

## Лекция 11

### §11. Редове на Фурие – поточкова сходимост

**1. Теорема на Дирихле.** Тук ще разглеждаме  $2\pi$ -периодична функция  $f(x)$ , която ще искаме да бъде *гладка по части*. Това означава, че интервала  $(-\pi, \pi)$  може да се раздели на отделни части с помощта на точките  $-\pi = a_0 < a_1 < a_2 < \dots < a_n = \pi$  така, че във всеки интервал  $(a_{k-1}, a_k)$ ,  $k=1,2,\dots,n$ , функцията  $f(x)$  е непрекъсната и има непрекъсната производна, като в краищата на интервала  $(a_{k-1}, a_k)$ ,  $k=1,2,\dots,n$ , се предполага наличието на двете едностранни граници

$$\lim_{x \rightarrow a_{k-1}+0} = f(a_{k-1}+0), \quad \lim_{x \rightarrow a_k-0} = f(a_k-0)$$

и освен това наличието на двете едностранни производни

$$f'_+(a_{k-1}) = \lim_{t \rightarrow +0} \frac{f(a_{k-1}+t) - f(a_{k-1}+0)}{t}, \quad f'_-(a_k) = \lim_{t \rightarrow -0} \frac{f(a_k+t) - f(a_k-0)}{t}.$$

От направеното предположение в частност се получава, че във всеки ограничен интервал функцията  $f(x)$  е или непрекъсната или има евентуално само *краен брой прекъсвания от първи род* и следователно във всяка точка  $x_0 \in \mathbb{R}$  съществуват двете едностранни граници  $\lim_{x \rightarrow x_0+0} = f(x_0+0)$  и  $\lim_{x \rightarrow x_0-0} = f(x_0-0)$ . Освен това във всяка точка  $x_0 \in \mathbb{R}$  съществуват и двете едностранни производни

$$f'_+(x_0) = \lim_{t \rightarrow +0} \frac{f(x_0+t) - f(x_0+0)}{t}, \quad f'_-(x_0) = \lim_{t \rightarrow -0} \frac{f(x_0+t) - f(x_0-0)}{t}.$$

Определеният по този начин клас функции покрива нуждите на елементарните приложения на редовете на Фурие.

Такива функции се конструират например по следната схема.

1) Определяне на гладка по части функция  $f(x)$  в някой *основен интервал* с дължина  $2\pi$  от вида  $[a, a+2\pi]$  или  $(a, a+2\pi]$ .

2)  $2\pi$ -периодично продължение на функцията над останалата част от числовата ос.

Основният интервал се избира обикновено  $[-\pi, \pi)$  или  $[0, 2\pi)$ .

Сходимостта на фуриеровия ред в дадена точка  $x_0$  предявява определени изисквания към поведението на  $f(x)$  в тази точка. По нататък ще използваме по много съществен начин резултата от следното твърдение.

**Твърдение 11.1.** Нека функцията  $f(x)$  е  $2\pi$ -периодична и гладка по части. Тогава за всяко  $x_0 \in \mathbb{R}$ , функцията

$$\varphi(t) = \frac{f(x_0+t) + f(x_0-t) - f(x_0+0) - f(x_0-0)}{t}$$

притежава дясна граница в нулата, т.е. съществува границата на  $\varphi(t)$  при  $t \rightarrow 0$  със стойности  $t > 0$ .

*Доказателство.* Съгласно формулата на Тейлър имаме ( $t > 0$ )

$$f(x_0+t) = f(x_0+0) + tf'_+(x_0) + to(t), \quad f(x_0-t) = f(x_0-0) - tf'_-(x_0) + to(t),$$

$$\begin{aligned} \frac{f(x_0+t) + f(x_0-t) - f(x_0+0) - f(x_0-0)}{t} &= \\ &= \frac{f(x_0+0) + tf'_+(x_0) + f(x_0-0) - tf'_-(x_0) + to(t) - f(x_0+0) - f(x_0-0)}{t} = \\ &= [f'_+(x_0) - f'_-(x_0)] + o(t) \end{aligned}$$

от което следва, че във всяка точка  $x_0 \in \mathbb{R}$  е изпълнено

$$\lim_{t \rightarrow x_0} \varphi(t) = f'_+(x_0) - f'_-(x_0). \blacksquare$$

За да изследваме сходимостта на реда на Фурие в отделни точки, преди всичко трябва да познаваме в детайли структурата на неговите частични суми

$$\tau_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^n \left[ \left( \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos ktdt \right) \cos kx + \left( \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin ktdt \right) \sin kx \right].$$

