Лекция 14

§14. Линейни диференциални уравнения с постоянни коефициенти

1. Определения и основни свойства. Линейно диференциално уравнение от n-ти ред с постоянни коефициенти $(n \in \mathrm{N})$ се нарича уравнението

(14.1) $a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = f(x)$, $a_n \neq 0$,

където коефициентите a_n, a_{n-1}, ..., a_1, a_0 са константи. Тук функцията $f(x)$ се предполага ***непрекъсната*** в отворения интервал Δ, в който търсим решенията. Когато функцията $f(x)$ е тъждествено нула, уравнението (14.1) се нарича хомогенно

(14.2) $a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0$.

Тези уравнения са частен случай на линейни диференциални уравнения, следователно за тях е валидна общата теория. Преди всичко трябва да се научим да намираме фундаментални системи от решения за ЛХДУ (14.2). Основната роля тук се изпълнява от ***характеристичния полином***

(14.3) $\chi(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$.

Да разгледаме функцията $y = e^{\alpha x}$, $\alpha \in \mathrm{R}$. Пресмятаме $y' = \alpha e^{\alpha x}$, $y'' = \alpha^2 e^{\alpha x}$, ..., $y^{(n)} = \alpha^n e^{\alpha x}$. След заместване в лявата страна на уравнението (14.2) и изнасяне на общия множител $e^{\alpha x}$ пред скоби получаваме

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = e^{\alpha x}\left[a_n \alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + \cdots + a_1 \alpha + a_0\right] = \chi(\alpha) e^{\alpha x}.$$

Последното показва, че ако α е реален корен на $\chi(z)$, то функцията $y = e^{\alpha x}$ е решение на ЛХДУ (14.2). Най-прост е случаят, когато характеристичният полином $\chi(z)$ има n на брой реални и различни корени α_1, α_2, ..., α_n (прости реални корени). Тогава всяка от функциите $y_1 = e^{\alpha_1 x}$, $y_2 = e^{\alpha_2 x}$, ..., $y_n = e^{\alpha_n x}$ е решение на ЛХДУ (14.2). Непосредствено се проверява, че тяхната детерминанта на Вронски има вида

$$W(x) = e^{(\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n)x} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_1^{n-1} & \alpha_2^{n-1} & \cdots & \alpha_n^{n-1} \end{vmatrix} = e^{(\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n)x} VDM[\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n],$$

където $VDM[\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n]$ е детерминантата на Вандермонд за числата α_1, α_2, ..., α_n. От курса по линейна алгебра знаем, че $VDM[\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n] \neq 0$, когато числата, които я пораждат са взаимно различни, което тук е налице по предположение. Сега от теорема 14.3 следва, че функциите $y_k = e^{\alpha_k x}$, $k = 1, 2, \ldots, n$, образуват една фундаментална система за ЛХДУ (14.2). По този начин доказахме

Твърдение 14.1. Нека характеристичният полином $\chi(z)$ има прости реални корени α_1, α_2, ..., α_n. Тогава общото решение на ЛХДУ (14.2) се дава по формулата

$$y = C_1 e^{\alpha_1 x} + C_2 e^{\alpha_2 x} + \cdots + C_n e^{\alpha_n x}. \ \blacksquare$$

Например да разгледаме уравнението

(14.4) $y'' - y = 0$.

Тук $\chi(z) = z^2 - 1$ има два прости корена $z_{1,2} = \pm 1$, следователно функциите $y_1 = e^x$ и $y_2 = e^{-x}$ образуват фундаментална система и общото решение на (14.4) е

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}.$$

Ако въведем ***диференциалния оператор*** $p = \frac{d}{dx}$, то уравнението (14.2) може да се запише във вида

$$\chi(p)y = 0,$$

където

$$\chi(p) = a_n p^n + a_{n-1}p^{n-1} + \cdots + a_1 p + a_0 = a_n \frac{d^n}{dx^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{d}{dx} + a_0 .$$

Да разгледаме функцията $y = x^m e^{\alpha x}$, $\alpha \in \mathrm{R}$, $m = 1,2,\ldots$, и да приложим върху нея диференциалния оператор $p - \alpha$. Имаме

(14.5) $$(p-\alpha)\left[x^m e^{\alpha x}\right] = \frac{d}{dx}\left[x^m e^{\alpha x}\right] - \alpha x^m e^{\alpha x} = m x^{m-1}e^{\alpha x} + \alpha x^m e^{\alpha x} - \alpha x^m e^{\alpha x} = m x^{m-1} e^{\alpha x}.$$

