Лекция 13

§13. Линейни диференциални уравнения от n-ти ред

1. Определения и основни свойства. Детерминанта на Вронски. Линейно диференциално уравнение (**ЛДУ**) от n-ти ред $(n \in \mathrm{N})$ се нарича уравнението

(13.1) $a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x)$,

където коефициентите $a_n(x)$, $a_{n-1}(x)$, ..., $a_1(x)$, $a_0(x)$ и функцията $f(x)$ се предполагат ***непрекъснати*** в отворения интервал Δ. Освен това винаги ще предполагаме, че старшият коефициент $a_n(x)$ е ***различен от нула*** за всяко $x \in \Delta$. При тези предположения уравнението (13.1) е от ред n във всяка точка на интервала Δ. Когато функцията $f(x)$ е тъждествено нула, уравнението (13.1) се нарича линейно хомогенно диференциално уравнение (**ЛХДУ**) от n-ти ред

(13.2) $a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$.

Нека x_0 е някаква точка от Δ. Тогава за уравнението (13.1) може да се постави следната ***начална задача*** (***задача на Коши***)

$$(13.3)\quad \left| \begin{array}{l} a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x) \\ y(x_0) = y_0^0 \\ y'(x_0) = y_0^1 \\ \ldots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{n-1} \end{array} \right.$$

която се състои от самото уравнение и n на брой ***начални условия***. Началните условия са стойностите на търсената функция и на нейните производни до ред $n-1$ в ***началната точка*** x_0. Валидна е следната

Теорема 13.1 (***за съществуване и единственост***). При направените предположения, началната задача (13.3) има решение, което се определя по единствен начин в целия интервал Δ. ■

От тази теорема следва верността на

Твърдение 13.1. Началната задача за хомогенно уравнение с нулеви начални условия

$$(13.4)\quad \left| \begin{array}{l} a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0 \\ y(x_0) = 0 \\ y'(x_0) = 0 \\ \ldots \\ y^{(n-1)}(x_0) = 0 \end{array} \right.$$

има единственото решение $y(x) \equiv 0$. ■

Доказателство. Функцията $y(x) \equiv 0$ очевидно е решение на началната задача (13.4). От клаузата за единственост на теорема 13.1 следва, че други решения няма. ■

Твърдение 13.1 ще бъде използвано по-нататък при доказване основните резултати от този раздел.

Решенията на ЛХДУ (13.2) образуват линейно пространство.

Твърдение 13.2. Нека y_1, y_2, ..., y_m са решения на ЛХДУ (13.2). Тогава всяка тяхна линейна комбинация $y = \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \cdots + \lambda_m y_m$ също е решения на (13.2).

Доказателство. Доказателството на това твърдение се получава лесно от факта, че диференцирането е линейна операция. По условие

$$a_n(x)y_1^{(n)} + a_{n-1}(x)y_1^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y_1' + a_0(x)y_1 = 0,$$

$$a_n(x)y_2^{(n)} + a_{n-1}(x)y_2^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y_2' + a_0(x)y_2 = 0,$$

...

$$a_n(x)y_m^{(n)} + a_{n-1}(x)y_m^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y_m' + a_0(x)y_m = 0.$$

Като умножим всяко от горните равенства λ_1, λ_2, ..., λ_m и съберем, получаваме, че линейната комбинация удовлетворява ЛХДУ (13.2), понеже

$$y^{(k)} = [\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \cdots + \lambda_m y_m]^{(k)} = \lambda_1 y_1^{(k)} + \lambda_2 y_2^{(k)} + \cdots + \lambda_m y_m^{(k)},\ k = 0,1,\ldots,n. \ \blacksquare$$

Твърдение 13.3. Нека y_1 и y_2 са решения на ЛДУ (13.1). Тогава тяхната разлика $y = y_1 - y_2$ е решение на ЛХДУ (13.2).

Доказателство. По условие

$$a_n(x)y_1^{(n)} + a_{n-1}(x)y_1^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y_1' + a_0(x)y_1 = f(x),$$

$$a_n(x)y_2^{(n)} + a_{n-1}(x)y_2^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y_2' + a_0(x)y_2 = f(x).$$

Като извадим почленно двете равенства и се възползваме от факта, че диференцирането е линейна операция, получаваме верността на твърдението, понеже

$$y^{(k)} = [y_1 - y_2]^{(k)} = y_1^{(k)} - y_2^{(k)},\ k = 0,1,\ldots,n. \ \blacksquare$$

Функциите y_1, y_2, ..., y_m се наричат ***линейно независими*** в интервала Δ, ако равенството $\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \cdots + \lambda_m y_m = 0$, за всяко $x \in \Delta$, е възможно единствено когато $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_m = 0$ и ***линейно зависими*** в противен случай. Функциите y_1, y_2, ..., y_m са линейно зависими в интервала Δ тогава и само тогава, когато могат да се намерят константи λ_1, λ_2, ..., λ_m, поне една от които е различна от нула, за които линейната комбинация $\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \cdots + \lambda_m y_m = 0$ тъждествено нула в целия интервал Δ.