Въз основа на линейното свойство на интеграла, последното се преобразува във вида

$$\tau_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[ \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos k(t-x) \right] f(t) dt,$$

понеже  $\cos kt \cos kx + \sin kt \sin kx = \cos k(t-x)$ . По индукция може да се докаже верността на твърдението

$$D_n(u) = \frac{1}{2} + \cos u + \cos 2u + \dots + \cos nu = \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)u}{2 \sin \frac{u}{2}}, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

следователно за частичните суми намираме представянето

$$(11.1) \quad \tau_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_n(x-t) f(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)(t-x)}{2 \sin \frac{(t-x)}{2}} f(t) dt.$$

Тук  $D_n(u)$  се нарича **ядро на Дирихле**. След смяна на променливата  $t-x = \theta$ , (11.1) приема вида

$$(11.2) \quad \tau_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi+x}^{\pi+x} \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)\theta}{2 \sin \frac{\theta}{2}} f(x+\theta) d\theta.$$

**Твърдение 11.2.** Нека  $g(t)$  е  $\omega$ -периодична интегрируема функция. Тогава за всяко число  $a$  е изпълнено равенството

$$\int_a^{a+\omega} g(t) dt = \int_0^{\omega} g(t) dt.$$

*Доказателство.* От адитивното свойство на интеграла имаме

$$(11.3) \quad \int_a^{a+\omega} g(t) dt = \int_a^{\omega} g(t) dt + \int_{\omega}^{a+\omega} g(t) dt.$$

Сега във втория интеграл от дясната страна извършваме смяна на променливата  $t - \omega = \theta$ , след което за този интеграл получаваме

$$\int_{\omega}^{a+\omega} g(t) dt = \int_0^a g(\theta + \omega) d\theta,$$

откъдето отчитайки  $\omega$ -периодичността на  $g(t)$ ,  $g(\theta + \omega) = g(\theta)$ , намираме

$$\int_{\omega}^{a+\omega} g(t) dt = \int_0^a g(\theta + \omega) d\theta = \int_0^a g(\theta) d\theta = \int_0^a g(t) dt.$$

Сега отново от адитивността на интеграла следва верността на (11.3)

$$\int_a^{a+\theta} g(t)dt = \int_a^a g(t)dt + \int_a^a g(t)dt = \int_0^0 g(t)dt . \blacksquare$$

Подинтегралната функция в (11.2)

$$\frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)\theta}{2 \sin \frac{\theta}{2}} f(x + \theta)$$

е  $2\pi$ -периодична по  $\theta$ , откъдето въз основа на твърдение 11.2, за частичните суми получаваме формулата

$$\tau_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t}{2 \sin \frac{t}{2}} f(x+t) dt .$$

Последният интеграл записваме като сбор

$$\tau_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t}{2 \sin \frac{t}{2}} f(x+t) dt + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t}{2 \sin \frac{t}{2}} f(x+t) dt .$$

В първия интеграл от дясната страна сменяме променливата  $t \rightarrow -t$ , след което отчитайки нечетността на функцията синус, получаваме

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t}{2 \sin \frac{t}{2}} f(x+t) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t}{2 \sin \frac{t}{2}} f(x-t) dt ,$$

следователно частичните суми могат да се запишат във вида

$$(11.4) \quad \tau_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t}{2 \sin \frac{t}{2}} [f(x+t) + f(x-t)] dt .$$

По нататък се нуждаем от

**Теорема 11.1 (Риман-Лебег).** Нека  $g(t)$  е интегрируема в интервала  $[a, b]$ . Тогава

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_a^b g(x) \cos \lambda x dx = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_a^b g(x) \sin \lambda x dx = 0 .$$

*Доказателство.* Нека  $\varepsilon > 0$ . По условие  $g(x)$  е интегрируема, следователно може да се намери някакво интегрално разделяне  $\{a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b\}$  на интервала  $[a, b]$ , за което разликата между горната и долната сума на Дарбу не надвишава  $\frac{\varepsilon}{2}$ , т.е.