Ако $m = 1$, то като приложим още веднъж оператора $p - \alpha$ получаваме

$$(p-\alpha)^2\left[xe^{\alpha x}\right] = (p-\alpha)\left[(p-\alpha)\left[xe^{\alpha x}\right]\right] = (p-\alpha)e^{\alpha x} = \frac{d}{dx}e^{\alpha x} - \alpha e^{\alpha x} = 0 .$$

Ако $m \geq 2$, то като приложим още веднъж оператора $p - \alpha$ получаваме

$$(p-\alpha)^2\left[x^m e^{\alpha x}\right] = (p-\alpha)\left[(p-\alpha)\left[x^m e^{\alpha x}\right]\right] = (p-\alpha)\left[m x^{m-1} e^{\alpha x}\right] = m(m-1)x^{m-2}e^{\alpha x} .$$

Разсъждавайки по същия начин получаваме формулата

$$(p-\alpha)^m\left[x^m e^{\alpha x}\right] = m!(p-\alpha)\left[e^{\alpha x}\right],$$

следователно

(14.6) $$(p-\alpha)^{m+1}\left[x^m e^{\alpha x}\right] = 0 .$$

Нека α е реален корен от кратност $m \geq 1$ за характеристичния полином. Тогава $\chi(z) = \chi_1(z)(z-\alpha)^m$, за някой полином $\chi_1(z)$. Да разгледаме функцията $y = x^k e^{\alpha x}$, $0 \leq k < m$, и да приложим върху нея диференциалния оператор $\chi(p)$. Имаме

$$\chi(p)\left[x^k e^{\alpha x}\right] = \chi_1(p)\left[(p-\alpha)^m\left[x^k e^{\alpha x}\right]\right] = \chi_1(p)[0] = 0,$$

следователно всичките функции $e^{\alpha x}$, $xe^{\alpha x}$, ..., $x^{m-1}e^{\alpha x}$ са решения на хомогенното уравнение. Броят на тези функции е точно кратността на корена α.

За да изследваме случая на кратни реални корени се нуждаем от следното помощно

Твърдение 14.2. Нека α_1, α_2, ..., α_m са различни реални числа, а $P_1(x)$, $P_2(x)$, ..., $P_m(x)$ са полиноми. Тогава равенството

(14.7) $$e^{\alpha_1 x}P_1(x) + e^{\alpha_2 x}P_2(x) + \cdots + e^{\alpha_m x}P_m(x) = 0,$$

за всяко x от някакъв отворен интервал Δ, е възможно, единствено когато всичките полиноми са тъждествено равни на нула.

Доказателство. Доказателството ще проведем чрез индукция по m. За $m = 1$ твърдението следва от основните свойства на полиномите. Нека твърдението е вярно за някое m и да разгледаме тъждеството

$$e^{\alpha_1 x}P_1(x) + e^{\alpha_2 x}P_2(x) + \cdots + e^{\alpha_m x}P_m(x) + e^{\alpha_{m+1} x}P_{m+1}(x) = 0,$$

(14.8) $$e^{(\alpha_1-\alpha_{m+1})x}P_1(x) + e^{(\alpha_2-\alpha_{m+1})x}P_2(x) + \cdots + e^{(\alpha_m-\alpha_{m+1})x}P_m(x) + P_{m+1}(x) = 0 .$$

Нека d_j, $j = 1,2,\ldots,m$, са старшите коефициенти на полиномите $P_j(x)$. Ще се убедим, че всяко $d_j = 0$, $j = 1,2,\ldots,m$, което означава, че всичките полиноми $P_j(x)$, $j = 1,2,\ldots,m$, са тъждествено равни на нула. Да диференцираме съотношението (14.8) $k = \deg P_{m+1}(x) + 1$ пъти, докато събираемото $P_{m+1}(x)$ се превърне в нула. Съгласно формулата на Лайбниц получаваме

$$\sum_{j=1}^{m} e^{(\alpha_j-\alpha_{m+1})x}\left[(\alpha_j-\alpha_{m+1})^k P_j(x)+k(\alpha_j-\alpha_{m+1})^{k-1}P_j'(x)+\cdots\right]=0 .$$

От индукционното предположение следва, че

$$(\alpha_j-\alpha_{m+1})^k P_j(x)+k(\alpha_j-\alpha_{m+1})^{k-1}P_j'(x)+\cdots\equiv 0,\ j=1,2,\ldots,m .$$

От друга страна старшите коефициенти на горните полиноми са $d_j(\alpha_j-\alpha_{m+1})^k$, следователно $d_j=0$, $j=1,2,\ldots,m$. Сега (14.8) приема вида $P_{m+1}(x)=0$, за всяко $x\in\Delta$, следователно и за последният полином също имаме $P_{m+1}(x)\equiv 0$. ■