Определение 13.1. Казва се, че решенията на ЛХДУ (13.2) y_1, y_2, ..., y_n образуват ***фундаментална система***, когато са линейно независими в интервала Δ.

Детерминанта на Вронски $W(x)$ на функциите y_1, y_2, ..., y_n се нарича следната детерминанта от n-ти ред

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \cdots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \cdots & y_n'(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}.$$

Основната теорема в този раздел е

Теорема 13.2. Нека y_1, y_2, ..., y_n са решения на ЛХДУ (13.2). Тогава следните условия са еквивалентни.

1) y_1, y_2, ..., y_n са линейно независими и образуват фундаментална система.

2) $W(x_0) \neq 0$, за някое $x_0 \in \Delta$.

3) $W(x) \neq 0$, за всяко $x \in \Delta$.

Доказателство. Доказателството ще проведем по кръговата схема $T_1 \Rightarrow T_2 \Rightarrow T_3 \Rightarrow T_1$, след като преобразуваме теоремата в еквивалентна форма. Ще докажем, че следните условия са еквивалентни.

T_1) y_1, y_2, ..., y_n са линейно зависими.

T_2) $W(x)=0$, за всяко $x \in \Delta$.
T_3) $W(x_0)=0$, за някое $x_0 \in \Delta$.

Тук на мястото на всяко от условията на теорема 13.2 е взето неговото логическо отрицание. От законите на логиката знаем, че дадени твърдения са еквивалентни тогава и само тогава, когато са еквивалентни техните отрицания.

1) $T_1 \Rightarrow T_2$. Нека решенията y_1, y_2, ..., y_n са линейно зависими. Тогава съществува тяхна линейна комбинация, с поне един различен от нула коефициент, която е тъждествено нула в интервала Δ,

$$\lambda_1 y_1(x)+\lambda_2 y_2(x)+\cdots+\lambda_n y_n(x)=0,\ x\in\Delta.$$

Диференцирайки последователно последното равенство, получаваме

$$\lambda_1 y_1'(x)+\lambda_2 y_2'(x)+\cdots+\lambda_n y_n'(x)=0,\ x\in\Delta,$$

...

$$\lambda_1 y_1^{(n-1)}(x)+\lambda_2 y_2^{(n-1)}(x)+\cdots+\lambda_n y_n^{(n-1)}(x)=0,\ x\in\Delta,$$

което означава, че стълбовете в детерминантата на Вронски са линейно зависими и $W(x)=0$, за всяко $x \in \Delta$.

2) Твърдението $T_2 \Rightarrow T_3$ е очевидно.

3) $T_3 \Rightarrow T_1$. Да предположим сега, че за някое $x_0 \in \Delta$ е налице $W(x_0)=0$. Равенството на нула на една детерминанта означава, че нейните стълбове (както и нейните редове са линейно зависими). Нека константите λ_1, λ_2, ..., λ_n, поне една от които е различна от нула, са такива, че като умножим с тях съответните стълбове на $W(x_0)$ и съберем се получава нулевия стълб. Да положим

(13.5) $y_*(x)=\lambda_1 y_1(x)+\lambda_2 y_2(x)+\cdots+\lambda_n y_n(x)$.

Съгласно избора на константите, за функцията $y_*(x)$ е изпълнено

$$y_*(x_0)=y_*'(x_0)=\cdots=y_*^{(n-1)}(x_0)=0,$$

следователно y_* е решение на хомогенната начална задача (13.4) с нулеви начални условия и съгласно твърдение 13.1, $y_*(x)\equiv 0$.

По този начин (13.5) се оказа една нетривиална линейна комбинация на решенията y_1, y_2, ..., y_n, която е тъждествено нула в Δ, а това по определение означава, че те са линейно зависими. ■

Теорема 13.2 показва, че ако y_1, y_2, ..., y_n са решения на ЛХДУ (13.2), то $W(x)=0$, за всяко $x \in \Delta$, или $W(x)\neq 0$, за всяко $x \in \Delta$.

2. Структура на решенията. Отначало ще се убедим, че наистина съществуват фундаментални системи от решения на (13.2). Да изберем едно $x_0 \in \Delta$. Нека функцията y_1 е решение на началната задача (13.3) с начални условия $y_1(x_0)=1$, $y_1'(x_0)=0$, ..., $y_1^{(n-1)}(x_0)=0$. Аналогично нека y_2 е решение на началната задача (13.3) с начални условия $y_2(x_0)=0$, $y_2'(x_0)=1$, ..., $y_2^{(n-1)}(x_0)=0$ и т.н. нека y_n е решение на началната задача (13.3) с начални условия $y_n(x_0)=0$, $y_n'(x_0)=0$, ..., $y_n^{(n-1)}(x_0)=1$. Тогава тяхната детерминанта на Вронски

$$W(x_0)=\begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}=1\neq 0$$

което според теорема 13.2 означава, че y_1, y_2, ..., y_n образуват фундаментална система от решения за ЛХДУ (13.2). От направеното разсъждение се вижда, че съществуват различни фундаментални системи и всяка от тях се получава като изберем някаква $n \times n$ матрица A с различна от нула детерминанта и колоните на тази матрица обявим за начални данни на функциите, които образуват фундаменталната система.