$$\sum_{k=1}^n (M_k - m_k) \Delta x_k < \frac{\varepsilon}{2} ,$$

където

$$M_k = \sup_{x_{k-1} \leq x \leq x_k} g(x), \quad m_k = \inf_{x_{k-1} \leq x \leq x_k} g(x), \quad \Delta x_k = x_k - x_{k-1}, \quad k = 1, 2, \dots, n .$$

Ще докажем само съотношението

$$(11.5) \quad \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_a^b g(x) \sin \lambda x dx = 0,$$

понеже другото се доказва по същия начин. От основните свойства на интеграла намираме последователно

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(x) \cos \lambda x dx \right| &= \left| \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x) \cos \lambda x dx \right| = \left| \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} [f(x) - m_k] \sin \lambda x dx + \sum_{k=1}^n m_k \int_{x_{k-1}}^{x_k} \sin \lambda x dx \right|, \\ \left| \int_a^b f(x) \cos \lambda x dx \right| &= \left| \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} [f(x) - m_k] \sin \lambda x dx + \sum_{k=1}^n \frac{m_k}{\lambda} [\cos \lambda x_{k-1} - \cos \lambda x_k] \right|, \\ \left| \int_a^b f(x) \cos \lambda x dx \right| &\leq \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} |f(x) - m_k| |\sin \lambda x| dx + \sum_{k=1}^n \frac{m_k}{\lambda} |\cos \lambda x_{k-1} - \cos \lambda x_k|, \\ \left| \int_a^b f(x) \cos \lambda x dx \right| &\leq \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} (M_k - m_k) dx + \sum_{k=1}^n \frac{2m_k}{\lambda} = \sum_{k=1}^n (M_k - m_k) \Delta x_k + \sum_{k=1}^n \frac{2m_k}{\lambda}, \\ \left| \int_a^b f(x) \cos \lambda x dx \right| &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{2nC}{\lambda}, \quad C = \sup_{a \leq x \leq b} |f(x)|. \end{aligned}$$

Избираме едно  $\lambda_0$  достатъчно голямо, че  $\frac{2nC}{\lambda} < \frac{\varepsilon}{2}$ . Тогава при всяко  $\lambda > \lambda_0$  е в сила

$$\left| \int_a^b f(x) \cos \lambda x dx \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{2nC}{\lambda_0} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

което по определение означава верността на съотношението (11.5). ■

С елементарни модификации на горното доказателство може да се установи, че **теоремата на Риман-Лебег е валидна и в случая, когато интегралът е несобствен в безкрайни граници и абсолютно сходящ.**

Подинтегралната функция в (11.4) има особеност в нулата, понеже знаменателят клони към нула, когато  $t \rightarrow 0$ . С цел да изолираме тази особеност да изберем едно  $\delta > 0$  ( $\delta < \pi$ ) и да запишем интеграла като сбор

$$\tau_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\delta} \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t}{2 \sin \frac{t}{2}} [f(x+t) + f(x-t)] dt + \frac{1}{\pi} \int_{\delta}^{\pi} \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t}{2 \sin \frac{t}{2}} [f(x+t) + f(x-t)] dt.$$

Вторият интеграл в горната сума може да се запише във вида

$$(11.6) \quad \frac{1}{\pi} \int_{\delta}^{\pi} \left[ \frac{f(x+t) + f(x-t)}{2 \sin \frac{t}{2}} \right] \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t dt.$$

Първият множител тук представлява непрекъснатата функция на променливата  $t$  в интервала  $[\delta, \pi]$ , а поради наличието на втория множител  $\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t$ , от теорема 11.1 следва, че интегралът (11.6) клони към нула за  $n \rightarrow \infty$ . Оказа се, че границата на частичните суми  $\tau_n(x)$  при  $n \rightarrow \infty$ , ако съществува, е същата като границата

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_0^{\delta} \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t}{2 \sin \frac{t}{2}} [f(x+t) + f(x-t)] dt.$$

Този интеграл в граници от 0 до  $\delta$  съдържа множителя  $[f(x+t) + f(x-t)]$ , който отчита поведението на функцията  $f(x)$  само в околността  $[x-\delta, x+\delta]$ , при което  $\delta > 0$  може да бъде фиксирано произволно малко. По този начин докажахме

**Теорема 11.2 (принцип за локализацията).** Сходимостта на реда на Фурие в дадена точка  $x$  зависи само от поведението на функцията в околност на тази точка. ■

В следващото твърдение се предполага, че разглежданата функция е регулярна, което практически означава, че е налице условието от твърдение 11.1.

