Лекция 15

§15. Вероятност на събитие

1. Случайни събития. Събитие наричаме възможен изход от някакъв ***опит*** (експеримент). Например ако опитът се състои в хвърляне на правилен игрален зар, то едно събитие A можем да определим като появата на резултат 3. Друго събитие B може да се определи като появата на четен резултат. В резултат на опита въпросните събития могат да се сбъднат или не, затова казваме че опитът има ***случаен*** характер. В този случай пространството на елементарните събития Ω се състои от събитията ω_k, определени като появата на резултат k, $1 \le k \le 6$. Събитието A е елементарно, $A = \omega_3$, а събитието B е ***съставно***, понеже неговото сбъдване включва възможността за сбъдване на трите елементарни събития ω_2, ω_4 и ω_6, $B = \{\omega_2, \omega_4, \omega_6\}$. В подобни ситуации е полезно да имаме някаква обективна представа относно шанса за сбъдване на едно събитие, която задача води до определяне на понятието вероятност, което ще дефинираме по-нататък заедно с нужните за целта детайли.

Ако опитът се състои в хвърляне на два зара едновременно, то е удобно елементарните събития да бъдат различавани посредством двойно индексиране,

ω_{ij} ="първият зар показва резултат i, а вторият резултат j", $1 \le i, j \le 6$.

В този случай, ако определим събитието A ="сборът от двете показания да се дели на 3", то A включва следните елементарни изходи

$$A = \{\omega_{1,2}, \omega_{1,5}, \omega_{2,1}, \omega_{2,4}, \omega_{3,3}, \omega_{3,6}, \omega_{4,2}, \omega_{4,5}, \omega_{5,1}, \omega_{5,4}, \omega_{6,3}, \omega_{6,6}\}. \tag{15.1}$$

Всичките отделни възможни изходи от даден случаен опит се наричат ***елементарни събития***, а тяхната съвкупност обикновено се бележи с Ω. Елементарните събития се означават с ω_k, $k = 1,2,\dots,$. Техният брой може да бъде както краен така и безкраен. Например нека опитът се състои в хвърляне на правилна монета до първата поява на "герб". Тук елементарните събития се определят по следния начин: ω_k ="герб се появява за първи път при k-то подред хвърляне". Очевидно k би могло да бъде всяко естествено число.

Казаното дотук обосновава следното естествено определение. ***Случайно събитие A се нарича всяко подмножество на множеството от елементарните изходи Ω от даден случаен опит.*** Събитието A се сбъдва, когато в резултат на опита настъпва някой от неговите елементарни изходи.

Събитието $A = \Omega$ се нарича ***сигурно***, понеже винаги се сбъдва. С оглед на пълнота и удобство въвеждаме ***невъзможното*** събитие $\varnothing$, определено като празното подмножество на Ω. Всяко друго събитие включва възможността практически да се сбъдне или не в резултат на опита.

Между случайните събития могат да се въведат алгебрични операции, които отново водят до събития. Поради начина на определяне на понятието случайно събитие, тези операции са практически идентични със съответните операции между множества.

Събитието $\overline{A}$ се нарича ***противоположно*** на A, ако се сбъдва точно когато събитието A не се сбъдва. Като множество от елементарни изходи, $\overline{A}$ се явява допълнение на A относно Ω, $\overline{A} = \Omega \setminus A$. По този начин $\overline{A} \cup A = \Omega$. Например ако при хвърляне на зар събитието A означава резултатът да е четно число, то неговото противоположно $\overline{A}$ означава резултатът да бъде нечетно число.

Сумата $A + B$ $(A \cup B)$ на двете събития A и B се определя като събитие, което се сбъдва, когато се сбъдва поне едно от събитията A или B. Сумата $A + B$ включва възможността от едновременно сбъдване на двете събираеми. Разгледани като множество от елементарни събития, сумата представлява тяхното обединение $A \bigcup B$, затова понякога се означава и по този начин. Например при хвърляне на зар, ако събитието A означава, че резултатът е четно число, а събитието B означава, че резултатът се дели на 3, то имаме

$$A = \{\omega_2, \omega_4, \omega_6\},\ B = \{\omega_3, \omega_6\},\ A + B = \{\omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_6\}.$$