Вече сме готови да докажем

Твърдение 14.3. Нека характеристичният полином $\chi(z)$ има само реални корени α_1, α_2, ..., α_m ($\alpha_i\neq\alpha_j$ за $i\neq j$) с кратности r_1, r_2, ..., r_m, $r_1+r_2+\cdots+r_m=n$. Тогава всеки корен α_j, $j=1,2,\ldots,m$, поражда следната верига от решения на ЛХДУ (14.2)

$$\alpha_j\to e^{\alpha_j x}, xe^{\alpha_j x},\ldots,x^{r_j-1}e^{\alpha_j x},$$

които в своята съвкупност образуват една фундаментална система от решения.

Доказателство. От (14.6) знаем, че всяка от функциите $e^{\alpha_j x}$, $xe^{\alpha_j x}$, ..., $x^{r_j-1}e^{\alpha_j x}$ е решение на ЛХДУ (14.2). Техният общ брой е точно $r_1+r_2+\cdots+r_m=n$, следователно за да докажем, че те образуват фундаментална система е достатъчно да проверим, че са линейно независими във всеки отворен интервал Δ. Всяка тяхна линейна комбинация има вида на лявата страна в равенството (14.7). Сега тяхната линейна независимост следва от заключението на твърдение 14.2. ■

Например да решим уравнението

(14.9) $y^{(5)}-7y^{(4)}+19y'''-25y''+16y'-4y=0$.

Характеристичният полином има вида $\chi(z)=(z-1)^3(z-2)^2$ с два реални корена, $z_1=1$ с кратност $r_1=3$ и $z_2=2$ с кратност $r_2=2$. Според твърдение 14.1 тези корени пораждат следните решения

$$z_1=1\to e^x, xe^x, x^2e^x \text{ и } z_2=2\to e^{2x}, xe^{2x}.$$

Общото решение на (14.9) се дава по формулата

$$y=C_1e^x+C_2xe^x+C_3x^2e^x+C_4e^{2x}+C_5xe^{2x}.$$

В тривиалния случай на уравнение $y^{(n)}=0$ имаме $\chi(z)=z^n$ с един корен $z_0=0$ с кратност $r_0=n$, който поражда веригата $e^{0x}\equiv 1$, $xe^{0x}\equiv x$, ..., $x^{n-1}e^{0x}\equiv x^{n-1}$, следователно неговото общо решение се дава по формулата $y=C_0+C_1x+C_2x^2+\cdots+C_{n-1}x^{n-1}$, което е вида на произволен полином от степен по-малка или равна на $n-1$.

Нека сега $\chi(z)$ има за корен комплексното число $\gamma=\alpha+i\beta$, $\beta\neq 0$. Тогава спрегнатото $\overline{\gamma}=\alpha-i\beta$ също е корен при това със същата кратност. Съгласно формулата на Ойлер имаме

$$e^{(\alpha+i\beta)x}=e^{\alpha x}e^{i\beta x}=e^{\alpha x}\cos\beta x+ie^{\alpha x}\sin\beta x.$$

Непосредствено се проверява, че тази формула се съгласува диференцирането,

(14.10) $\left[e^{(\alpha+i\beta)x}\right]^{(k)}=(\alpha+i\beta)^k e^{(\alpha+i\beta)x}=\left[e^{\alpha x}\cos\beta x\right]^{(k)}+i\left[e^{\alpha x}\sin\beta x\right]^{(k)}$, $k=0,1,2,\ldots$.

Последното показва в частност, че функцията $y=e^{(\alpha+i\beta)x}$ е комплексно решение на ЛХДУ (14.2), понеже

$$\chi(p)\left[e^{(\alpha+i\beta)x}\right]=e^{(\alpha+i\beta)x}\chi(\alpha+i\beta)=0.$$

Това комплексно решение можем да запишем във вида

$y = y_{re} + iy_{im}$, където $y_{re} = e^{\alpha x}\cos\beta x$ и $y_{im} = e^{\alpha x}\sin\beta x$.