**Твърдение 11.3.** Нека функцията  $f(x)$  е  $2\pi$ -периодична и гладка по части. Тогава за всяко  $x_0 \in \mathbf{R}$  и всяко  $\delta > 0$  ( $\delta \leq \pi$ ) интегралът

$$(11.7) \quad \frac{1}{\pi} \int_0^{\delta} \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t}{2 \sin \frac{t}{2}} [f(x_0+t) + f(x_0-t) - f(x_0+0) - f(x_0-0)] dt$$

клони към нула при  $n \rightarrow \infty$ .

*Доказателство.* Интегралът (11.7) записваме във вида

$$(11.8) \quad \frac{1}{\pi} \int_0^{\delta} \left[ \frac{f(x_0+t) + f(x_0-t) - f(x_0+0) - f(x_0-0)}{t} \right] \left[ \frac{t}{2 \sin \frac{t}{2}} \right] \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t dt.$$

Тук първият множител

$$\frac{f(x_0+t) + f(x_0-t) - f(x_0+0) - f(x_0-0)}{t},$$

съгласно твърдение 11.1, представлява *интегруема* функция в интервала  $[0, \delta]$ . Същото важи и за втория множител, понеже

$$\lim_{t \rightarrow 0} \left[ \frac{t}{2 \sin \frac{t}{2}} \right] = 1.$$

По този начин функцията

$$\left[ \frac{f(x_0+t) + f(x_0-t) - f(x_0+0) - f(x_0-0)}{t} \right] \left[ \frac{t}{2 \sin \frac{t}{2}} \right]$$

се оказва интегруема в интервала  $[0, \delta]$ . Сега верността на твърдението се получава след прилагане на теорема 11.1. ■

Ако в израза (11.4) положим  $f(x) \equiv 1$ , ще получим равенството

$$1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t}{2 \sin \frac{t}{2}} 2 dt,$$

което след умножаване с  $\frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}$  приема вида

$$\frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2} = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}} [f(x_0+0)+f(x_0-0)] dt,$$

следователно е в сила равенството

$$(11.9) \quad \tau_n(x_0) - \frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2} = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}} [f(x_0+t)+f(x_0-t)-f(x_0+0)-f(x_0-0)] dt.$$

Сега сме готови да докажем следната основна теорема за поточкова сходимост на редовете на Фурие.

**Теорема 11.3 (Дирихле).** Нека функцията  $f(x)$  е  $2\pi$ -периодична и гладка по части. Тогава за всяко  $x_0 \in \mathbb{R}$  е изпълнено

$$\tau(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \tau_n(x_0) = \frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2},$$

т.е. стойността на реда на Фурие в точката  $x_0$  е равна на полусбора от лявата и дясната граници на функцията в тази точка.

*Доказателство.* Доказателството на тази теорема следва веднага от представянето (11.9) и твърдение 11.3. ■

В частност ако  $f(x)$  е непрекъсната в точката  $x_0$ , то е изпълнено  $\tau(x_0) = f(x_0)$ .

Да разгледаме отново примера (10.19) за  $2\pi$ -периодичната функцията  $f(x)$ , зададена като  $f(x) = x$  при  $-\pi \leq x < \pi$ , за която пресметнахме

$$\tau(x) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nx.$$

Тук функцията  $f(x)$  е гладка по части, при което има прекъсване от първи род само в точките  $x = (2k+1)\pi$ ,  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ , за които  $f((2k+1)\pi+0) + f((2k+1)\pi-0) = 0$ . В този случай съгласно теоремата на Дирихле имаме  $\tau(x) = x$  при  $-\pi < x < \pi$  и  $\tau(\pi) = \tau(-\pi) = 0$ . Останалите стойности на  $\tau(x)$  се повтарят периодично с период  $2\pi$ .

За примера (10.20) с  $2\pi$ -периодичната функцията  $f(x)$ , зададена като  $f(x) = x^2$  при  $-\pi \leq x < \pi$ , намерихме следния ред на Фурие

$$\tau(x) = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos nx.$$

Тук функцията  $f(x)$  е гладка по части и навсякъде непрекъсната. В този случай съгласно теоремата на Дирихле имаме  $\tau(x) = x^2$  при  $-\pi \leq x < \pi$ . Останалите стойности на  $\tau(x)$  се повтарят периодично с период  $2\pi$ .

