Лекция 9

§9. Степенни редове

1. Редици и редове от функции. Нека функциите $f_n(x)$, $n=1,2,\ldots$, са определени над едно общо дефиниционно множество $D \subseteq \mathbb{R}$. По този начин получаваме редица от функции $\{f_n(x)\}$. Свойствата на редиците от функции са аналогични на свойствата на числовите редици, понеже при всяко фиксирано $x_0 \in D$, редицата $\{f_n(x_0)\}$ представлява обикновена числова редица.

Например редицата от функции $f_n(x)=\dfrac{\cos nx}{n}$ е определена за всяко x, $D=\mathbb{R}$. При $x_0=\pi$ се получава числовата редица $\left\{\dfrac{(-1)^n}{n}\right\}$, която е сходяща и клони към нула.

Нека $E \subseteq D$ е множеството от точки, над които редицата $\{f_n(x)\}$ е сходяща. При различните $x \in E$ се получават различни граници, които зависят от x. По този начин се определя граничната функция $f(x): E \to \mathbb{R}$,

$$f(x)=\lim_{n\to\infty} f_n(x),\ x \in E.$$

която се явява ***поточкова*** граница на редицата $\{f_n(x)\}$.

Например редицата с общ член $f_n(x)=\sin x+\dfrac{x}{x^2+n}$, която е определяна за всяко $x \in \mathbb{R}$, има поточкова граница $f(x)=\sin x$, понеже

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sin x+\frac{x}{x^2+n}\right)=\sin x+\lim_{n\to\infty}\frac{x}{x^2+n}=\sin x,\ x \in \mathbb{R}.$$

Сходимостта на редицата $\{f_n(x)\}$ в точката $x_0 \in E$ означава, че за всяко $\varepsilon>0$ може да се намери n_0 такова, че $|f_n(x_0)-f(x_0)|<\varepsilon$ при всяко $n>n_0$. Една числова редица е сходяща точно когато е фундаментална, което е съдържанието на условието за сходимост на Коши. Редицата $\{f_n(x)\}$ е сходяща в точката $x_0 \in E$, когато за всяко $\varepsilon>0$ съществува n_0 такова, че $|f_{n+p}(x_0)-f_n(x_0)|<\varepsilon$ при всяко $n>n_0$ и всяко естествено p.

Особено значение в теорията има въпроса за свойствата на граничната функция $f(x)$ в съответствие със свойствата на общия член на редицата $f_n(x)$. За да може граничната функция да съхрани свойствата на общия член се нуждаем от по-силен вид сходимост, която се нарича равномерна сходимост.

Определение 9.1. Казва се, че редицата $\{f_n(x)\}$ клони ***равномерно*** към границата $f(x)$ над множеството E, когато за всяко $\varepsilon>0$ може да се намери n_0 такова, че $|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$, за всяко $n>n_0$ и всяко $x \in E$. Казва се, че редицата $\{f_n(x)\}$ е равномерно фундаментална над множеството E, когато за всяко $\varepsilon>0$ може да се намери n_0 такова, че $|f_{n+p}(x)-f_n(x)|<\varepsilon$, за всяко $n>n_0$, всяко естествено число p и всяко $x \in E$. ■

Разликата между поточковата сходимост и равномерната сходимост в общия случай е твърде съществена. Равномерната сходимост означава сходимост по един и същ начин (с една и съща "скорост") във всяка точка от множеството на сходимост.

Например редицата с общ член $f_n(x)=\sin x+\frac{1}{x^2+n}$ клони равномерно към границата $f(x)=\sin x$ над $E=\mathrm{R}$. Имаме

$$|f_n(x)-f(x)|=\frac{1}{x^2+n}\le\frac{1}{n},\ x\in\mathrm{R},$$

следователно при дадено $\varepsilon>0$ можем да изберем едно $n_0>\frac{1}{\varepsilon}$, при което за всяко $n>n_0$ и всяко $x\in\mathrm{R}$ е изпълнено