Отново от формулата (14.10) следва, че всяка от реалните функции y_{re} и y_{im} е решение на ЛХДУ (14.2), понеже

$$\chi(p)y_{re} + i\chi(p)y_{im} = e^{(\alpha+i\beta)x}\chi(\alpha+i\beta) = 0.$$

Сега вместо двойката комплексни решения

$$y = e^{(\alpha+i\beta)x} = y_{re} + y_{im} \text{ и } \bar{y} = e^{(\alpha-i\beta)x} = y_{re} - iy_{im}$$

можем да вземем двойката реални решения y_{re} и y_{im}. Например уравнението $y'' + y = 0$ има за корени двойката комплексно спрегнати числа $z_{1,2} = \pm i$ (тук $\alpha = 0$ и $\beta = 1$) и общото решение може да се запише във вида $Y = Ce^{ix} + \overline{C}e^{-ix}$, където C е произволна комплексна константа. Отнесено към горните разсъждения, за този пример имаме $y_{re} = \cos x$ и $y_{im} = \sin x$, където $y = e^{ix}$, и общото решение може да се запише във вида $Y = C_1\cos x + C_2\sin x$, където C_1 и C_2 са произволни реални константи.

Разсъждавайки аналогично се установява верността на следната теорема, която е непосредствено обобщение на твърдение 14.3.

Теорема 14.1. Една фундаментална система за ЛХДУ (14.2) може да се получи като вземем съвкупността на всичките частни решения, образувани по следната схема.
1) Всеки реален корен α на характеристичния полином $\chi(z)$, от кратност r, поражда следната верига от решения

$$\alpha \to e^{\alpha x}, xe^{\alpha x}, \dots, x^{r-1}e^{\alpha x}.$$

Техният брой е равен на кратността r.
2) Всяка двойка комплексно спрегнати корени $\alpha \pm i\beta$, $\beta \neq 0$, на характеристичния полином $\chi(z)$, от кратност r, поражда следната верига от двойки решения

$$\begin{Bmatrix}\alpha+i\beta\\ \alpha-i\beta\end{Bmatrix} \to \begin{Bmatrix}e^{\alpha x}\cos\beta x\\ e^{\alpha x}\sin\beta x\end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix}xe^{\alpha x}\cos\beta x\\ xe^{\alpha x}\sin\beta x\end{Bmatrix}, \dots, \begin{Bmatrix}x^{r-1}e^{\alpha x}\cos\beta x\\ x^{r-1}e^{\alpha x}\sin\beta x\end{Bmatrix}.$$

Техният брой е равен на $2r$, колкото е сумарната кратност на двата корена $\alpha + i\beta$ и $\alpha - i\beta$. ■

Например да разгледаме уравнението

(14.11) $y''' - y = 0$.

Тук $\chi(z) = z^3 - 1 = (z-1)(z^2+z+1)$, който има един реален корен $z_1 = 1$ с кратност $r_1 = 1$ и двойка комплексно спрегнати корени $z_{2,3} = \dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ с обща кратност $r_{2,3} = 1$. Според теорема 14.1 имаме

$$z_1 = 1 \to e^x,$$

$$\begin{Bmatrix}z_1\\ z_2\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}-\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\\ -\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\end{Bmatrix} \to \begin{Bmatrix}e^{-\frac{1}{2}x}\cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}x\\ e^{-\frac{1}{2}x}\sin\dfrac{\sqrt{3}}{2}x\end{Bmatrix},$$

следователно общото решение на (14.11) има вида

$$y = C_1e^x + C_2e^{-\frac{x}{2}}\cos\frac{\sqrt{3}x}{2} + C_3e^{-\frac{x}{2}}\sin\frac{\sqrt{3}x}{2}.$$

2. Метод на Лагранж за търсене на частни решения. Да разгледаме линейното диференциално уравнение (**ЛДУ**) от n-ти ред

(14.12) $a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x)$,

където коефициентите $a_n(x)$, $a_{n-1}(x)$, ..., $a_1(x)$, $a_0(x)$ и функцията $f(x)$ са непрекъснати в отворения интервал Δ и старшият коефициент $a_n(x) \neq 0$, $x \in \Delta$, както и съответното хомогенно уравнение

(14.13) $a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$.

От теорема 13.4 знаем, че общото решение на ЛДУ (14.12) се дава от формулата

$$y = y_0 + C_1 y_1 + C_2 y_2 + \cdots + C_n y_n,$$

където y_0 е някакво частно решение, а y_1, y_2, ..., y_n е някаква фундаментална система на хомогенното уравнение (14.13).

Решаването на дадено линейно диференциално уравнение изисква да разполагаме с някаква фундаментална система от решения за съответното хомогенно уравнение както и някакво частно решение. Тук ще приведем един общ метод за намиране на частни решения, който носи името метод на Лагранж или още ***метод на вариране на константите***, понеже отправната точка за неговото търсене е формулата за общото решение на хомогенното уравнение

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \cdots + C_n y_n,$$

в която обаче величините C_k, $k = 1,2,\ldots,n$, се предполагат функции на независимата променлива x.

