Лекция 10

§10. Редове на Фурие – L^2-теория

1. Сведения за пространства със скаларно произведение. В този раздел ще се занимаваме с периодични функции с период $T>0$. Една функция $f(x)$, определена за всяко $x \in \mathrm{R}$, се нарича T-периодична, когато $f(x+T)=f(x)$, за всяко $x \in \mathrm{R}$. Отначало ще изследваме систематично случая, когато $T=2\pi$. Теорията на редовете на Фурие е свързана с възможността за представяне на една 2π-периодична функция във вид на ***тригонометричен ред***

(10.1) $$f(x) \sim \frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \cos nx + b_n \sin nx\right]$$

с някакви подходящи коефициенти a_n, $n=0,1,2,\dots$, и b_n, $n=1,2,\dots$. Изискването за 2π-периодичност на функцията $f(x)$ е съгласувано с вида на тригонометричния ред в дясната страна на (10.1), понеже този ред очевидно представлява 2π-периодична функция, когато действително представлява някаква функция в познатия смисъл. Обикновено една 2π-периодична функция $f(x)$ ще предполагаме зададена по някакъв начин в основния интервал $[-\pi,\pi)$ или $[0,2\pi)$, което поради периодичността напълно определя стойностите на $f(x)$ в останалите точки.

Разбирането на истинската природа на представянето в ред на Фурие преминава през абстрактната теория на пространствата със скаларно произведение. Казва се, че ***линейното пространство*** H е ***пространство със скаларно произведение***, когато между елементите на H е зададено скаларно произведение $\langle f,g\rangle$, при изпълнение на следните определящи свойства.

1) $\langle f,f\rangle \ge 0$ и $\langle f,f\rangle = 0$ единствено когато $f=\mathbf{0}$.

2) $\langle f,g\rangle = \langle g,f\rangle$.

3) $\langle \lambda_1 f_1+\lambda_2 f_2, g\rangle = \lambda_1\langle f_1,g\rangle + \lambda_2\langle f_2,g\rangle$.

От изброените свойства веднага следва, че скаларното произведение е линейно и по двата си аргумента.

Елементарен пример за пространство със скаларно произведение е евклидовото пространство R^n, където ***каноничното*** скаларното произведение на векторите $x(x_1,x_2,\dots,x_n)$ и $y(y_1,y_2,\dots,y_n)$ се определя по формулата $\langle x,y\rangle = x_1y_1+x_2y_2+\dots+x_ny_n$. Тук е полезен записът $\langle x,y\rangle = y^T x$, където векторите x и y са представени чрез своите координати като вектор-стълбове, а произведението е по известното правило "ред по стълб". Може да се докаже, че всичките скаларни произведения в R^n се получават по формулата $\langle x,y\rangle_A = \langle Ax,y\rangle = y^T Ax$, където A е някаква симетрична и ***положително определена*** матрица. Една симетрична $(n\times n)$ матрица A се нарича положително определена, когато квадратичната форма $\varphi(x)=x^T Ax=\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j$ е положителна, $\varphi(x)>0$, за всеки ненулев вектор $x\in \mathrm{R}^n$. Съществуват ефективни необходими и достатъчни условия за проверка кога една симетрична матрица е положително определена, например критерият на Силвестър, според който симетричната матрица A е положително определена тогава и само тогава, когато всичките нейни главни минори са положителни.

В пространството $C[a,b]$ на непрекъснатите в интервала $[a,b]$, $b > a$, функции може да се въведе ***канонично*** скаларно произведение по формулата

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx .$$

Други скаларни произведения в $C[a,b]$ се получават след въвеждане на ***тегло*** $w(x) > 0$,

$$\langle f, g\rangle_w = \int_a^b w(x)f(x)g(x)dx .$$

За тегловата функция $w(x)$ обикновено се предполага, че е непрекъсната и положителна.

Теорема 10.1 (***неравенство на Коши***). Нека H е пространство със скаларно произведение. Тогава е в сила неравенството

(10.2) $|\langle f, g\rangle| \le \sqrt{\langle f, f\rangle}\sqrt{\langle g, g\rangle}$,

при което равенство се достига единствено когато елементите f и g са линейно зависими.

Доказателство. Ако някой от елементите f или g е нулевият елемент на H, то твърдението на теоремата е очевидно, затова по-нататък ще предполагаме, че $f \ne \mathbf{0}$ и $g \ne \mathbf{0}$. Да разгледаме функцията $\varphi(t) = \langle f + tg, f + tg\rangle$. Съгласно линейността и симетричността на скаларното произведение имаме

$$\varphi(t) = \langle f, f\rangle + 2t\langle f, g\rangle + t^2\langle g, g\rangle ,$$

което показва, че $\varphi(t)$ е квадратна функция на променливата t, за която съгласно първото свойство е изпълнено $\varphi(t) \ge 0$, за всяко $t \in \mathrm{R}$, при което равенството $\varphi(t_0) = 0$ за някое t_0 е възможно тогава и само тогава, когато $f + t_0 g = \mathbf{0}$, т.е. когато f и g са линейно зависими. Една квадратна функция не си сменя знака тогава и само тогава, когато дискриминантата е неотрицателна,

$$D = (2\langle f, g\rangle)^2 - 4\langle f, f\rangle\langle g, g\rangle \le 0 ,$$

което веднага води до верността на неравенството (10.2). От друга страна ако f и g са линейно независими, то $\varphi(t) > 0$, за всяко $t \in \mathrm{R}$, от което следва строго неравенство за дискриминантата и съответно строго неравенство в (10.2). Ако пък f и g са линейно зависими, то веднага се проверява, че (10.2) се превръща в равенство. ■

Ако H е пространство със скаларно произведение, то H може да се разглежда като ***линейно нормирано пространство*** с норма

$$\|f\| = \sqrt{\langle f, f\rangle} ,$$

която се нарича ***норма, породена от скаларното произведение***. Едно линейно пространство X се нарича нормирано, когато над неговите елементи $f \in X$ е определена функция норма $\|f\|$ със следните три свойства.