$$|f_n(x)-f(x)|\le\frac{1}{n}<\frac{1}{n_0}<\varepsilon.$$

Да разгледаме сега редицата $f_n(x)=x^n$ над дефиниционното множество $D=[0,1]$. При $0\le x<1$ имаме $\lim_{n\to\infty}f_n(x)=\lim_{n\to\infty}x^n=0$, а при $x=1$, очевидно $\lim_{n\to\infty}f_n(x)=1$. Следователно редицата $\{x^n\}$ клони поточково над интервала $[0,1]$ към граничната функция

$$f(x)=\begin{cases}0 \ \text{за}\ 0\le x<1\\ 1\ \text{за}\ x=1\end{cases}$$

Тази сходимост обаче не е равномерна, понеже при всяко $\varepsilon>0$, за което $\varepsilon<1$, условието

$$|f_n(x)-f(x)|=x^n<\varepsilon,$$

се нарушава за всяко x, достатъчно близко до 1.

Твърдение 9.1. Редицата $\{f_n(x)\}$ е равномерно сходяща над E тогава и само тогава, когато е равномерно фундаментална.

Доказателство. Нека $\{f_n(x)\}$ е равномерно сходяща над E към граничната функция $f(x)$ и нека $\varepsilon>0$. Тогава съществува n_0 такова, че $|f_n(x)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{2}$, за всяко $n>n_0$ и всяко $x\in E$. Тогава при всяко $n>n_0$, всяко естествено p и всяко $x\in E$ е изпълнено

$$|f_{n+p}(x)-f(x)|\le|f_{n+p}(x)-f_n(x)|+|f_n(x)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon,$$

което доказва равномерната фундаменталност на $\{f_n(x)\}$. Да предположим сега, че редицата $\{f_n(x)\}$ е равномерно фундаментална. Тогава при всяко $x_0\in E$ е фундаментална, следователно сходяща във всяка точка $x_0\in E$. Да означим с $f(x)$ поточковата граница на редицата $\{f_n(x)\}$. Ще докажем, че $f(x)$ се явява и равномерна граница за редицата $\{f_n(x)\}$. Нека $\varepsilon>0$. По условие съществува n_0 такова, че

$$|f_{n+p}(x)-f_n(x)|<\frac{\varepsilon}{2},$$

за всяко $n>n_0$, всяко естествено p и всяко $x\in E$. След граничен преход при $p\to\infty$, от последното неравенство получаваме, че за всяко $n>n_0$ и всяко $x\in E$ е в сила

$$|f(x)-f_n(x)|\le\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon,$$

което означава равномерна сходимост на редицата $\{f_n(x)\}$. ■

Равномерната сходимост позволява на граничната функция да наследи свойството непрекъснатост.

Теорема 9.1. Нека редицата от непрекъснати функции $\{f_n(x)\}$, определени над ограничения затворен интервал $[a,b]$, клони равномерно към функцията $f(x)$. Тогава граничната функция $f(x)$ е непрекъсната в $[a,b]$.

Доказателство. Нека $\varepsilon > 0$. Съгласно определението за равномерна сходимост, може да се намери n_0 такова, че

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3},$$

за всяко $n > n_0$ и всяко $x \in [a,b]$. Да фиксираме едно $n_1 > n_0$. Функцията $f_{n_1}(x)$ е непрекъсната над ограничения затворен интервал $[a,b]$, следователно се явява и равномерно непрекъсната. От равномерната непрекъснатост следва съществуването на $\delta > 0$ такова, че

$$\left|f_{n_1}(x) - f_{n_1}(y)\right| < \frac{\varepsilon}{3},$$

винаги когато $|x-y| < \delta$, $x, y \in [a,b]$. Нека x и y са избрани от последните две условия. Тогава

$$|f(x) - f(y)| = \left|\left(f(x) - f_{n_1}(x)\right) + \left(f_{n_1}(x) - f_{n_1}(y)\right) + \left(f_{n_1}(y) - f(y)\right)\right|,$$

$$|f(x) - f(y)| \le \left|f(x) - f_{n_1}(x)\right| + \left|f_{n_1}(x) - f_{n_1}(y)\right| + \left|f_{n_1}(y) - f(y)\right|,$$

$$|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon,$$

което по определение означава, че граничната функция $f(x)$ се явява равномерно непрекъсната над интервала $[a,b]$. ■

Последната теорема показва, че метричното пространство $C[a,b]$ на непрекъснатите над ограничения затворен интервал $[a,b]$ функции е пълно относно равномерната метрика

$$\rho(f,g) = \max_{a \le x \le b} |f(x) - g(x)|.$$

Равномерната сходимост позволява да се извърши ***граничен преход под знака на интеграла***.