Да разгледаме още следния пример. Нека  $f(x)$  е  $2\pi$ -периодичната функция, определена като  $f(x) = -1$  при  $-\pi \leq x < 0$  и  $f(x) = 1$  при  $0 \leq x < \pi$ . Следвайки формулите за коефициентите, пресмятаме

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin nx dx = \frac{2}{n\pi} (1 - \cos n\pi), \quad n = 1, 2, \dots,$$

следователно

$$b_{2n} = 0 \text{ и } b_{2n+1} = \frac{4}{\pi(2n+1)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

За реда на Фурие намираме

$$f(x) \sim \tau(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)x}{2n+1}.$$

Функцията  $f(x)$  е гладка по части, при което има прекъсване от първи род само в точките  $x = k\pi$ ,  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ , за които  $f(k\pi+0) + f(k\pi-0) = 0$ . На следващата рисунка е дадена графиката на  $f(x)$  заедно с графиката на частичните суми при  $n = 21$ .

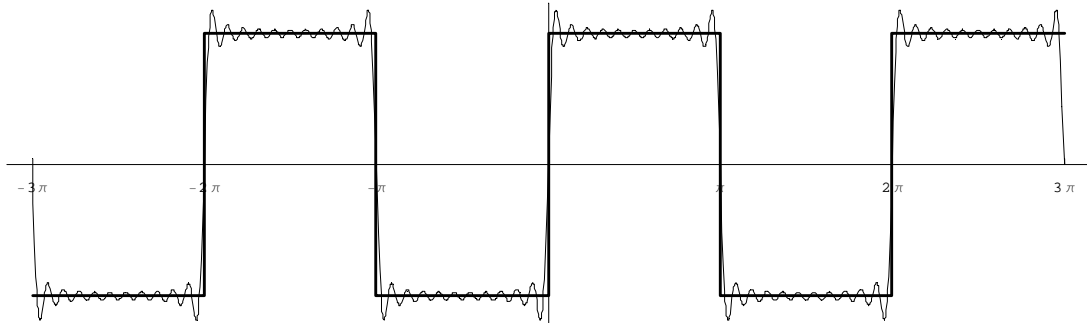


Рис. 11.1.

В този случай съгласно теоремата на Дирихле имаме  $\tau(x) = f(x)$  при  $x \neq k\pi$ ,  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  и  $\tau(k\pi) = 0$ . Ако в представянето на функцията  $f(x)$  положим  $x = \frac{\pi}{2}$ , ще получим интересното равенство

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \dots + (-1)^n \frac{1}{2n+1} + \dots$$

На рис. 11.1 се вижда **явлението на Гибс**, което се състои в особеното поведение на реда на Фурие в околност на точките на прекъсване за функцията  $f(x)$ .

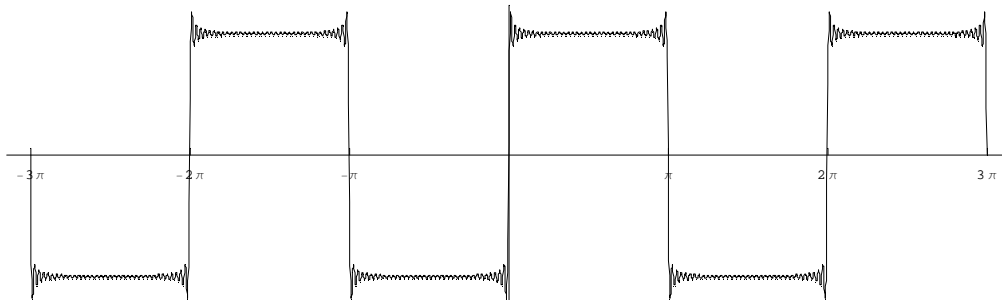


Рис. 11.2.

На рис 11.2 е показана графиката на частичните суми при  $n = 71$ .