1) $\|f\| \ge 0$ и $\|f\| = 0$, единствено когато $f = \mathbf{0}$.

2) За всеки скалар $\lambda \in \mathrm{R}$ (или $\lambda \in \mathrm{C}$) е в сила $\|\lambda f\| = |\lambda|\|f\|$.

3) $\|f + g\| \le \|f\| + \|g\|$, за всеки два елемента $f, g \in X$.

Първото и второто свойство на нормата са очевидни. За да докажем третото преобразуваме

$$\|f + g\|^2 = \langle f + g, f + g\rangle = \langle f, f\rangle + 2\langle f, g\rangle + \langle g, g\rangle = \|f\|^2 + 2\langle f, g\rangle + \|g\|^2 .$$

Сега от неравенството на Коши получаваме

$$\|f+g\|^2 \le \|f\|^2 + 2|\langle f,g\rangle| + \|g\|^2 \le \|f\|^2 + 2\|f\|\|g\| + \|g\|^2 = (\|f\|+\|g\|)^2,$$

откъдето след коренуване намираме

$$\|f+g\| \le \|f\| + \|g\|.$$

Ако в последното е налице равенство, то равенство ще има и в неравенството на Коши, което означава, че f и g са линейно зависими.

Нека H е пространство със скаларно произведение и f_1, f_2, ..., f_n са някакви линейно независими елементи. Да изберем един елемент $g \in H$ и да разгледаме следната задача за намиране ***елемента на най-добро приближение*** за елемента $g \in H$ в линейното пространство

$$L = l(f_1, f_2, \dots, f_n) = \{f \in H \mid f = \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \dots + \lambda_n f_n\}$$

относно нормата, породена от скаларното произведение. Трябва да се определят коефициентите λ_1, λ_2, ..., λ_n по такъв начин, че функцията

$$\varphi(\lambda) = \|\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \dots + \lambda_n f_n - g\|$$

да достига своя минимум, което е все едно функцията

$$\varphi^2(\lambda) = \langle \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \dots + \lambda_n f_n - g, \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \dots + \lambda_n f_n - g\rangle$$

да достига минимум.

Векторите f и g се наричат ортогонални, $f \perp g$, когато тяхното скаларно произведение е равно на нула, $\langle f,g\rangle = 0$.

Твърдение 10.1. Нека $f \in L = l(f_1, f_2, \dots, f_n)$ е елемент на най-добро приближение за $g \in H$. Тогава разликата $f-g$ е ортогонална на всеки елемент от L, $\langle f-g,h\rangle = 0$ за всяко $h \in L$.

Доказателство. Нека f е елемент на най-добро приближение. Да фиксираме едно произволно $h \in L$. Ще покажем, че $\langle f-g,h\rangle = 0$. За тази цел да разгледаме функцията

$$\psi(t) = \|(f+th)-g\|^2 = \langle f+th-g, f+th-g\rangle,$$

която преобразуваме във вида

$$\psi(t) = \langle f-g, f-g\rangle + 2t\langle f-g,h\rangle + t^2\langle h,h\rangle.$$

По условие $\psi(t) \ge \psi(0)$, за всяко $t \in \mathbb{R}$, откъдето намираме

(10.3) $\quad 2t\langle f-g,h\rangle + t^2\langle h,h\rangle = t(2\langle f-g,h\rangle + t\langle h,h\rangle) \ge 0,\ t \in \mathbb{R}.$

Да допуснем, че $\langle f-g,h\rangle \ne 0$. Тогава за всяко достатъчно малко по абсолютна стойност $t \ne 0$, множителят $2\langle f-g,h\rangle + t\langle h,h\rangle$ е различен от нула и има постоянен знак, равен на знака на $\langle f-g,h\rangle$. Последното показва, че произведението

$$t(2\langle f-g,h\rangle + t\langle h,h\rangle)$$

си сменя знака, когато t преминава през нулата, което противоречи на неравенството (10.3), следователно $\langle f-g,h\rangle = 0$. ■

Условието $\langle f-g,h\rangle = 0$ за всяко $h \in L$, всъщност е еквивалентно на условията $\langle f-g, f_k\rangle = 0$, за всяко $k = 1,2,\dots,n$, което определя следната система линейни уравнения за коефициентите λ_1, λ_2, ..., λ_n на елемента на най-добро приближение $f = \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \cdots + \lambda_n f_n$

$$(10.4)\quad \left| \begin{array}{l} \lambda_1\langle f_1, f_1\rangle + \lambda_2\langle f_2, f_1\rangle + \cdots + \lambda_n\langle f_n, f_1\rangle = \langle g, f_1\rangle \\ \lambda_1\langle f_1, f_2\rangle + \lambda_2\langle f_2, f_2\rangle + \cdots + \lambda_n\langle f_n, f_2\rangle = \langle g, f_2\rangle \\ \qquad\cdots \qquad\qquad \cdots \qquad\qquad \cdots \\ \lambda_1\langle f_1, f_n\rangle + \lambda_2\langle f_2, f_n\rangle + \cdots + \lambda_n\langle f_n, f_n\rangle = \langle g, f_n\rangle \end{array} \right.$$

Детерминантата на тази система

$$\Gamma(f_1, f_2, \ldots, f_n) = \begin{vmatrix} \langle f_1, f_1\rangle & \langle f_1, f_2\rangle & \cdots & \langle f_1, f_n\rangle \\ \langle f_2, f_1\rangle & \langle f_2, f_2\rangle & \cdots & \langle f_2, f_n\rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle f_n, f_1\rangle & \langle f_n, f_2\rangle & \cdots & \langle f_n, f_n\rangle \end{vmatrix}$$

се нарича ***детерминанта на Грам***.