Теорема 9.2. Нека редицата от непрекъснати функции $\{f_n(x)\}$, определени над ограничения затворен интервал $[a,b]$, клони равномерно към функцията $f(x)$. Тогава е в сила равенството

(9.1) $$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx.$$

Доказателство. Нека $\varepsilon > 0$. От определението за равномерна сходимост следва съществуването на n_0 такова, че

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{b-a},$$

при всяко $n > n_0$ и всяко $x \in [a,b]$. Сега от основните свойства на интеграла получаваме

$$\left|\int_a^b f_n(x)dx - \int_a^b f(x)dx\right| = \left|\int_a^b [f_n(x) - f(x)]dx\right| \le \int_a^b \frac{\varepsilon}{b-a}dx = \frac{\varepsilon}{b-a}\int_a^b dx = \varepsilon,$$

при всяко $n > n_0$, което по определение означава, че е изпълнено граничното съотношение (9.1). ■

Например

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi}\left(\sin x + \frac{1}{x^2+n}\right)dx = \int_0^{\pi}\sin x dx = 2 .$$

Равномерната сходимост позволява при определени условия граничната функция да наследи и свойството диференцируемост.

Теорема 9.3. Нека редицата от непрекъснати функции $\{f_n(x)\}$, определени над ограничения затворен интервал $[a,b]$, клони равномерно към функцията $f(x)$, а редицата от техните производни $\{f_n'(x)\}$, за които се предполага също, че са непрекъснати функции над $[a,b]$, клони равномерно към функцията $g(x)$. Тогава граничната функция $f(x)$ е диференцируема в $[a,b]$, при което $f'(x) = g(x)$.

Доказателство. Съгласно теорема 9.2, граничните функции $f(x)$ и $g(x)$ са непрекъснати. Да изберем едно $c \in (a,b)$. Съгласно основната теорема на Нютон-Лайбниц е в сила равенството

$$f_n(x) = f_n(c) + \int_c^x f_n'(t)dt .$$

Да фиксираме едно $x \in [a,b]$ и да направим граничен преход в последното равенство. От теорема 9.3 получаваме

$$f(x) = f(c) + \int_c^x g(t)dt .$$

Сега от правилото за диференциране на интеграла като функция на горната си граница намираме, че $f'(x) = g(x)$, което доказва теоремата. ■

Нека функциите $u_n(x)$, $n = 1,2,\ldots$, са определени над едно общо дефиниционно множество $D \subseteq \mathrm{R}$ и да разгледаме реда от функции

(9.2) $\quad \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ с частични суми $s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x)$.

Свойствата на функционните редове са аналогични на свойствата на числовите редове, понеже при всяко фиксирано $x_0 \in D$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$$

представлява обикновен числов ред. Нека $E \subseteq D$ е множеството от точки, над които редът (9.2) е сходящ. При различните $x \in E$ се получават различни граници, които зависят от x. По този начин се определя граничната функция $s(x): E \to \mathrm{R}$,

$$s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x),\ x \in E .$$

която се явява ***поточкова*** граница на реда (9.2). Всички видове сходимости при редовете се дефинират посредством съответната сходимост на редицата от частичните суми $\{s_n(x)\}$. По тази причина, получените резултати за свойствата на редиците от функции се пренасят непосредствено върху функционните редове. Съгласно определенията

$$s(x) = \lim_{n\to\infty} s_n(x),\ x \in E .$$

Определение 9.2. Казва се, че редът $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ клони равномерно към границата $s(x)$ над множеството E, когато редицата от частичните суми $\{s_n(x)\}$ клони равномерно към $s(x)$ над E. ■

В този случай функцията $s(x)$ се явява сума на реда. Редът $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ се нарича ***абсолютно сходящ*** над множеството E, когато е сходящ редът $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n(x)|$. Очевидно ако един ред е абсолютно сходящ над дадено множество, то той е и сходящ над същото множество.