**2. Редове на Фурие за  $2l$ -периодични функции.** Сега ще разгледаме функции  $f(x)$  с период  $T = 2l$ ,  $l > 0$ . При  $l = \pi$  се получава вече познатия случай на  $2\pi$ -периодични функции. В този случай функциите

$$(11.10) \quad c_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2l}}, \quad c_k(x) = \frac{1}{\sqrt{l}} \cos \frac{k\pi x}{l}, \quad s_k(x) = \frac{1}{\sqrt{l}} \sin \frac{k\pi x}{l}, \quad k = 1, 2, \dots,$$

образуват ортонормирана система за интервала  $[-l, l]$ . Редът на Фурие тук има вида

$$(11.11) f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right),$$

където коефициентите се пресмятат по формулите

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx, \quad n = 1, 2, \dots$$

Когато функцията  $f(x)$  е **четна** всичките коефициенти  $b_n$  са равни на нула, а редът на Фурие приема вида

$$(11.12) f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{l}, \quad a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

При **нечетна** функция  $f(x)$ , всичките коефициенти  $a_n$  са равни на нула, а редът на Фурие приема вида

$$(11.13) f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{l}, \quad b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx, \quad n = 1, 2, \dots$$

В тези случаи формулата (11.12) се нарича **развитие по косинуси**, а формулата (11.13) се нарича **развитие по синуси**.

Верността на (11.12) и (11.13) се получава веднага от следното твърдение, чиято вярност се получава непосредствено.

**Твърдение 11.4.** Ако  $g(x)$  е четна функция, то за всяко  $l > 0$  е изпълнено

$$\int_{-l}^l g(x) dx = 2 \int_0^l g(x) dx.$$

Ако  $g(x)$  е нечетна, то

$$\int_{-l}^l g(x) dx = 0. \quad \blacksquare$$

Теоремата на Дирихле за поточковата сходимост на реда на Фурие остава в сила и за редовете (11.12-13).

Всичките развития в ред на Фурие досега се отнасяха за интервала  $[-l, l]$ , който е симетричен спрямо нулата. Всъщност системата от функции (11.10) образува ортонормиран базис и за всеки интервал  $[a, a + 2l]$ . По този начин всеки интервал от вида  $[a, a + 2l)$  може да бъде предварително избран за основен, при което функцията  $f(x)$  се задава конкретно над основния интервал, а останалите стойности се определят еднозначно от изискването за  $2l$ -периодичност. Друг често използван основен интервал освен  $[-l, l)$  е интервалът  $[0, 2l)$ , който за  $2\pi$ -периодичните функции е интервалът  $[0, 2\pi)$ . Вида на реда на Фурие, както и формулите за пресмятане на коефициентите остават същите.

**3. Диференциране на редовете на Фурие.** Тук ще разглеждаме непрекъсната и гладка по части  $2\pi$ -периодична функция  $f(x)$ . Най-елементарен е случаят, когато  $f(x)$  има непрекъсната производна навсякъде. В общия случай производната съществува навсякъде с изключение евентуално на някои точки, които са краен брой във всеки ограничен интервал, а във всяка такава точка съществуват двете едностранни



производни. В последния случай производната отново ще означаваме  $f'(x)$ , при което така определената "обобщена" производна представлява непрекъсната по части функция. Тук от особено значение е фактът, че остава в сила формулата за интегриране по части

$$\int_a^b f'(x)g(x)dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f(x)dg(x),$$

за всяка непрекъсната диференцируема функция  $g(x)$ . Верността на последната формула може да се проследи чрез елементарни разсъждения.

Нека  $f(x)$  е непрекъсната и гладка по части  $2\pi$ -периодична функция с ред на Фурие

$$(11.14) f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos nx + b_n \sin nx].$$

Тогава нейната производна  $f'(x)$  представлява интегрируема функция, която по определение има ред на Фурие

$$(11.15) f'(x) \sim \frac{a'_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a'_n \cos nx + b'_n \sin nx].$$

За коефициентите на реда имаме

$$a'_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \cos nx dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx df(x) = \frac{1}{\pi} f(x) \cos nx \Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) d \cos nx,$$

$$a'_n = \frac{n}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx = nb_n, \quad n = 1, 2, \dots,$$

$$a'_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) dx = f(x) \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0.$$

$$b'_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \sin nx dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx df(x) = \frac{1}{\pi} f(x) \sin nx \Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) d \sin nx,$$

$$b'_n = -\frac{n}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = -na_n, \quad n = 1, 2, \dots$$

Следователно

$$f'(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} [b_n n \cos nx - a_n n \sin nx],$$

което означава, че редът на Фурие (11.15) за производната  $f'(x)$  се е получил от **почленно диференциране** на реда на Фурие за функцията  $f(x)$ . По този начин доказахме