Твърдение 10.2. Детерминантата на Грам $\Gamma(f_1, f_2, \ldots, f_n)$ е равна на нула тогава и само тогава, когато елементите които я пораждат са линейно зависими.

Доказателство. Нека $\Gamma(f_1, f_2, \ldots, f_n) = 0$. Тогава между редовете на детерминантата съществува линейна зависимост с коефициенти λ_1, λ_2, ..., λ_n, поне един от които е различен от нула. Като умножим първия ред с λ_1, втория ред с λ_2 и т.н. и съберем почленно, ще получим нулев ред, т.е.

$$\left\langle \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f_k, f_j \right\rangle = 0 \text{ ,за всяко } j = 1,2,\ldots,n .$$

След като умножим равенствата със съответното λ_j и отново съберем, намираме

$$\left\langle \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f_k, \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f_k \right\rangle = 0, \text{ т.е. } \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f_k = \mathbf{0},$$

което означава линейна зависимост за елементите f_1, f_2, ..., f_n.

Да предположим сега, че елементите f_1, f_2, ..., f_n са линейно зависими, което означава, че

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k f_k = \mathbf{0}$$

с коефициенти λ_1, λ_2, ..., λ_n, поне един от които е различен от нула. Като умножим отново първия ред с λ_1, втория ред с λ_2 и т.н. и съберем почленно на мястото на последния ред, ще получим детерминанта с нулев ред

$$\Gamma(f_1, f_2, \ldots, f_n) = \begin{vmatrix} \langle f_1, f_1\rangle & \langle f_1, f_2\rangle & \cdots & \langle f_1, f_n\rangle \\ \langle f_2, f_1\rangle & \langle f_2, f_2\rangle & \cdots & \langle f_2, f_n\rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \left\langle \sum_{k=1}^{n} f_k, f_1\right\rangle & \left\langle \sum_{k=1}^{n} f_k, f_2\right\rangle & \cdots & \left\langle \sum_{k=1}^{n} f_k, f_n\right\rangle \end{vmatrix} = 0 . \blacksquare$$

Твърдение 10.2 показва, че детерминантата на системата (10.4) е различна от нула, понеже елементите f_1, f_2, ..., f_n по условие са линейно независими, следователно системата (10.4) притежава единствено решение, което по необходимост се явява търсения елемент на най-добро приближение за g. От казаното дотук в частност следва верността на следната

Теорема 10.2 (***теорема за проекцията***). Елементът $f \in L = l(f_1, f_2, \dots, f_n)$ се явява елемент на най-добро приближение за $g \in H$ тогава и само тогава, когато разликата $f - g$ е ортогонална на всеки елемент от L, $\langle f - g, h \rangle = 0$ за всяко $h \in L$, следователно $f = \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \dots + \lambda_n f_n$ е елемент на най-добро приближение за g, точно когато коефициентите λ_1, λ_2, ..., λ_n са решение на линейната система (10.4). ■

Последната теорема решава по принцип въпроса за намиране елемента на най-добро приближение. Практиката обаче показва, че системата (10.4) се явява трудна за решаване от изчислителна гледна точка, понеже даже в най-прости случаи нейната детерминанта се получава число много близко до нула. Тази трудност се преодолява чрез използването на ***ортогонални или ортонормирани*** базиси в L.

Казва се, че векторите f_1, f_2, ..., f_n са ортогонални помежду си, когато техните взаимни скаларни произведения са нули, $\langle f_i, f_j \rangle = 0$ за $i \neq j$. По условие f_1, f_2, ..., f_n образуват базис в $L = l(f_1, f_2, \dots, f_n)$. Този базис се нарича ***ортогонален***, когато f_1, f_2, ..., f_n са ортогонални помежду си. Базисът f_1, f_2, ..., f_n се нарича ***ортонормиран***, когато е ортогонален и всичките вектори от базиса имат единична дължина, $\|f_k\| = 1$ за всяко $k = 1, 2, \dots, n$. Ако базисът f_1, f_2, ..., f_n е ортогонален, то системата (10.4) приема вида

$$(10.5)\quad \left|\begin{array}{l} \lambda_1 \langle f_1, f_1 \rangle = \langle g, f_1 \rangle \\ \lambda_2 \langle f_2, f_2 \rangle = \langle g, f_2 \rangle \\ \qquad\quad \dots \\ \lambda_n \langle f_n, f_n \rangle = \langle g, f_n \rangle \end{array}\right.$$

която се решава непосредствено. Ако пък базисът f_1, f_2, ..., f_n е ортонормиран, то последната система приема възможно най-простия вид

$$(10.6)\quad \left|\begin{array}{l} \lambda_1 = \langle g, f_1 \rangle \\ \lambda_2 = \langle g, f_2 \rangle \\ \qquad \dots \\ \lambda_n = \langle g, f_n \rangle \end{array}\right.$$

Вида на системите (10.5) и (10.6) показва убедително предимствата на използването на ортогонални и ортонормирани базиси. Ако разполагаме с даден ортогонален базис f_1, f_2, ..., f_n, то веднага можем да намерим ортонормиран базис g_1, g_2, ..., g_n, като нормираме векторите по формулата

$$g_k = \frac{f_k}{\|f_k\|}, \; k = 1, 2, \dots, n.$$

Намирането на ортогонален базис става посредством процеса на ортогонализация по Грам-Шмид.

Теорема 10.3 (*Грам-Шмид*). Нека H е пространство със скаларно произведение и елементите f_1, f_2, ..., f_n са линейно независими. Тогава могат да се намерят вектори g_1, g_2, ..., g_n, които удовлетворяват следните условия.