Следващите твърдения са непосредствени следствия от определенията и от съответните твърдения за редици от функции.

Твърдение 9.2. Нека функциите $u_n(x)$ са непрекъснати над интервала $[a,b]$, а редът $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ е равномерно сходящ към $s(x)$ над $[a,b]$. Тогава сумата на реда $s(x)$ се явява непрекъсната функция. ■

Доказателството на твърдение 9.2 следва от теорема 9.1.

Твърдение 9.3. Нека функциите $u_n(x)$ са непрекъснати над интервала $[a,b]$, а редът $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ е равномерно сходящ към $s(x)$ над $[a,b]$. Тогава е в сила равенството

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x)dx = \int_a^b s(x)dx . ■$$

Твърдение 9.3 представлява правилото за граничен преход под знака на интеграла за редове (***почленно интегриране***), а неговото доказателство следва от теорема 9.2.

Твърдение 9.4 Нека функциите $u_n(x)$ и техните производни $u_n'(x)$ са непрекъснати над интервала $[a,b]$. Нека освен това редът $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ е равномерно сходящ към $s(x)$ над $[a,b]$, а редът от производните $\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$ е равномерно сходящ към $g(x)$ над $[a,b]$. Тогава сумата на реда $s(x)$ е диференцируема функция, при което за нейната производна имаме $s'(x) = g(x)$. ■

Твърдение 9.4 представлява правилото за ***почленно диференциране*** при редове, понеже неговото заключение може да се запише във вида

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x),$$

а неговото доказателство следва от теорема 9.3.

Според твърдение 9.1, равномерната сходимост на реда (9.2), означава равномерна фундаменталност на редицата от частичните суми $\{s_n(x)\}$. По този начин получаваме следния критерий за равномерна сходимост, който може да се схваща и като определение.

Твърдение 9.5 (*Коши*). Редът $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ е равномерно сходящ над множеството E тогава и само тогава, когато за всяко $\varepsilon > 0$ може да се намери n_0 такова, че

$$\left|s_{n+p}(x) - s_n(x)\right| = \left|u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \cdots + u_{n+p}(x)\right| < \varepsilon ,$$

при всяко $n > n_0$, всяко естествено p и всяко $x \in E$. ■

Установяването на равномерната сходимост на даден ред в много от случаите се получава от следната важна

Теорема 9.4 (*Вайерщрас*). Нека функциите $u_n(x)$ са определени над множеството E, при което е изпълнено $\left|u_n(x)\right| \le \alpha_n$, $x \in E$, а редът с положителни членове $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ е сходящ. Тогава редът $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ е равномерно (и абсолютно) сходящ над множеството E.

Доказателство. Нека $\varepsilon > 0$. От сходимостта на реда $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ следва съществуването на n_0 такова, че

$$\left|\alpha_{n+1} + \alpha_{n+2} + \cdots + \alpha_{n+p}\right| < \varepsilon ,$$

при всяко $n > n_0$ и всяко естествено p. Нека $s_n(x)$ са частичните суми на реда от абсолютните стойности на общия член на $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$,

$$s_n(x) = \left|u_1(x)\right| + \left|u_2(x)\right| + \cdots + \left|u_n(x)\right| .$$

От горното веднага получаваме

$$\left|s_{n+p}(x) - s_n(x)\right| = \left|u_{n+1}(x)\right| + \left|u_{n+2}(x)\right| + \cdots + \left|u_{n+p}(x)\right| \le \alpha_{n+1} + \alpha_{n+2} + \cdots + \alpha_{n+p} < \varepsilon ,$$

при всяко $n > n_0$, всяко естествено p и всяко $x \in E$, което съгласно твърдение 9.5 означава равномерна и абсолютна сходимост на реда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$. ■

Критерият на Вайерщрас се оказва твърде ефективен в много разнообразни ситуации, независимо от своята простота.