Разликата $A - B$ $(A \setminus B)$ на двете събития A и B се определя като събитие, което се сбъдва, точно когато се сбъдва събитието A, но събитието B не се сбъдва. Разгледани като множество от елементарни събития, сумата представлява тяхната теоретикомножествена разлика $A \setminus B$, затова се означава понякога по същия начин. В предположенията на последния пример имаме

$$A - B = \{\omega_2, \omega_4\}.$$

Произведение AB на двете събития A и B се определя като събитие, което се сбъдва, когато двете събития A и B се сбъдват едновременно. Разгледани като множество от елементарни събития, произведението представлява тяхното сечение $A \bigcap B$, затова понякога се означава и по този начин. В предположенията на последния пример имаме

$$AB = \{\omega_6\}.$$

Операцията сума на събития се разпространява по естествен начин и върху повече от две събираеми. Например ако A_1, A_2 и A_3 са събития, то сумата $A_1 + A_2 + A_3$ се определя като събитие, което се сбъдва когато се сбъдва поне едно от събираемите, което включва възможността да се сбъднат трите едновременно или да се сбъднат едновременно някои две от тях, а третото да не се сбъдне.

Операцията произведение на събития се разпространява по естествен начин и върху повече от два множителя. Например ако A_1, A_2 и A_3 са събития, то произведението $A_1 A_2 A_3$ се определя като събитие, което се сбъдва когато трите множителя A_1, A_2 и A_3 се сбъдват едновременно.

Събитията A и B се наричат ***несъвместими***, когато не могат да се сбъднат едновременно, т.е. когато тяхното произведение представлява невъзможното събитие, $AB = \varnothing$. Например едно събитие A и неговото противоположно $\overline{A}$ винаги са несъвместими.

Операциите между събития притежават следните елементарни свойства, които се доказват непосредствено.

1) $A + \varnothing = \varnothing + A = A$, $A\varnothing = \varnothing A = \varnothing$.

2) $A + \Omega = \Omega$, $A\Omega = A$, $A + \overline{A} = \Omega$.

3) $A + B = B + A$, $AB = BA$.

4) $A + (B + C) = (A + B) + C = A + B + C$, $A(BC) = (AB)C = ABC$.

5) $A(B + C) = AB + AC$.

6) $A - B = A\overline{B}$, $\Omega - B = \Omega\overline{B} = \overline{B}$.

7) $C - (A + B) = (C - A)(C - B)$, $C - (AB) = (C - A) + (C - B)$.

8) $A + B = (A - B) + (B - A) + AB$.

В частност, когато $C = \Omega$, от свойство 7 получаваме законите на Де-Морган

$$\overline{A + B} = \overline{A}\,\overline{B} \text{ и } \overline{AB} = \overline{A} + \overline{B}.$$

2. Вероятност на събития. Вероятността $P(A)$ на дадено събитие A представлява обективна числова мярка относно шанса за неговото сбъдване. За описаните по-горе примери с хвърляне на зарове е естествено да определим вероятността като отношение на броя на елементарните изходи, при които събитието се сбъдва, към броя на всичките елементарни изходи. Такова определение изглежда напълно разумно и се оправдава в следващите теоретични конструкции.

Например ако при хвърляне на зар A е събитието резултатът да бъде четно число, то

$$P(A)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2},$$

понеже броят на елементарните изходи ω_2, ω_4 и ω_6, при които A се сбъдва е равен на 3, а броят на всичките изходи от този опит е равен на 6. Ако при хвърляне на два зара събитието A се определя сборът от показанията да се дели на 3, то за вероятността на A намираме

$$P(A)=\frac{12}{36}=\frac{1}{3},$$

понеже съгласно (15.1) броят на елементарните събития, при които A се сбъдва е равен на 12, а броят на всичките елементарни изходи е равен на 36.

В общия случай вероятността се определя посредством следната принципна формула, която се реализира по различни начини в различните вероятностни модели,

(15.2) $$\textit{вероятност}=\frac{\textit{мярка на благоприятното}}{\textit{мярка на общото}}.$$

Съгласно този принцип, вероятността винаги представлява число между 0 и 1.

Вероятността притежава следните основни свойства, които могат да се схващат в качеството на ***аксиоми***.

1) $0\le P(A)\le 1$, $P(\varnothing)=0$, $P(\Omega)=1$.

2) Ако събитията A и B са несъвместими, то $P(A+B)=P(A)+P(B)$.

Второто свойство се обобщава и за повече събираеми. Например, ако A_1, A_2 и A_3 са две по две несъвместими, то за тяхната сума е вярно

$$P(A_1+A_2+A_3)=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3) \text{ и т.н.}$$

Пълното теоретично обосноваване на вероятностните модели изисква още други конструкции и предположения, които излизат далеч зад възможностите на това изложение.