1) Векторите g_1, g_2, ..., g_n са ортогонални помежду си.

2) За всяко $k=1,2,\dots,n$ линейната обвивка на векторите f_1, f_2, ..., f_k съвпада с линейната обвивка на векторите g_1, g_2, ..., g_k.

Доказателство. Доказателството ще проведем по стъпки. Избираме $g_1 = f_1$, след което избираме $g_2 = f_2 + \lambda_{21} g_1$ според изискването $\langle g_2, g_1 \rangle = 0$. Последното означава, че $0 = \langle f_2, g_1 \rangle + \lambda_{21} \langle g_1, g_1 \rangle$, което позволява да определим търсения коефициент λ_{21}, понеже неговият множител $\langle g_1, g_1 \rangle \neq 0$. По нататък избираме $g_3 = f_3 + \lambda_{31} g_1 + \lambda_{32} g_2$ според изискването $\langle g_3, g_2 \rangle = \langle g_3, g_1 \rangle = 0$, което дава следните условия за търсените коефициенти

$$0 = \langle f_3, g_2 \rangle + \lambda_{32} \langle g_2, g_2 \rangle \text{ и } 0 = \langle f_3, g_1 \rangle + \lambda_{31} \langle g_1, g_1 \rangle .$$

Изобщо всеки следващ ортогонален елемент търсим по формулата

$$g_m = f_m + \lambda_{m1} g_1 + \lambda_{m2} g_2 + \dots + \lambda_{mm-1} g_{m-1}, \; m = 2,3,\dots,n,$$

според изискването $\langle g_m, g_1 \rangle = \langle g_m, g_2 \rangle = \dots = \langle g_m, g_{m-1} \rangle = 0$, при което търсените коефициенти λ_{m1}, λ_{m2}, ..., λ_{mm-1} могат да се определят еднозначно. Описаната процедура ни гарантира взаимната ортогоналност на новите елементи g_1, g_2, ..., g_n.

Разсъждавайки отново стъпка по стъпка можем да проследим и изпълнението на второто изискване за линейните обвивки. ■

2. Абстрактни редове на Фурие. Нека H е пространство със скаларно произведение и нека $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, ..., $\mathbf{e}_n$ е някаква ортонормирана система елементи, за които $\langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j \rangle = 0$ при $i \neq j$ и $\|\mathbf{e}_i\| = 1$, $i = 1,2,\dots,n$. Да изберем един елемент $f \in H$. Тогава елементът $\Phi_n(f)$ на най-добро приближение за f в линейното пространство $L_n(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n)$ има вида

$$\Phi_n(f) = \langle f, \mathbf{e}_1 \rangle \mathbf{e}_1 + \langle f, \mathbf{e}_2 \rangle \mathbf{e}_2 + \dots + \langle f, \mathbf{e}_n \rangle \mathbf{e}_n,$$

където числата $\langle f, \mathbf{e}_k \rangle$, $k = 1,2,\dots,n$, се наричат ***коефициенти на Фурие***. Съгласно теорема 10.2, $(f - \Phi_n(f)) \perp f$, следователно

$$\begin{aligned}
\|f\|^2 = \langle f, f \rangle &= \langle [f - \Phi_n(f)] + \Phi_n(f), [f - \Phi_n(f)] + \Phi_n(f) \rangle = \\
&= \langle f - \Phi_n(f), f - \Phi_n(f) \rangle + \langle f - \Phi_n(f), \Phi_n(f) \rangle + \langle \Phi_n(f), \Phi_n(f) \rangle = \\
&= \langle f - \Phi_n(f), f - \Phi_n(f) \rangle + \langle \Phi_n(f), \Phi_n(f) \rangle = \\
&= \|f - \Phi_n(f)\|^2 + \|\Phi_n(f)\|^2
\end{aligned}$$

По този начин доказахме верността на

Твърдение 10.3 (*Питагор*). За елемента на най-добро приближение $\Phi_n(f)$ е изпълнено равенството

$$\|f\|^2 = \|f - \Phi_n(f)\|^2 + \|\Phi_n(f)\|^2 . \; ■$$

От друга страна, от линейното свойство на скаларното произведение и от ортонормираността на разглежданата система намираме

$$\begin{aligned}
\|\Phi_n(f)\|^2 &= \langle \Phi_n(f), \Phi_n(f) \rangle = \\
&= \langle \langle f, \mathbf{e}_1 \rangle \mathbf{e}_1 + \langle f, \mathbf{e}_2 \rangle \mathbf{e}_2 + \dots + \langle f, \mathbf{e}_n \rangle \mathbf{e}_n, \langle f, \mathbf{e}_1 \rangle \mathbf{e}_1 + \langle f, \mathbf{e}_2 \rangle \mathbf{e}_2 + \dots + \langle f, \mathbf{e}_n \rangle \mathbf{e}_n \rangle = \\
&= \langle f, \mathbf{e}_1 \rangle^2 + \langle f, \mathbf{e}_2 \rangle^2 + \dots + \langle f, \mathbf{e}_n \rangle^2
\end{aligned}$$

откъдето с помощта на твърдение 10.3 получаваме

(10.7) $\sum_{k=1}^{n}\langle f,\mathbf{e}_k\rangle^2+\|f-\Phi_n(f)\|^2=\|f\|^2$,

следователно

(10.8) $\sum_{k=1}^{n}\langle f,\mathbf{e}_k\rangle^2\le\|f\|^2$.