Теорема 14.2 ***(Лагранж).*** При направените предположения, едно частно решение на ЛДУ (14.12) може да се намери във вида

(14.14) $y_0(x) = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x) + \cdots + C_n(x)y_n(x)$,

където C_1, C_2, ..., C_n са функции, чиито производни удовлетворяват системата

$$(14.15)\quad \left| \begin{array}{l} C_1' y_1 + C_2' y_2 + \cdots + C_n' y_n = 0 \\ C_1' y_1' + C_2' y_2' + \cdots + C_n' y_n' = 0 \\ \cdots \\ C_1' y_1^{(n-2)} + C_2' y_2^{(n-2)} + \cdots + C_n' y_n^{(n-2)} = 0 \\ C_1' y_1^{(n-1)} + C_2' y_2^{(n-1)} + \cdots + C_n' y_n^{(n-1)} = \dfrac{f(x)}{a_n(x)} \end{array} \right.$$

Доказателство. Отначало да отбележим, че системата (14.15), която се нарича ***система на Лагранж***, винаги има решение, понеже нейната детерминанта е точно детерминантата на Вронски, която е различна от нула навсякъде в интервала Δ. Ще проверим чрез заместване, че функцията определена от (14.14) наистина е решение на уравнението (14.12), когато функциите $C_k(x)$, $k = 1,2,\ldots,n$, удовлетворяват системата на Лагранж (14.15). За тази цел да пресметнем последователно производните на $y_0(x)$.

По условие е изпълнено

(14.16) $y_0(x) = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x) + \cdots + C_n(x)y_n(x)$,

което след диференциране дава

$$y_0'(x) = \left[C_1(x)y_1'(x) + C_2(x)y_2'(x) + \cdots + C_n(x)y_n'(x)\right] + \\ + \left[C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) + \cdots + C_n'(x)y_n(x)\right]$$

откъдето съгласно първия ред в системата на Лагранж получаваме

(14.17) $y_0'(x) = \left[C_1(x)y_1'(x) + C_2(x)y_2'(x) + \cdots + C_n(x)y_n'(x)\right]$.

След диференциране получаваме

$$y_0''(x)=\left[C_1(x)y_1''(x)+C_2(x)y_2''(x)+\cdots+C_n(x)y_n''(x)\right]+$$
$$+\left[C_1'(x)y_1'(x)+C_2'(x)y_2'(x)+\cdots+C_n'(x)y_n'(x)\right]$$

откъдето съгласно втория ред в системата на Лагранж намираме

(14.18) $y_0''(x)=\left[C_1(x)y_1''(x)+C_2(x)y_2''(x)+\cdots+C_n(x)y_n''(x)\right]$.

Продължавайки по същия начин получаваме

(14.19) $y_0^{(n-1)}(x)=\left[C_1(x)y_1^{(n-1)}(x)+C_2(x)y_2^{(n-1)}(x)+\cdots+C_n(x)y_n^{(n-1)}(x)\right]$,

което след диференциране дава

$$y_0^{(n)}(x)=\left[C_1(x)y_1^{(n)}(x)+C_2(x)y_2^{(n)}(x)+\cdots+C_n(x)y_n^{(n)}(x)\right]+$$
$$+\left[C_1'(x)y_1^{(n-1)}(x)+C_2'(x)y_2^{(n-1)}(x)+\cdots+C_n'(x)y_n^{(n-1)}(x)\right]$$

откъдето съгласно последния ред в системата на Лагранж намираме

(14.20) $y_0^{(n)}(x)=\left[C_1(x)y_1^{(n)}(x)+C_2(x)y_2^{(n)}(x)+\cdots+C_n(x)y_n^{(n)}(x)\right]+\dfrac{f(x)}{a_n(x)}$.

Умножаваме (14.16) с $a_0(x)$, (14.17) с $a_1(x)$, (14.18) с $a_2(x)$ и т.н. умножаваме (14.19) с $a_{n-1}(x)$ и накрая умножаваме (14.20) с $a_n(x)$, след което събираме почленно. Като прегрупираме събираемите в тази сума получаваме

$$\begin{aligned}
&a_0y_0+a_1y_0'+a_2y_0''+\cdots+a_{n-1}y_0^{(n-1)}+a_ny_0^{(n)}=\\
&\quad=C_1\left[a_0y_1+a_1y_1'+a_2y_1''+\cdots+a_{n-1}y_1^{(n-1)}+a_ny_1^{(n)}\right]+\\
&\quad+C_2\left[a_0y_2+a_1y_2'+a_2y_2''+\cdots+a_{n-1}y_2^{(n-1)}+a_ny_2^{(n)}\right]+\\
&\quad+\cdots+\\
&\quad+C_{n-1}\left[a_0y_{n-1}+a_1y_{n-1}'+a_2y_{n-1}''+\cdots+a_{n-1}y_{n-1}^{(n-1)}+a_ny_{n-1}^{(n)}\right]+\\
&\quad+C_n\left[a_0y_n+a_1y_n'+a_2y_n''+\cdots+a_{n-1}y_n^{(n-1)}+a_ny_n^{(n)}\right]+a_n\frac{f}{a_n}
\end{aligned}$$