Теорема 15.1 (***за събиране на вероятностите***). Нека A и B са събития. Тогава за тяхната сума е в сила формулата

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB).$$

Доказателство. Събитията $A-B$ и AB са несъвместими и $A=(A-B)+AB$, също така $B-A$ и BA са несъвместими и $B=(B-A)+AB$, следователно

$$P(A)=P(A-B)+P(AB) \text{ и } P(B)=P(B-A)+P(AB),$$

следователно

$$P(A-B)+P(B-A)+2P(AB)=P(A)+P(B)$$

От друга страна събитията $A-B$, $B-A$ и AB са несъвместими, следователно

$$P(A+B)=P((A-B)+(B-A)+(AB))=P(A-B)+P(B-A)+P(AB),$$

откъдето след заместване в горния израз намираме

$$P(A+B)+P(AB)=P(A)+P(B),$$

което доказва теоремата. □

В случай на три събираеми A, B и C получаваме последователно

$$P(A+B+C)=P((A+B)+C)=P(A+B)+P(C)-P((A+B)C),$$

$$P(A+B+C)=P(A)+P(B)-P(AB)+P(C)-P(AC+BC),$$

$$P(A+B+C)=P(A)+P(B)-P(AB)+P(C)-P(AC)-P(BC)+P(ACBC),$$
$$P(A+B+C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC).$$

При четири събираеми се получава формулата

$$P(A+B+C+D)=P(A)+P(B)+P(C)+P(D)-$$
$$-P(AB)-P(AC)-P(AD)-P(BC)-P(BD)-P(CD)+$$
$$+P(ABC)+P(ABD)+P(ACD)+P(BCD)-P(ABCD)$$

която добре илюстрира закономерността в обшия случай на повече събираеми.

Твърдение 15.2. Нека A_1, A_2, ..., A_m са събития. Тогава

$$P\left(\sum_{i=1}^{m} A_i\right)=\sum_{i=1}^{m} P(A_i)-\sum_{i<j} P(A_iA_j)+\sum_{i<j<k} P(A_iA_jA_k)+\cdots+(-1)^{m-1}P(A_1A_2\cdots A_m). \ \Box$$

В частния случай, когато събитията са две по две несъвместими, $A_iA_j=\varnothing$, за $i\neq j$, получаваме познатата проста формула за събиране на вероятностите при несъвместими две по две събития

$$P(A_1+A_2+\cdots+A_m)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_m).$$

Понеже A и $\overline{A}$ са несъвместими, винаги е изпълнено

$$P(A)+P(\overline{A})=P(A+\overline{A})=P(\Omega)=1,$$

следователно за вероятността на противоположното събитие имаме

$$P(\overline{A})=1-P(A).$$

При ***класическото определение за вероятност*** се разглежда опит с краен брой изходи, $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\ldots,\omega_n\}$, при което отделните елементарни изходи се приемат за равно възможни. По тази причина се полага

$$P(\omega_k)=\frac{1}{n},\ k=1,2,\ldots,n.$$

Ако $A=\{\omega_{k_1},\omega_{k_2},\ldots,\omega_{k_s}\}$ се състои от s на брой елементарни изхода, то съгласно формулата за събиране на вероятности имаме

(15.3) $$P(A)=P(\omega_{k_1})+P(\omega_{k_2})+\cdots+P(\omega_{k_s})=\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\cdots+\frac{1}{n}=\frac{s}{n}=\frac{|A|}{|\Omega|},$$

където $|A|$ означава броя на елементите на множеството A. Когато броят на елементарните изходи е безкраен, $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\ldots\}$, то различните елементарни изходи не могат да имат равни вероятности и формулата (15.3) е неприложима. Вероятностите $P(\omega_k)=p_k$, $k=1,2,\ldots$, на отделните елементарни изходи трябва да удовлетворяват условието

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_k=p_1+p_2+\cdots+p_n+\cdots=1,$$

т.е. редът с положителни членове $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ е сходящ и има сума 1. В този случай вероятността на събитието $A=\{\omega_{k_1},\omega_{k_2},\ldots\}$, което може да съдържа както краен брой така и безкраен брой елементарни изходи, се дава от формулата