2. Степенни редове. Редът от функции

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-\mu)^n = a_0 + a_1(x-\mu) + a_2(x-\mu)^2 + \cdots + a_n(x-\mu)^n + \cdots \tag{9.3}$$

се нарича ***степенен ред*** с център в точката μ и коефициенти a_n, $n = 0,1,2,\ldots$. Множеството на сходимост E на реда (9.3) не е празно, понеже винаги съдържа поне точката μ.

Степенните редове представляват непосредствено обобщение на полиномите, понеже всеки полином може да се разглежда като степенен ред, в който само краен брой от коефициентите е различен от нула. Степенните редове, при определени условия, представляват и непосредствено обобщение на представянето на дадена функция посредством формулата на Тейлър. Степенните редове представляват едно от най-важните понятия за цялата математика.

Например да разгледаме степенния ред

$$f(x) = 1 + (x-\mu) + (x-\mu)^2 + \cdots + (x-\mu)^n + \cdots \tag{9.4}$$

Съгласно правилото за сумиране на геометрична прогресия, при $|x-\mu|<1$ редът (9.4) представлява функцията

$$f(x)=\frac{1}{1-(x-\mu)}.$$

При кое да е x, за което $|x-\mu|\geq 1$, редът (9.4) е разходящ, понеже общият му член $(x-\mu)^n$ не клони към нула. По този начин множеството E, над което редът (9.4) е сходящ, се определя от условието $E:|x-\mu|<1$, което задава интервал $(\mu-1,\mu+1)$ с център в точката μ и радиус $R=1$. В общия случай се наблюдава същата закономерност. Следващата важна теорема привеждаме без доказателство.

Теорема 9.5 (*Абел*). За всеки степенен ред (9.3) съществува някакво число $R\geq 0$ (или $R=\infty$) такова, че редът е абсолютно сходящ за всяко x от интервала $(\mu-R,\mu+R)$ и разходящ за всяко x, за което $|x-\mu|>R$. В този случай R се нарича ***радиус на сходимост*** на степенния ред. Освен това, ако $R>0$, то редът е равномерно и абсолютно сходящ над всеки ограничен затворен интервал $[a,b]\subset(\mu-R,\mu+R)$. ■

За примера (9.4) намерихме $R=1$. Радиусът на сходимост може да бъде намерен с помощта на ***формулата на Адамар***,

$$R=\frac{1}{\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|}},$$

където $\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|}$ е най-голямата точка на сгъстяване за редицата $\left\{\sqrt[n]{|a_n|}\right\}$. В повечето случаи обаче радиусът на сходимост се пресмята въз основа на следното

Твърдение 9.6. Нека съществува някоя от границите $l=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$ или $l=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$. Тогава $R=\frac{1}{l}$, при което ако $l=0$, то $R=\infty$, и ако $l=\infty$, то $R=0$.

Доказателство. Нека съществува границата $l=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$. Да фиксираме едно x и да разгледаме степенния ред

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-\mu)^n \tag{9.5}$$

като числов с общ член $u_n=a_n(x-\mu)^n$. От условието следва съществуването на границата

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n|}=|x-\mu|\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=l|x-\mu|.$$

Сега от критерия на Коши следва, че при $l|x-\mu|<1$ редът е абсолютно сходящ, а при $l|x-\mu|>1$ редът е разходящ, понеже общият му член не клони към нула. По този начин получихме, че величината $\frac{1}{l}$ има следното свойство. При $|x-\mu|<\frac{1}{l}$ редът е абсолютно сходящ, а при $|x-\mu|>\frac{1}{l}$ редът е разходящ. Единствената величина, с това свойство обаче е радиусът на сходимост на реда, следователно $R = \dfrac{1}{l}$. Нека съществува границата $l = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|$. Тогава съществува границата

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}(x-\mu)^{n+1}}{a_n(x-\mu)^n}\right| = |x-\mu|\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = l|x-\mu|.$$

Сега доказателството се завършва по същия начин, само че вместо критерия на Коши се използва критерия на Даламбер. ■

Например степенният ред

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{2^n}$$

има радиус на сходимост $R = 2$, понеже

$$a_n = \frac{1}{2^n} \text{ и } l = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{2^n}} = \frac{1}{2}.$$