**Теорема 11.4.** Нека  $f(x)$  е непрекъсната и гладка по части  $2\pi$ -периодична функция. Тогава реда на Фурие за производната  $f'(x)$  се получава посредством почленно диференциране реда на Фурие на функцията  $f(x)$ . ■

Например за  $2\pi$ -периодичната функцията  $f(x)$ , зададена като  $f(x) = x^2$  при  $-\pi \leq x < \pi$ , имаме

$$(11.16) x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos nx, \quad x \in (-\pi, \pi).$$

След почленно диференциране получаваме вече известното развитие

$$2x = 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nx, \quad x \in (-\pi, \pi).$$

**4. Интегриране на редовете на Фурие.** Нека  $f(x)$  е  $2\pi$ -периодична функция, която предполагаме непрекъсната или имаща евентуално с краен брой прекъсвания от първи род в интервала  $[-\pi, \pi]$ . Да разгледаме нейния ред на Фурие

$$f(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos nt + b_n \sin nt].$$

След почленно интегриране, последното приема вида

$$\int_0^x f(t) dt \sim \int_0^x \frac{a_0}{2} dt + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ a_n \int_0^x \cos ntdt + b_n \int_0^x \sin ntdt \right],$$

което дава основание на напишем следното (формално засега) равенство

$$(11.17) \int_0^x f(t) dt = \frac{a_0 x}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ a_n \frac{\sin nx}{n} + b_n \frac{1 - \cos nx}{n} \right].$$

**Теорема 11.5.** Нека  $f(x)$  удовлетворява горното условие. Тогава редът на Фурие за  $f(x)$  може да се интегрира почленно, при което е вярна формулата (11.17).

*Доказателство.* Да разгледаме функцията

$$\Phi(x) = \int_0^x f(t) dt - \frac{a_0 x}{2}.$$

Непосредствено се проверява, че  $\Phi(x)$  представлява непрекъсната и гладка по части  $2\pi$ -периодична функция. Нейната периодичност се вижда от равенството

$$\Phi(x + 2\pi) - \Phi(x) = \int_x^{x+2\pi} f(t) dt - a_0 \pi = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt - a_0 \pi = 0,$$

в което се използва твърдение 11.2. За производната на  $\Phi(x)$  имаме

$$\Phi'(x) = f(x) - \frac{a_0}{2},$$

във всяка точка  $x$ , където  $f(x)$  е непрекъсната. Да образуваме реда на Фурие за  $\Phi(x)$ ,

$$(11.18) \Phi(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [A_n \cos nx + B_n \sin nx].$$

За коефициентите пресмятаме

$$A_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Phi(x) \cos nxdx = \frac{1}{n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Phi(x) d \sin nx = \frac{1}{n\pi} \Phi(x) \sin nx \Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin nxd \Phi(x),$$

$$A_n = -\frac{1}{n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin nxd \Phi(x) = -\frac{1}{n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Phi'(x) \sin nxdx = -\frac{1}{n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[ f(x) - \frac{a_0}{2} \right] \sin nxdx,$$

$$A_n = -\frac{1}{n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nxdx + \frac{1}{n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} \sin nxdx = -\frac{b_n}{n}, \quad n = 1, 2, \dots$$

$$B_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Phi(x) \sin nxdx = -\frac{1}{n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Phi(x) d \cos nx = -\frac{1}{n\pi} \Phi(x) \cos nx \Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos nxd \Phi(x),$$

$$B_n = \frac{1}{n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos nxd \Phi(x) = \frac{1}{n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Phi'(x) \cos nxdx = \frac{1}{n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[ f(x) - \frac{a_0}{2} \right] \cos nxdx,$$

$$B_n = \frac{1}{n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx - \frac{1}{n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} \cos nx dx = \frac{a_n}{n}, \quad n=1,2,\dots$$

Следователно (11.18) има вида

$$(11.19) \Phi(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ -\frac{b_n}{n} \cos nx + \frac{a_n}{n} \sin nx \right].$$

За да пресметнем  $A_0$ , във формулата (11.18) полагаме  $x=0$ , след което получаваме

$$\frac{A_0}{2} = -\sum_{n=1}^{\infty} A_n = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n},$$

което след заместване в (11.19) дава формулата (11.17). ■

Например от (11.16) имаме

$$t^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos nt, \quad x \in (-\pi, \pi),$$