(15.4) $$P(A)=\sum_{i} P(\omega_{k_i})=P(\omega_{k_1})+P(\omega_{k_2})+\cdots.$$

Вероятността на едно събитие е свързана с честотата на неговото сбъдване при последователни повторения на опита. Ако опитът се повтаря ***при едни и същи условия***, то при нарастване броя n на повторенията, се наблюдава стабилизация на относителната ***емпирична честота*** на сбъдване на дадено събитие A, която честота се определя като отношението $\frac{m}{n}$, където m е броят на наблюдаваните появи на събитието A. Този факт стои в основата на вероятностното мислене и представлява едно от най-важните оправдания за въвеждането на вероятностните модели. Например при опита с хвърляне на монета, вероятността на двете събития L="монетата показва лице" и G="монетата показва герб" преценяваме предварително като равни, $P(L) = P(G) = \frac{1}{2}$, понеже двете събития е разумно да разглеждаме като равно възможни. Това означава, че при нарастване повторенията на опитите, емпиричните честоти на двете събития трябва да се стабилизират около стойността 0.5. Ако обаче съществуват обективни причини двете събития да не са равно възможни, например ако монетата има фабричен дефект или опитите не се повтарят при едни и същи условия по независещи от експериментатора причини, то емпиричните честоти ще се стабилизират около различни от посочените във вероятностния модел стойности. Аналогична е ситуацията в опита с хвърляне на зар, когато вероятностите на различните 6 на брой елементарни изходи се оценяват предварително равни на $\frac{1}{6}$. В общия случай такива отклонения пораждат необходимостта от корекция във вероятностния модел, свързана с преоценка на разпределението на вероятностите на елементарните изходи. Всъщност една от задачите на математическата статистика се явява избор на подходящ вероятностен модел за даден опит въз основа на известен брой експериментални данни.

3. Геометрична вероятност. Последните две вероятностни схеми, при които вероятността се определя посредством формулите (15.3) и (15.4), се отнасят към ***дискретни вероятностни пространства***. Друга важна вероятностна схема се получава от идеята за ***геометрична вероятност***. Нека Ω е някакво точково множество, например ограничено измеримо равнинно множество с положително лице, $\mu(\Omega) > 0$ и нека $A \subseteq \Omega$ е негово измеримо подмножество с лице $\mu(A)$ (рис. 15.1).

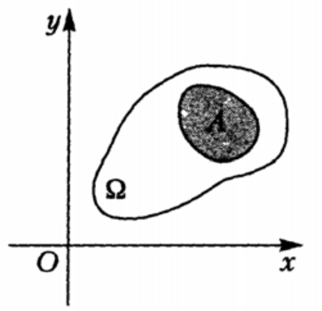

Рис. 15.1.

При геометричната вероятност се разглежда ***мислен опит*** за ***случаен избор*** на точка от множеството Ω. Нека събитието A означава случайно избраната точка да принадлежи на множеството A. Тогава следвайки принципа, заложен в (15.2), вероятността на събитието A определяме като отношението на мярката на A към мярката на Ω,

$$(15.5) \quad P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}.$$

При тази схема събитията се отъждествяват с измеримите подмножества на Ω, затова използваме едни и същи означения за множество и събитие. Лесно се съобразява, че определената по формула (15.5) вероятност удовлетворява основните изисквания (аксиоми) на вероятността. В разглеждания случай $\Omega \subset \mathrm{R}^2$ и съгласно свойствата на двойния интеграл (15.5) може да се запише във вида

$$(15.6) \quad P(A) = \frac{\iint\limits_A dxdy}{\iint\limits_\Omega dxdy}.$$

Идеята за геометрична вероятност може да се модифицира посредством въвеждане на теглова функция $f(x,y)$, която се предполага положителна и интегруема над Ω, при което (15.6) приема вида

$$P(A) = \frac{\iint\limits_A f(x,y)dxdy}{\iint\limits_\Omega f(x,y)dxdy}.$$

Схемата на геометричната вероятност работи по същия начин и когато Ω е тримерно множество или едномерно множество. Например нека $\Omega = [0,1]$, а събитието A означава случаен избор на точка от интервала $\left[\frac{1}{4}, \frac{1}{3}\right]$. Тогава

$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)} = \frac{\frac{1}{3} - \frac{1}{4}}{1-0} = \frac{1}{12}.$$

Понятието геометрична вероятност има фундаментална роля в цялата теория на вероятностите и математическата статистика. Независимо от първоначалната представа за абстрактност, геометричната вероятност има голям брой елементарни и интуитивно ясни интерпретации.

Да разгледаме например опита, известен в литературата като ***игла на Бюфон***, който се състои в следното. В равнината са начертани успоредни прави с разстояние помежду, равно на $2a$, $a > 0$. В тази равнина по случаен начин е хвърлена игла с дължина $2l$, $0 < l < a$. Събитието A се състои в това, случайно хвърлената игла да пресича някоя от успоредните прави. За да определим вероятността на A разсъждаваме по следния начин.