Нека y_1, y_2, ..., y_n е една (коя да е) фундаментална система за ЛХДУ (13.2) и нека y_* е някакво решение на това хомогенно уравнение. Да изберем една точка $x_0 \in \Delta$ и да образуваме линейната комбинация

$$\varphi(x) = \lambda_1 y_1(x) + \lambda_2 y_2(x) + \cdots + \lambda_n y_n(x) - y_*(x).$$

Функцията $\varphi(x)$ е решение на ЛХДУ (13.2) понеже е линейна комбинация на такива решения. Да изберем константите λ_1, λ_2, ..., λ_n от условието

$$\varphi(x_0) = \varphi'(x_0) = \cdots = \varphi^{(n-1)}(x_0) = 0,$$

което е еквивалентно на следната линейна система относно λ_1, λ_2, ..., λ_n,

$$\begin{aligned}
&\lambda_1 y_1(x_0) + \lambda_2 y_2(x_0) + \cdots + \lambda_n y_n(x_0) = y_*(x_0),\\
&\lambda_1 y_1'(x_0) + \lambda_2 y_2'(x_0) + \cdots + \lambda_n y_n'(x_0) = y_*'(x_0)\\
&\ldots\\
&\lambda_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + \lambda_2 y_2^{(n-1)}(x_0) + \cdots + \lambda_n y_n^{(n-1)}(x_0) = y_*^{(n-1)}(x_0),
\end{aligned}$$

чиято детерминанта е точно $W(x_0)$ и съгласно теорема 13.2 е различна от нула понеже системата от решения се предполага фундаментална. Функцията $\varphi(x)$ се оказа решение на хомогенната начална задача с нулеви начални условия (13.4) и следователно $\varphi(x) \equiv 0$, откъдето за решението y_* намираме следното представяне

$$y_*(x) = \lambda_1 y_1(x) + \lambda_2 y_2(x) + \cdots + \lambda_n y_n(x), \ x \in \Delta.$$

По този начин доказахме

Теорема 13.3. Всичките решения на ЛХДУ (13.2) се получават по формулата

(13.6) $y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \cdots + C_n y_n$,

където y_1, y_2, ..., y_n е една (коя да е) фундаментална система, а C_1, C_2, ..., C_n са произволни константи. ■

Формулата (13.6) задава ***общото решение*** на ЛХДУ (13.2). Във вида на това общо решение участват n на брой произволни константи, което съответства на реда на уравнението.

Например да разгледаме уравнението

(13.7) $y'' + y = 0$.

Лесно се проверява, че функциите $y_1 = \sin x$ и $y_2 = \cos x$ са решения. Освен това за тяхната детерминанта на Вронски имаме

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ \cos x & -\sin x \end{vmatrix} = -1 \neq 0,$$

следователно y_1 и y_2 образуват фундаментална система. Сега съгласно теорема 13.3, общото решение на уравнението (13.7) се получава по формулата

$$y = C_1 \sin x + C_2 \cos x.$$

За да получим вида на общото решение за ЛДУ (13.1) е необходимо да познаваме едно частно решение y_0.

Теорема 13.4. Всичките решения на ЛДУ (13.1) се получават по формулата

(13.8) $y = y_0 + C_1 y_1 + C_2 y_2 + \cdots + C_n y_n$, където y_0 е едно (кое да е) частно решение, y_1, y_2, ..., y_n е една (коя да е) фундаментална система на съответното хомогенно уравнение (13.2), а C_1, C_2, ..., C_n са произволни константи.

Доказателство. Да разгледаме едно решение y на ЛДУ (13.1). Съгласно твърдение 13.3, разликата $y - y_0$ е решение на ЛХДУ (13.2) и според теорема 13.3,

$$y - y_0 = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \cdots + C_n y_n ,$$

което доказва теоремата. ■

Формулата (13.8) задава ***общото решение*** на ЛДУ (13.1).

Например да разгледаме уравнението

(13.9) $y'' + y = x$.

Съответното хомогенно уравнение е (13.7), за което вече установихме, че функциите $y_1 = \sin x$ и $y_2 = \cos x$ образуват фундаментална система. Лесно се вижда, че функцията $y_0 = x$ е едно частно решение. Сега по формулата (13.8) за общото решение на (13.9) намираме

$$y = x + C_1 \sin x + C_2 \cos x .$$

Теорема 13.4 може да се схваща като непосредствено обобщение на теорема 13.3, понеже хомогенното уравнение има едно очевидно частно решение $y_0 \equiv 0$.