което след интегриране от 0 до  $x$ ,  $|x| < \pi$ , получаваме

$$\int_0^x t^2 dt = \int_0^x \frac{\pi^2}{3} dt + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \int_0^x \cos ntdt,$$

$$\frac{x^3}{3} = \frac{\pi^2 x}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3} \sin nx, \quad x \in (-\pi, \pi),$$

откъдето намираме следния ред на Фурие

$$\frac{x^3}{3} - \frac{\pi^2 x}{3} = 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3} \sin nx, \quad x \in (-\pi, \pi).$$

**5. Комплексна форма на запис на редовете на Фурие.** В този раздел ще разглеждаме комплекснозначни функции на реален аргумент  $f(x) + ig(x)$ , където  $i$  е имагинерната единица,  $i = \sqrt{-1}$ . Диференцирането и интегрирането на такива функции се извършва почленно,

$$[f(x) + ig(x)]' = f'(x) + ig'(x) \quad \text{и} \quad \int_a^b [f(x) + ig(x)] dx = \int_a^b f'(x) dx + i \int_a^b g'(x) dx.$$

Да припомним формулата на Ойлер

$$e^{i\alpha} = \cos \alpha + i \sin \alpha, \quad \alpha \in \mathbf{R}.$$

За да получим реда на Фурие в комплексна форма, разглеждаме следните базисни функции

$$\mathbf{e}_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} [\cos nx + i \sin nx], \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

при което

$$\bar{\mathbf{e}}_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-inx} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} [\cos nx - i \sin nx] = \mathbf{e}_{-n}(x), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Те изпълняват условията за ортонормираност

$$\int_{-\pi}^{\pi} \mathbf{e}_m(x) \bar{\mathbf{e}}_n(x) dx = 0 \quad \text{при} \quad m \neq n, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \mathbf{e}_m(x) \bar{\mathbf{e}}_m(x) dx = 1.$$

Нека  $f(x)$  е  $2\pi$ -периодична функция. Редът на Фурие в този случай има вида

$$f(x) \sim \sum_{-\infty}^{\infty} c_n \mathbf{e}_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{inx},$$

където коефициентите се получават по формулите

$$c_n = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \bar{c}_n(x) dx, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Горните формули могат да се модифицират по следния по-прегледен начин

$$(11.20) \quad f(x) \sim \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{inx},$$

където

$$(11.21) \quad c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx - i \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Съпоставяйки (11.21) с познатите формули за реда на Фурие

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos nx + b_n \sin nx],$$

където

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx, \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx, \quad n = 1, 2, \dots,$$

намираме следните съотношения

$$c_0 = \frac{a_0}{2}, \quad c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n), \quad c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + ib_n), \quad n = 1, 2, \dots,$$

откъдето получаваме

$$a_0 = c_0 + c_0 = 2c_0, \quad a_n = c_n + c_{-n}, \quad b_n = i(c_n - c_{-n}), \quad n = 1, 2, \dots$$

Последното показва, че (11.20-21) представлява алтернативна форма на запис на реда на Фурие, която форма в много случаи се явява по-удобна.

Нека сега  $f(x)$  е  $2l$ -периодична функция. Тук базисните функции имат вида

$$\mathbf{e}_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2l}} e^{\frac{n\pi i x}{l}} = \frac{1}{\sqrt{2l}} \left[ \cos \frac{n\pi x}{l} + i \sin \frac{n\pi x}{l} \right], \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

при което

$$\bar{\mathbf{e}}_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2l}} e^{-\frac{n\pi i x}{l}} = \frac{1}{\sqrt{2l}} \left[ \cos \frac{n\pi x}{l} - i \sin \frac{n\pi x}{l} \right], \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Те също изпълняват условията за ортонормираност

$$\int_{-l}^l \mathbf{e}_m(x) \bar{\mathbf{e}}_n(x) dx = 0 \quad \text{при } m \neq n, \quad \int_{-l}^l \mathbf{e}_m(x) \bar{\mathbf{e}}_m(x) dx = 1.$$

Редът на Фурие в този случай се записва

$$(11.22) \quad f(x) \sim \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{n\pi i x}{l}},$$

където коефициентите се получават по формулите

$$(11.23) \quad c_n = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(x) e^{-\frac{n\pi i x}{l}} dx = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx - i \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(x) \frac{n\pi x}{l} dx, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$