Редът

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{n} \tag{9.6}$$

има радиус на сходимост $R = 1$, понеже

$$a_n = \frac{1}{n} \text{ и } l = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1} = 1.$$

Нека $0 < R < \infty$. От теорема 9.5 знаем, че в интервала $(\mu - R, \mu + R)$ степенният ред е абсолютно сходящ, а в интервалите $(-\infty, \mu - R)$ и $(\mu + R, \infty)$ редът е разходящ. Теорема 9.5 не уточнява поведението на реда в двата края на интервала $\mu - R$ и $\mu + R$. В общия случай съществуват редове, за които се реализират всичките възможности за сходимост или разходимост по краищата на въпросния интервал. Например за реда (9.6), с център $\mu = 3$, вече установихме, че $R = 1$, от което следва, че при $x \in (\mu - R, \mu + R) = (2,4)$ редът е абсолютно сходящ, а при $x \notin [2,4]$ редът е разходящ, понеже общият му член не клони към нула. В десния край $x = 4$ на интервала получаваме хармоничния числовия ред

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n},$$

за който вече установихме, че е разходящ. В левия край $x = 2$ на интервала получаваме числовия ред

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n},$$

който е условно сходящ, съгласно критерия на Лайбниц.

Степенните редове с ненулев радиус на сходимост допускат ***почленно интегриране*** въз основа на клаузата за равномерна сходимост от теорема 9.5. Например редът $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$ има радиус на сходимост $R = 1$, при $|x| < 1$ неговата сума $\dfrac{1}{1-x}$ се намира от формулата за геометрична прогресия, следователно можем да напишем

$$\frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n, \ |t| < 1.$$

Да разгледаме едно x, $|x|<1$. Тогава горният ред е равномерно сходящ в интервала $[0,x]$ и можем да приложим почленно интегриране, след което намираме

$$\int_0^x \frac{1}{1-t}dt=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x t^n dt,\ |x|<1,$$

$$\ln(1-x)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n},\ |x|<1.$$

По този начин в частност получихме развитието на функцията $\ln(1-x)$ в степенен ред около нулата.

Степенните редове с ненулев радиус на сходимост допускат ***почленно диференциране***. Резултатът от почленно диференциране на даден степенен ред е отново степенен ред със същия радиус на сходимост.

Теорема 9.6. Нека $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-\mu)^n$ е степенен ред с ненулев радиус на сходимост, $R>0$. Тогава неговата сума $f(x)$ има производни от всеки ред в отворения интервал $(\mu-R,\mu+R)$, които производни се получават посредством почленно диференциране. Получените от това диференциране степенни редове имат същия радиус на сходимост R. ■

От тази теорема следва, че

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}na_n(x-\mu)^{n-1},$$

$$f''(x)=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_n(x-\mu)^{n-2},$$

$$f'''(x)=\sum_{n=3}^{\infty}n(n-1)(n-2)a_n(x-\mu)^{n-3} \text{ и т.н.}$$

Като пример за приложение на теорема 9.6 да намерим сумата на реда

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}. \tag{9.7}$$

За този ред имаме

$$a_n=\frac{1}{n},\ l=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1,$$

следователно $R=\frac{1}{l}=1$. От теорема 9.6 следва, че функцията $f(x)$ има производни от всеки ред за $x\in(-1,1)$, които могат да бъдат намерени посредством почленно диференциране. След диференциране (9.7) приема вида

$$f'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}x^n,\ |x|<1.$$

Последното записваме във вида

$$f'(t)=\frac{1}{1-t},\ |t|<1,$$

и интегрираме в граници от 0 до x, $|x|<1$. Получаваме

$$\int_0^x f'(t)dt=\int_0^x\frac{dt}{1-t}=-\ln(1-t)\Big|_0^x=-\ln(1-x).$$

От друга страна

$$\int_0^x f'(t)dt = \int_0^x df(t) = f(t)\Big|_0^x = f(x) - f(0) = f(x),$$

понеже $f(0) = 0$. Така получаваме

$$f(x) = -\ln(1-x),\ |x| < 1.$$

Да разгледаме отново степенния ред

(9.8) $$f(x) = a_0 + a_1(x-\mu) + a_2(x-\mu)^2 + a_3(x-\mu)^3 + \cdots + a_n(x-\mu)^n + \cdots,$$