Сборът от квадратите на коефициентите на Фурие не надвишава квадрата на нормата на разглежданата функция,

Да предположим, че разполагаме с ***безкрайна*** система ортонормирани елементи, $\mathbf{e}_k$, $k=1,2,3,\dots$. Съотношенията (10.7) и (10.8) са изпълнени при всяко n, следователно е вярна

Теорема 10.4 (*неравенство на Бесел*). Нека $\mathbf{e}_k$, $k=1,2,3,\dots$, е безкрайна ортонормирана система в пространството със скаларно произведение H. Тогава за коефициентите на Фурие е в сила неравенството

(10.9) $\sum_{k=1}^{\infty}\langle f,\mathbf{e}_k\rangle^2\le\|f\|^2$. ■

Особено важен е случаят, когато в (10.9) се достига равенство, при всеки елемент $f\in H$. Представянето (10.7) показва, че въпросното равенство се достига тогава и само тогава, когато

$$\lim_{n\to\infty}\|f-\Phi_n(f)\|^2=0,\ f\in H.$$

Последното ни дава основание да разгледаме ***абстрактния ред***

(10.10) $\Phi(f)=\sum_{n=1}^{\infty}\langle f,\mathbf{e}_n\rangle\mathbf{e}_n=\langle f,\mathbf{e}_1\rangle\mathbf{e}_1+\langle f,\mathbf{e}_2\rangle\mathbf{e}_2+\dots+\langle f,\mathbf{e}_n\rangle\mathbf{e}_n+\dots$,

породен от елемента $f\in H$. Частичните суми на реда в дясната страна на (10.10) са точно $\Phi_n(f)$. При определени условия тези частични суми притежават граница.

Нека $\{f_n\}$ е редица елементи от пространството със скаларно произведение H. Редицата $\{f_n\}$ е ***сходяща*** и клони към границата f, когато е сходяща числовата редица $\{\|f_n-f\|\}$, т.е. когато за всяко $\varepsilon>0$ може да се намери n_0 такова, че $\|f_n-f\|<\varepsilon$ при $n>n_0$. Редицата $\{f_n\}$ се нарича ***фундаментална***, когато за всяко $\varepsilon>0$ съществува n_0 такова, че $\|f_{n+p}-f_n\|<\varepsilon$ при всяко $n>n_0$ и всяко естествено p.

Както при числовите редици се установява, че всяка сходяща редица е фундаментална. Не всяко пространство със скаларно произведение обаче притежава обратното свойство, че всяка фундаментална редица е сходяща. Ако пространството със скаларно произведение H е такова, че всяка фундаментална редица е сходяща, т.е. за всяка фундаментална редица $\{f_n\}$ да съществува елемент $f\in H$, който се явява граница на тази редица, то H се нарича ***хилбертово пространство***.

Например описаното по-горе пространство $C[a,b]$ на непрекъснатите в интервала $[a,b]$ функции със скаларно произведение

(10.11) $\langle f,g\rangle=\int_a^b f(x)g(x)dx$

не представлява хилбертово пространство. Породена от скаларното произведение (10.11) норма има вида

$$\|f\| = \sqrt{\langle f, f\rangle} = \sqrt{\int\limits_a^b f^2(x)dx} .$$

От друга страна пространството $C[a,b]$ може да се допълни със специален клас интегруеми (***в смисъл на Лебег***) функции така, че новото допълнено пространство вече да бъде хилбертово. Това пространство се бележи с $L^2[a,b]$. Пространството $L^2[a,b]$ съдържа всичките непрекъснати над интервала $[a,b]$ функции, всичките функции, интегруеми по Риман в интервала $[a,b]$ както и всичките функции, чиито квадрат е интегруем в собствен или несобствен смисъл в $[a,b]$. Това пространство обаче съдържа и други по-сложно устроени функции, чиято характеризация излиза далече извън рамките на настоящото изложение. По-нататък когато избираме някаква функция от $L^2[a,b]$ ще имаме пред вид най-вече частния случай на функция, която е интегруема в смисъл на Риман, понеже това е достатъчно за широк кръг приложения.

Твърдение 10.4. Нека H е хилбертово пространство и $\mathbf{e}_k$, $k = 1,2,3,\ldots$, е безкрайна ортонормирана система. Тогава абстрактният ред (10.10) е сходящ.

Доказателство. Сходимостта на въпросният ред означава, че редицата от частичните суми

$$\Phi_n(f) = \sum_{k=1}^{n} \langle f, \mathbf{e}_k\rangle \mathbf{e}_k$$

е сходяща. Понеже H е хилбертово, твърдението ще бъде доказано ако успеем да покажем, че тази редица е фундаментална. От друга страна лесно се проверява, че

$$\left\|\Phi_{n+p}(f) - \Phi_n(f)\right\| = \langle f, \mathbf{e}_{n+1}\rangle^2 + \langle f, \mathbf{e}_{n+2}\rangle^2 + \cdots + \langle f, \mathbf{e}_{n+p}\rangle^2 .$$

Сега фундаменталността на редицата $\{\Phi_n(f)\}$ следва от факта, че (съгласно неравенството на Бесел) числовият ред

$$\sum_{k=1}^{\infty} \langle f, \mathbf{e}_k\rangle^2$$

е сходящ. ■

Според последното твърдение редът (10.10) винаги определя някакъв елемент $\Phi(f)$ от хилбертовото пространство H.

Определение 10.1. Нека H е хилбертово пространство и $\mathbf{e}_k$, $k = 1,2,3,\ldots$, е безкрайна ортонормирана система. Казва се, че елементите $\{\mathbf{e}_k\}$ образуват ***базис*** в H, когато за всеки елемент $f \in H$ е изпълнено $\Phi(f) = f$. В този случай изразът в дясната страна на (10.10) се нарича ***абстрактен ред на Фурие*** за елемента f, а самият елемент f се представя чрез своя ред на Фурие

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, \mathbf{e}_n\rangle \mathbf{e}_n = \langle f, \mathbf{e}_1\rangle \mathbf{e}_1 + \langle f, \mathbf{e}_2\rangle \mathbf{e}_2 + \cdots + \langle f, \mathbf{e}_n\rangle \mathbf{e}_n + \cdots . \text{ ■}$$

Описаното по-горе пространство $L^2[a,b]$ притежава ортонормирани базиси, за които ще стане дума по нататък. (В общия случай не всяко хилбертово пространство притежава ортонормиран базис в смисъла на определение 10.1.)