откъдето отчитайки, че всичките y_1, y_2, ..., y_n са решения на хомогенното уравнение получаваме

$$a_0(x)y_0(x)+a_1(x)y_0'(x)+a_2(x)y_0''(x)+\cdots+a_{n-1}(x)y_0^{(n-1)}(x)+a_n(x)y_0^{(n)}(x)=f(x),$$

което трябваше да докажем. ■

Например да намерим общото решение на уравнението

(14.21) $y''+y=\dfrac{1}{\cos x}$.

Решаването на такива задачи се оформя в последователни стъпки. Отначало търсим общото решение на съответното хомогенно уравнение $y''+y=0$.Тук имаме двойка комплексно спрегнати корени $z_{1,2}=\pm i$ и както вече знаем това общо решение има вида $Y_{\text{hom}}=C_1\cos x+C_2\sin x$. При следващата стъпка търсим едно частно решение по метода на Лагранж във вида

$$y_0=C_1(x)\cos x+C_2(x)\sin x,$$

където функциите $C_1(x)$ и $C_2(x)$ удовлетворяват системата на Лагранж

$$\left|\begin{aligned}&C_1'\cos x+C_2'\sin x=0\\&-C_1'\sin x+C_2'\cos x=\frac{1}{\cos x}\end{aligned}\right.$$

Като умножим първото уравнение със $\sin x$, второто с $\cos x$ и съберем получаваме $C_2'=1$, откъдето намираме $C_2=\int C_2'dx=\int dx=x$. Като умножим първото уравнение с

$\cos x$, второто със $\sin x$ и от първото извадим второто получаваме $C_1' = -\dfrac{\sin x}{\cos x}$, откъдето намираме $C_1 = \int C_1' dx = -\int \dfrac{\sin x}{\cos x} dx = \ln|\cos x|$. По този начин едно частно решение се получава във вида

$$y_0 = \ln|\cos x| \cos x + x \sin x .$$

Сега като се позовем на формулата за общото решение на нехомогенно уравнение $Y = y_0 + Y_{\text{hom}}$, за общото решение на (14.21) получаваме

$$Y = \ln|\cos x| \cos x + x \sin x + C_1 \cos x + C_2 \sin x .$$

3. Сведения за диференчните уравнения. Уравнение от вида

(14.22) $a_k y_{n+k} + a_{k-1} y_{n+k-1} + \cdots + a_0 y_n = b_n$, $a_k a_0 \neq 0$, $k \geq 1$,

се нарича ***линейно диференчно уравнение*** от k-ти ред с коефициенти, $a_k \neq 0$, a_{k-1}, ..., a_1, $a_0 \neq 0$ и дясна част редицата $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$. Под решение на (14.22) се разбира всяка редица от числа $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ такива, че всеки $k+1$ на брой поредни y_n, y_{n+1}, ..., y_{n+k} удовлетворяват (14.22). За да получим едно решение $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ е достатъчно да зададем първите k на брой y_0, y_1, ,..., y_{k-1} като начални условия, след което всяко следващо се получава на базата на предишните посредством формулата (14.22).

Свойствата на уравнението (14.22) се определят почти изцяло от свойствата на ***хомогенното*** уравнение

(14.23) $a_k y_{n+k} + a_{k-1} y_{n+k-1} + \cdots + a_0 y_n = 0$,

което се получава от (14.22) при нулева дясна част. Непосредствено се вижда, че ако $\{y_n^{(i)}\}_{n=0}^{\infty}$, $i = 1,2,\ldots,m$, са решения на хомогенното уравнение (14.23), то всяка тяхна ***линейна комбинация***

$$\lambda_1 \{y_n^{(1)}\}_{n=0}^{\infty} + \lambda_2 \{y_n^{(2)}\}_{n=0}^{\infty} + \cdots + \lambda_m \{y_n^{(m)}\}_{n=0}^{\infty} = \{\lambda_1 y_n^{(1)} + \lambda_2 y_n^{(2)} + \cdots + \lambda_m y_n^{(m)}\}_{n=0}^{\infty}$$