за който предполагаме ненулев радиус на сходимост, $R > 0$. Замествайки $x = \mu$ получаваме $a_0 = f(\mu)$. След диференциране намираме

$$f'(x) = a_1 + 2a_2(x-\mu) + 3a_3(x-\mu)^2 + \cdots + na_n(x-\mu)^{n-1} + \cdots.$$

Замествайки $x = \mu$ получаваме $a_1 = f'(\mu)$. Като диференцираме отново намираме

$$f''(x) = 2a_2 + 6a_3(x-\mu) + \cdots + n(n-1)a_n(x-\mu)^{n-2} + \cdots.$$

Замествайки $x = \mu$ получаваме $a_2 = 2f'(\mu)$. Продължавайки аналогично получаваме верността на

Теорема 9.7. Нека $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-\mu)^n$ е степенен ред с ненулев радиус на сходимост, $R > 0$. Тогава за неговите коефициенти е в сила формулата

$$a_n = \frac{f^{(n)}(\mu)}{n!},\ n = 0,1,2,\ldots,$$

следователно редът може да се запише във вида

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(\mu)}{n!}(x-\mu)^n,$$

(9.9) $$f(x) = f(\mu) + f'(\mu)(x-\mu) + \frac{f''(\mu)}{2}(x-\mu)^2 + \frac{f'''(\mu)}{6}(x-\mu)^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(\mu)}{n!}(x-\mu)^n + \cdots,$$

при което редът (9.9) е абсолютно и равномерно сходящ над всеки ограничен затворен интервал $[a,b] \subset (\mu - R, \mu + R)$. ■

Степенният ред във вида (9.9) представлява непосредствено обобщение на развитието на дадена функция посредством формулата на Тейлър около точката μ.

Например за функцията $f(x) = e^x$ имаме следното развитие около нулата

(9.10) $$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + \frac{x^6}{720} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots.$$

За реда (9.10) имаме

$$a_n = \frac{1}{n!} \text{ и } l = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1} = 0,$$

следователно $R = \frac{1}{l} = \infty$. При $\mu = 0$ степенният ред се нарича още ***ред на Маклорен***. Разсъждавайки аналогично, получаваме следните маклоренови развития

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \cdots,\ R = \infty,$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + \cdots,\ R = \infty,$$

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}-\cdots,\ R=1,$$
$$(1+x)^{\alpha}=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}x^n=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{6}x^3+\cdots,\ R=1.$$

Два степенни реда с един и същ център $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-\mu)^n$ и $g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}b_n(x-\mu)^n$ и радиуси на сходимост $R_f>0$ и $R_g>0$ могат да се ***събират почленно***, при което се получава степенен ред $h(x)=f(x)+g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)(x-\mu)^n$ с радиус на сходимост $R_h=\min(R_f,R_g)$. Резултатът от тяхното умножение отново представлява степенен ред $f(x)g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(x-\mu)^n$, където за коефициентите c_n е в сила ***конволюционната формула***

$$c_n=\sum_{k=0}^{n}a_kb_{n-k}=a_0b_n+a_1b_{n-1}+a_2b_{n-2}+\cdots+a_{n-1}b_1+a_nb_0,\ n=0,1,2,\ldots.$$

Тази формула се получава естествено след разкриване на скобите и групиране на събираемите с равни степени на променливата $(x-\mu)$.

Съгласно една теорема на Абел, даден степенен ред представлява непрекъсната функция в целия интервал на сходимост $\langle\alpha,\beta\rangle$, независимо от това дали краищата на този интервал принадлежат или не на самия интервал. Вече знаем развитието на функцията $\ln(1+x)$ около нулата

(9.11) $$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}-\cdots.$$

От друга страна редът е (условно) сходящ за $x=1$ и разходящ за $x=-1$, следователно неговият интервал на сходимост е $(-1,1]$. От теоремата на Абел следва, че редът (9.11) задава непрекъсната (отляво) функция в точката $x=1$, откъдето след граничен преход при $x\to 1-0$ намираме интересното равенство

$$\ln 2=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\cdots.$$