Теорема 10.5 (*равенство на Парсевал*). Нека $\{\mathbf{e}_k\}$ е ортонормиран базис в хилбертовото пространство H. Тогава за всяко $f \in H$ е изпълнено равенството

$$(10.12) \quad \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, \mathbf{e}_k\rangle^2 = \|f\|^2 . \text{ ■}$$

Доказателство. Доказателството следва веднага от представянето (10.7) след граничен преход при $n \to \infty$. ■

Редът на Фурие определя по ***единствен*** начин функцията, която го поражда. Ако f и g имат един и същ ред на Фурие, то $\|f-g\|=0$, следователно f и g съвпадат като елементи на H.

3. Тригонометрични редове на Фурие. Да разгледаме хилбертовото пространство $L^2[-\pi,\pi]$ със скаларно произведение

$$\langle f,g\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx .$$

Непосредствено се проверява, че функциите

$$c_0(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\ c_k(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos kx,\ s_k(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin kx,\ k=1,2,\ldots,$$

образуват ортонормирана система. От ортогоналност лесно се извежда и тяхната линейна независимост. Може да се докаже, че тези функции ***образуват ортонормиран базис*** в $L^2[-\pi,\pi]$. Да означим с L_n линейната обвивка на $c_0(x)$, $c_k(x)$ и $s_k(x)$, $k=1,2,\ldots,n$. Пространството L_n се състои от всичките тригонометрични полиноми от ред n,

$$L_n=\left\{T_n(x)|T_n(x)=a_0c_0(x)+\sum_{k=1}^{n}\left[a_nc_n(x)+b_ns_n(x)\right]\right\}.$$

Тук пространството L_n има размерност $2n+1$, колкото е броят на образуващите го базисни функции. Тази особена индексация е продиктувана главно от съображения за удобство при работа с тригонометричните функции. Нека $f(x)$ е 2π-периодична функция, която предполагаме интегруема (или с интегруем квадрат) в интервала $[-\pi,\pi]$. Разсъждавайки както в предишния раздел получаваме, че елементът на най-добро приближение за функцията $f(x)$ над пространството L_n има вида

$$(10.13)\ \tau_n(x)=a_0c_0(x)+\sum_{k=1}^{n}\left[a_nc_n(x)+b_ns_n(x)\right],$$

където за коефициентите на Фурие са в сила формулите

$$a_0=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt,\ a_k=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos ktdt,\ b_k=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin ktdt,\ k=1,2,\ldots,n.$$

Замествайки във формулата (10.13), за $\tau_n(x)$ намираме следното представяне

$$(10.14)\ \tau_n(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt+\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\left[\left(\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos ktdt\right)\cos kx+\left(\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin ktdt\right)\sin kx\right].$$

При $n\to\infty$ получаваме представянето на функцията $f(x)$ в ***тригонометричен ред на Фурие***

$$(10.15)\ f(x)\sim\tau(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos ntdt\right)\cos nx+\left(\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin ntdt\right)\sin nx .$$

Представянето посредством формулата (10.15) означава преди всичко, че $f(x)$ и $\tau(x)$ са равни в смисъла на нормата, породена от скаларното произведение, т.е.

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left[f(x)-\tau(x)\right]^2dx=0,$$

което обаче в общия случай не означава, че функциите $f(x)$ и $\tau(x)$ са равни навсякъде. В този случай се казва, че ***средно-квадратичното разстояние между $f(x)$ и $\tau(x)$ е равно на нула***. Функцията $\tau_n(x)$ се явява елемент на най-добро приближение за $f(x)$ над пространството L_n, следователно за всеки тригонометричен полином $T_n(x)$ от ред n е изпълнено

$$\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)-\tau_n(x)]^2\,dx \le \int_{-\pi}^{\pi}[f(x)-T_n(x)]^2\,dx .$$

Равенството на Парсевал в този случай има вида

$$\frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt\right)^2+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos ntdt\right)^2+\left(\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin ntdt\right)^2\right]=\int_{-\pi}^{\pi} f^2(t)dt .$$

Равенството между дадена 2π-периодична функция $f(x)$ и нейния ред на Фурие като елементи на пространството $L^2[-\pi,\pi]$, т.е. фактът, че средно-квадратичното разстояние между тях е равно на нула, се оказва напълно достатъчен в различните приложения (при определени условия, свързани с естеството на математическия модел), функцията $f(x)$ да бъде замествана с нейния ред на Фурие. В практически план даже е достатъчно $f(x)$ да се представи приблизително чрез някоя частична сума $\tau_n(x)$ на реда на Фурие при подходящо голямо за конкретната цел n. По-нататък ще се занимаем специално с въпроса за сходимостта на реда на Фурие в отделни точки. Този въпрос се оказва значително по-труден отколкото описаната в тази лекция L^2-теория на редовете на Фурие. От друга страна L^2-теорията има висока степен на абстрактност и развитите в нея общи резултати се прилагат по същия начин в други ситуации, в които базисните функции вече не са тригонометрични.