също представлява решение на хомогенното уравнение (14.23). Освен това, ако $\{y_n^{(1)}\}_{n=0}^{\infty}$ и $\{y_n^{(2)}\}_{n=0}^{\infty}$ са решения на нехомогенното уравнение (14.22), то тяхната ***разлика*** $\{y_n^{(2)} - y_n^{(2)}\}_{n=0}^{\infty}$ се явява решение на хомогенното уравнение (14.23), следователно решенията на нехомогенното уравнение се получават от едно кое да е частно решение $\{y_n^{(0)}\}_{n=0}^{\infty}$ след прибавяне на всевъзможните решения на хомогенното уравнение. Тук ситуацията е напълно сходна с решаването на линейни диференциални равнения с постоянни коефициенти.

Съвкупността от решенията на хомогенното уравнение образува линейно пространство, което както ще видим след малко е ***крайномерно с размерност*** k. Казва се, че решенията $\{y_n^{(i)}\}_{n=0}^{\infty}$, $i = 1,2,\ldots,k$, на хомогенното уравнение (14.23) образуват ***фундаментална система***, когато са линейно независими.

Теорема 14.3. Решенията $\{y_n^{(i)}\}_{n=0}^{\infty}$, $i = 1,2,\ldots,k$, на хомогенното уравнение (14.23) образуват фундаментална система тогава и само тогава, когато детерминанта

$$(14.24)\quad \begin{vmatrix} y_0^{(1)} & y_0^{(2)} & \cdots & y_0^{(k)} \\ y_1^{(1)} & y_1^{(2)} & \cdots & y_1^{(k)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{k-1}^{(1)} & y_{k-1}^{(2)} & \cdots & y_{k-1}^{(k)} \end{vmatrix}$$

е различна от нула.

Доказателство. Ще докажем еквивалентно, че решенията $\left\{y_n^{(i)}\right\}_{n=0}^{\infty}$, $i = 1,2,\ldots,k$, са линейно зависими тогава и само тогава, когато детерминантата (14.24) е равна на нула. **1**) Ако решенията са линейно зависими, то съществуват константи λ_1, λ_2, ..., λ_k, поне една от които е различна от нула, за които

(14.25) $\lambda_1 y_s^{(1)} + \lambda_2 y_s^{(2)} + \cdots + \lambda_k y_s^{(k)} = 0$,

при всяко $s = 0,1,2,\ldots$, от което в частност следва, че стълбовете в детерминантата (14.25) са линейно зависими, а от там и нейната стойност е равна на нула. **2**) Да предположим сега, че детерминантата (14.25) е равна на нула. Тогава между нейните стълбове има линейна зависимост, т.е. съществуват константи λ_1, λ_2, ..., λ_k, поне една от които е различна от нула, за които (14.25) е изпълнено при $s = 0,1,\ldots,n-1$. Верността на (14.25) при останалите стойности на $s = k, k+1,\ldots$ следва последователно от факта, че $\left\{y_n^{(i)}\right\}_{n=0}^{\infty}$, $i = 1,2,\ldots,k$, по определение са решения на хомогенното уравнение (14.23). Верността на (14.25) при всяко $s = 0,1,2,\ldots$ означава линейна зависимост между въпросните решения. ■

Теорема 14.4. Нека $\left\{y_n^{(i)}\right\}_{n=0}^{\infty}$, $i = 1,2,\ldots,k$, образуват фундаментална система от решения на хомогенното уравнение (14.23), Тогава всяко решение $\left\{y_n\right\}_{n=0}^{\infty}$ на (14.23) може да се представи като линейна комбинация на решенията $\left\{y_n^{(i)}\right\}_{n=0}^{\infty}$, $i = 1,2,\ldots,k$,

(14.26) $\left\{y_n\right\}_{n=0}^{\infty} = \lambda_1 \left\{y_n^{(1)}\right\}_{n=0}^{\infty} + \lambda_2 \left\{y_n^{(2)}\right\}_{n=0}^{\infty} + \cdots + \lambda_k \left\{y_n^{(k)}\right\}_{n=0}^{\infty}$,

при което това представяне е единствено.

