$ и $Q = x + 3y^2$. Имаме $Q'_x \equiv 1 \equiv P'_y$, следователно уравнението (12.16) е точно. Сега търсим функция $U(x, y)$, за която е изпълнено

$$\begin{cases} U'_x = y + 2x \\ U'_y = x - 3y^2 \end{cases}$$

Интегрираме първото равенство по x и получаваме

$$U = \int (y - 2x)dx + \varphi(y) = y \int dx - 2 \int x dx + \varphi(y),$$

$$(12.17) U = yx - x^2 + \varphi(y).$$

След диференциране по y , като отчетем второто равенство намираме

$$x - 3y^2 = x + \varphi'(y),$$

откъдето пресмятаме

$$\varphi(y) = - \int 3y^2 dy = -y^3.$$

Сега като заместим в (12.17), получаваме $U = yx - x^2 + y^3$, следователно общото решение на (12.16) се получава по формулата

$$yx - x^2 + y^3 = C,$$

където C е произволна константа.

Изложената схема за определяне на $U(x, y)$ може да стартира и от второто равенство (12.11), като в този случай отначало ще интегрираме по y , а след това за да използваме информацията от първото равенство ще диференцираме по x .

Условието за точност (12.12) $Q'_x(x, y) \equiv P'_y(x, y)$ е същевременно и условие за независимост на криволинейния интеграл от втори род от пътя. По тази причина, ако областта D , където са определени функциите $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ е едносвързана, то функцията $U(x, y)$ може да се определи по формулата

$$(12.18) U(x, y) = \int_{(a,b)}^{(x,y)} P dx + Q dy,$$

където (a, b) е една фиксирана точка от областта D , а криволинейният интеграл се взема по някоя (коя да е) частично гладка крива, която свързва точките (a, b) и (x, y) . В този случай обикновено се избира начупена линия, а в случая на изпъкнали области може да се вземе отсечката, която свързва двете точки.

Например за уравнението (12.16) избираме $(a, b) = (0, 0)$, а кривата на интегриране е отсечката J , свързваща началото с точката (x, y) , която има следното параметрично представяне

$$J: \begin{cases} x \rightarrow tx \\ y \rightarrow ty \\ 0 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Тогава по формулата за пресмятане на криволинейен интеграл от втори род, за (12.18) намираме

$$U(x, y) = \int_0^1 (ty + 2tx)xdt + (tx - 3t^2 y^2)ydt,$$

$$U(x, y) = (yx + 2x^2) \int_0^1 t dt + yx \int_0^1 t dt - 3y^3 \int_0^1 t^2 dt,$$

$$U(x, y) = (yx + 2x^2) \frac{1}{2} + yx \frac{1}{2} - 3y^3 \frac{1}{3} = xy + x^2 - y^3.$$

При началната задача за уравнението (12.10) търсим интегрална крива, която минава през точката (x_0, y_0) . Ако уравнението е точно, то решението се получава по формулата

$$U(x, y) = U(x_0, y_0),$$

където $U(x, y)$ е зададена чрез (12.18), което в частност оправдава записа на общото решение във вида (12.13). Като изберем $(a, b) = (x_0, y_0)$, за решението на началната задача получаваме

$$(12.19) U(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} P dx + Q dy = 0.$$

Ако $P(x_0, y_0) \neq 0$ или $Q(x_0, y_0) \neq 0$, то според теоремата за неявните функции множеството, дефинирано от (12.19) представлява гладка крива през точката (x_0, y_0) , която крива е търсеното решение на началната задача.

Ако $P(x_0, y_0) = Q(x_0, y_0) = 0$, то въпросното множество може да не представлява крива. Например да разгледаме началната задача за търсене на интегрална крива за уравнението $x dx + y dy = 0$ през точката $(0, 0)$. По формулата (12.19) за решение се получава множеството $x^2 + y^2 = 0$, което представлява единствената точка $(0, 0)$.

Уравненията с разделящи се променливи

$$(12.20) P(x) dx + Q(y) dy = 0$$

са частен случай на точни уравнения, понеже тук $Q'_x(y) \equiv P'_y(x) \equiv 0$. От направените разсъждения следва, че решението на началната задача за (12.20) има вида

$$\int_{x_0}^x P(x) dx + \int_{y_0}^y Q(y) dy = 0,$$

ако е налице условието $P(x_0) \neq 0$ или $Q(y_0) \neq 0$.