Редът на Фурие определя по ***единствен*** начин функцията, която го поражда. Ако $f(x)$ и $g(x)$ имат един и същ ред на Фурие, то $\|f-g\|=0$, следователно $f(x)$ и $g(x)$ съвпадат като елементи на $L^2[-\pi,\pi]$, което всъщност означава, че средноквадратичното разстояние между тях е равно на нула,

$$\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)-g(x)]^2\,dx=0 .$$

В частност, ако $f(x)$ и $g(x)$ са непрекъснати, то $f(x)\equiv g(x)$.

От ***исторически съображения*** редът на Фурие за функцията $f(x)$ се записва във вида

(10.16) $$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx),$$

където коефициентите се пресмятат по еднотипните формули

(10.17) $$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx,\ n=0,1,2,\dots,$$

(10.18) $$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nxdx,\ n=1,2,\dots .$$

Например да намерим реда на Фурие на 2π-периодичната функцията $f(x)$, за която $f(x)=x$ при $-\pi\le x<\pi$. По формулите (10.17) и (10.18) пресмятаме

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\cos nx dx = 0,\ n = 0,1,2,\dots,\ b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\sin nx dx = \frac{2}{n}(-1)^{n+1},\ n = 1,2,\dots,$$

следователно редът на Фурие има вида

(10.19) $f(x) \sim \tau(x) = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx$,

което може да се запише

$$\frac{x}{2} \sim \sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \frac{\sin 4x}{4} + \frac{\sin 5x}{5} - \cdots,\ x \in (-\pi, \pi).$$

Графиката функцията $f(x)$ и на частичната сума на реда на Фурие за $n = 3$ е показана на рис. 10.1.

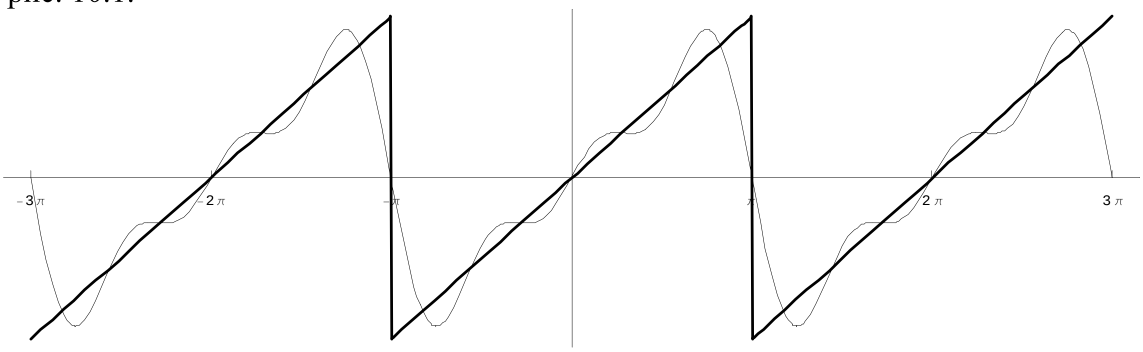

Рис. 10.1.

При $n = 7$ получаваме следната графика (рис. 10.2)

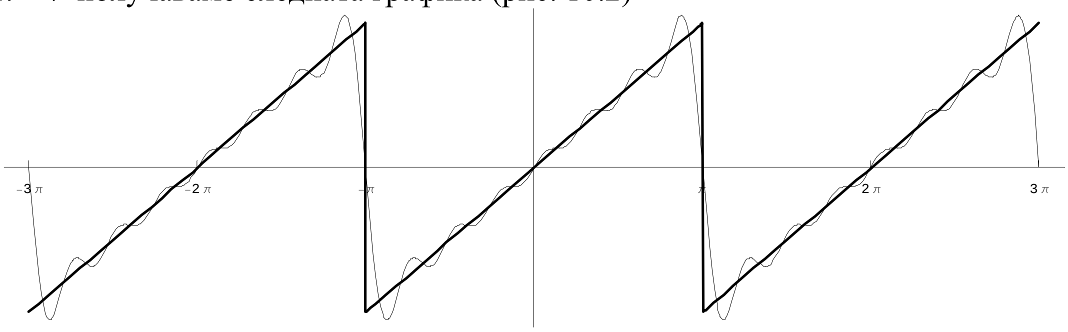

Рис. 10.2.

При $n = 21$ получаваме следната графика (рис. 10.3)

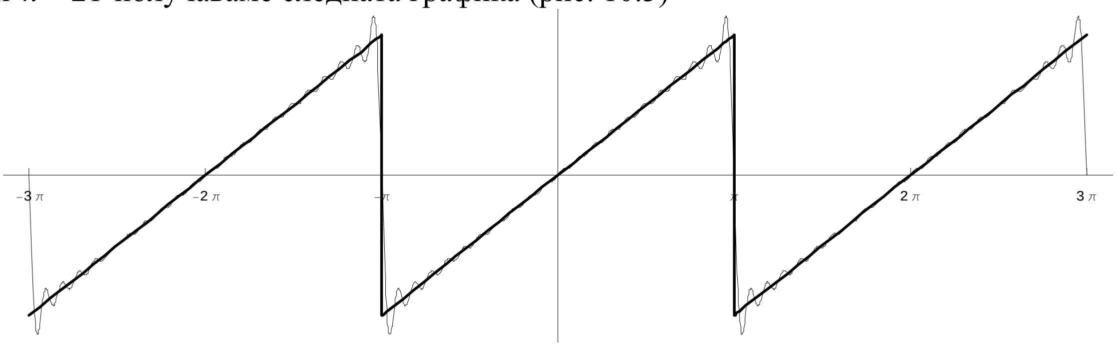

Рис. 10.3.

Този пример илюстрира начина, по който в типичния случай редът на Фурие клони към функцията, която го поражда. При $x = k\pi$, $k = 0,\pm1,\pm2,\dots$, имаме $\tau(x) = 0$, следователно в тези точни редът не се схожда към стойностите на $f(x)$.