Доказателство. Вече знаем, че всяка линейна комбинация от решения на хомогенното уравнение отново представлява решение на хомогенното уравнение. Тук трябва да докажем и обратното. Нека $\left\{y_n\right\}_{n=0}^{\infty}$ е едно решение на (14.26). Тогава линейната система

$$(14.27)\quad \begin{aligned} y_0^{(1)}\lambda_1 + y_0^{(2)}\lambda_2 + \cdots + y_0^{(k)}\lambda_k &= y_0 \\ y_1^{(1)}\lambda_1 + y_1^{(2)}\lambda_2 + \cdots + y_1^{(k)}\lambda_k &= y_1 \\ &\cdots \\ y_{n-1}^{(1)}\lambda_1 + y_{n-1}^{(2)}\lambda_2 + \cdots + y_{n-1}^{(k)}\lambda_k &= y_{n-1} \end{aligned}$$

има единствено решение λ_1, λ_2, ..., λ_k, понеже нейната детерминанта е различна от нула. Да образуваме сега следното решение на хомогенното уравнение

(14.28) $\left\{z_n\right\}_{n=0}^{\infty} = \lambda_1 \left\{y_n^{(1)}\right\}_{n=0}^{\infty} + \lambda_2 \left\{y_n^{(2)}\right\}_{n=0}^{\infty} + \cdots + \lambda_k \left\{y_n^{(k)}\right\}_{n=0}^{\infty} - \left\{y_n\right\}_{n=1}^{\infty}$.

Съгласно (14.27) имаме $z_0 = z_1 = \cdots = z_{k-1} = 0$, следователно всичките елементи на $\left\{z_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ са нули, което заедно с (14.28) доказва теоремата. ■

По този начин решенията от една фундаментална система образуват ***базис*** за всичките решения на хомогенното уравнение.

Да потърсим решение за хомогенното уравнение от вида $\{z^n\}_{n=0}^{\infty}$, т.е. решения, които представляват поредните степени на някакво число z. Като заместим получаваме

$$a_k z^{n+k} + a_{k-1} z^{n+k-1} + \dots + a_1 z^{n+1} + a_0 z^n = 0,$$

$$z^n \left[a_k z^k + a_{k-1} z^{k-1} + \dots + a_1 z + a_0\right] = 0,$$

което означава, че ако z е корен на ***характеристичния полином***

$$\chi(z) = a_k z^k + a_{k-1} z^{k-1} + \dots + a_1 z + a_0,$$

то редицата $\{z^n\}_{n=0}^{\infty}$ представлява решение за (14.23).

Непосредствено, макар и с повече пресмятания се получава, че ако z е корен от кратност r на характеристичния полином, то всичките редици

$$\{z^n\}_{n=0}^{\infty},\ \{nz^n\}_{n=0}^{\infty},\ \dots,\ \{n^{r-1} z^n\}_{n=0}^{\infty},$$

са решения на хомогенното уравнение. Освен това, ако характеристичният полином $\chi(z)$ има двойка комплексно спрегнати корена $z = \rho e^{i\varphi}$ и $\bar{z} = \rho e^{-i\varphi}$, с обща кратност r, то всичките редици

$$\{\rho^n \cos n\varphi\}_{n=0}^{\infty},\ \{\rho^n \sin n\varphi\}_{n=0}^{\infty},\ \dots,\ \{n^{r-1}\rho^n \cos n\varphi\}_{n=0}^{\infty},\ \{n^{r-1}\rho^n \sin n\varphi\}_{n=0}^{\infty},$$

също са решения на хомогенното уравнение.

Може да се докаже, че така описаните решения на хомогенното уравнение, получено от корените на характеристичния полином, които лесно се вижда, че са точно k на брой, образуват фундаментална система.

Да разгледаме например диференчното уравнение

(14.29) $y_{n+2} = y_{n+1} + y_n$,

с условия $y_0 = y_1 = 1$, което поражда ***редицата на Фибоначи***. В този случай имаме характеристично уравнение $\chi(z) = z^2 - z - 1$ с два прости корена

$$z_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \text{ и } z_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2},$$

откъдето следва, че редиците

$$\left\{\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right\}_{n=0}^{\infty} \text{ и } \left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n\right\}_{n=0}^{\infty},$$

представляват решения на (14.29). Тези редици освен това представляват фундаментална система, понеже те две на брой, точно колкото е редът на уравнението (14.29) и

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1-\sqrt{5}}{2} & \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} \neq 0,$$

което съгласно теорема 14.3 гарантира фундаменталността. Сега от теорема 14.4 следва, че всичките решения на (14.29) се изчерпват с линейните комбинации

$$y_n = \alpha\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + \beta\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n,\ n = 0,1,2,\dots.$$

По условие $y_0 = y_1 = 1$, откъдето за коефициентите α и β намираме системата

$$\alpha + \beta = 1$$

$$\alpha\frac{1-\sqrt{5}}{2} + \beta\frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1,$$

която има решения

$$\alpha = \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}} \text{ и } \beta = \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}}.$$

По този начин за числата на Фибоначи получихме формулата

$$y_n = \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right].$$