Да разгледаме сега 2π-периодичната функцията $f(x)$, за която $f(x) = x^2$ при $-\pi \le x < \pi$. По формулите (10.17) и (10.18) пресмятаме

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos nx dx = \frac{4}{n^2}(-1)^n,\ n = 1,2,\ldots,\ a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{1}{\pi}\frac{x^3}{3}\Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{2}{3}\pi^2$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \sin nx dx = 0,\ n = 1,2,\ldots,$$

следователно редът на Фурие има вида

(10.20) $$f(x) \sim \tau(x) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx,$$

което може да се запише

(10.21) $$\frac{x^2}{4} \sim \frac{\pi^2}{12} - \cos x + \frac{\cos 2x}{4} - \frac{\cos 3x}{9} + \frac{\cos 4x}{16} - \frac{\cos 5x}{25} + \cdots,\ x \in [-\pi, \pi].$$

Графиката функцията $f(x)$ и на частичната сума на реда на Фурие за $n = 3$ е показана на рис. 10.4.

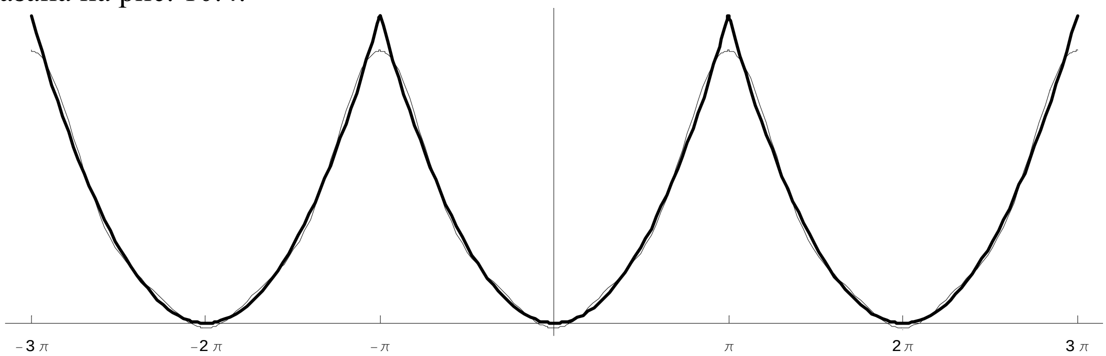

Рис. 10.4.

При $n = 7$ получаваме следната графика (рис. 10.5)

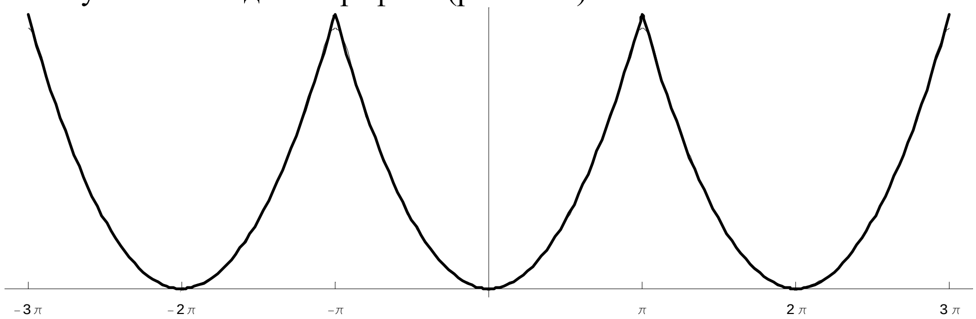

Рис. 10.5.

В този случай (още за $n = 7$) графиките на функцията $f(x)$ и частичната сума $\tau_7(x)$ почти не се различават. Тук всъщност редът на Фурие клони равномерно към функцията $f(x)$.

Ако в (10.21) заместим $x = \pi$, ще получим известното равенство

$$\frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \cdots.$$

4. Комплексни пространства със скаларно произведение. Дотук разглеждахме основно линейни пространства, за които скаларите са реални числа. Когато полето на скаларите представлява полето на комплексните числа $\mathbb{C}$, то линейното пространство се нарича комплексно. В много случаи работата с комплексни числа улеснява изграждането на обща теория. Скаларното произведение $\langle f,g \rangle$ в комплексно линейно пространство има някои особености. Смяната местата на двата скаларни множителя води до комплексно спрягане на произведението, $\langle f, g\rangle = \overline{\langle g, f\rangle}$.

Например в комплексното линейно пространство $\mathbb{C}^n$ на векторите $z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$ с комплексни елементи, каноничното скаларно произведение се въвежда чрез формулата

$$\langle z, w\rangle = z_1\overline{w_1} + z_2\overline{w_2} + \cdots + z_n\overline{w_n} .$$

В пространството $C([a,b];\mathbb{C})$ на непрекъснатите комплексни функции, определени в интервала $[a,b]$,

$$f(x) = u(x) + iv(x),$$

където $u(x)$ и $v(x)$ са непрекъснати реални функции, които представляват съответно реалната и имагинерната част на $f(x)$, каноничното скаларно произведение се дава от

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b f(x)\overline{g(x)}dx .$$

Комплексно линейно пространство със скаларно произведение, което е пълно относно нормата, породена от скаларното произведение се нарича ***ермитово пространство***. Например $\mathbb{C}^n$ е ермитово, докато $C([a,b];\mathbb{C})$ не е ермитово. Пространството $L^2([a,b];\mathbb{C})$ на комплексните функции със сумируем квадрат в интервала $[a,b]$ представлява вече ермитово пространство, но както вече отбелязахме за елементите на $L^2[-\pi,\pi]$, изчерпателното описание на елементите на $L^2([a,b];\mathbb{C})$ изисква по-сложна теория на определения интеграл.