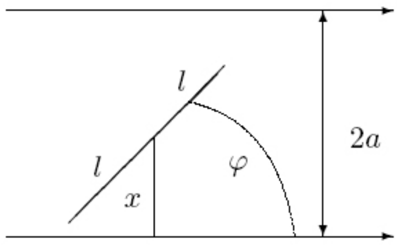

Рис. 15.2.

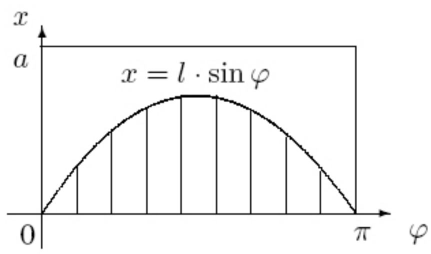

Рис. 15.3.

Възможните положения на иглата се определят от нейния център и ъгъла на завъртане (рис. 15.2) , при което тези два параметъра се менят независимо един от друг. Нека $x \in [0,a]$ представлява разстоянието от центъра на иглата до най-близката права, а φ е ъгълът, който сключва иглата с правите. Множеството от всевъзможните положения на иглата изцяло се определя от случайно избрана точка от правоъгълника $\Omega = [0,\pi] \times [0,a]$ (рис. 15.3). Иглата пресича най-близката права когато $x \le l \sin\varphi$. Лицето на множеството $A \subset \Omega$, което удовлетворява това неравенство е

$$\mu(A)=\int_0^{\pi} l\sin\varphi d\varphi = 2l\ ,$$

следователно за вероятността на A е изпълнено

$$(15.7)\quad P(A)=\frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}=\frac{2l}{a\pi}\ .$$

Формулата (15.7) открива своеобразна възможност за приблизително пресмятане на една от най-важните константи в математиката – числото π. Тази възможност предизвиква определено любопитство и поради факта, че опита с иглата на Бюфон може да бъде симулиран с помощта на компютър. Фактът, че константата π може да се оценява посредством игра на случайността показва още веднъж силата на идеята за геометрична вероятност.

4. Условна вероятност. Определено може да се твърди, че истинската теория на вероятностите започва с определянето на понятието условна вероятност. Нека при опит с елементарни изходи Ω по някакви причини е известно, че се е сбъднало събитието $B \subseteq \Omega$, $P(B)>0$. Въз основа на тази информация искаме да преценим шанса за сбъдване на някое друго събитие $A \subseteq \Omega$. Тази ситуация е илюстрирана на рис. 15.4.

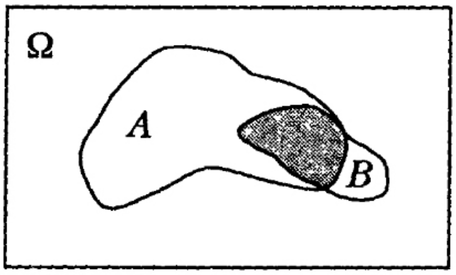

Рис. 15.4.

(1, 6)	$\boxed{(2, 6)}$	(3, 6)	(4, 6)	(5, 6)	(6, 6)
(1, 5)	(2, 5)	$\boxed{(3, 5)}$	(4, 5)	(5, 5)	(6, 5)
(1, 4)	(2, 4)	(3, 4)	$\boxed{(4, 4)}$	(5, 4)	(6, 4)
(1, 3)	(2, 3)	(3, 3)	(4, 3)	$\boxed{(5, 3)}$	(6, 3)
(1, 2)	(2, 2)	(3, 2)	(4, 2)	(5, 2)	$\boxed{(6, 2)}$
(1, 1)	(2, 1)	(3, 1)	(4, 1)	(5, 1)	(6, 1)

Рис. 15.5.

Възможността за сбъдване на събитието A се определя от общата част на A и B, т.е. от събитието, което определихме вече като произведение на събитията A и B, което геометрично се идентифицира със сечението на двете множества. По този начин, следвайки принципа на формула (15.2), ***условната вероятност*** $P(A\,|\,B)$ на събитието A при условие B се определя като отношението

$$(15.8)\quad P(A\,|\,B)=\frac{\mu(A\cap B)}{\mu(B)}=\frac{P(AB)}{P(B)}\ .$$

Тук ролята на Ω се поема от B, а събитието A се свежда до събитието AB. Непосредствено се проверява, че описаната конструкция задава вероятностен модел, при изпълнение основните свойства на вероятността. Условна вероятност не се определя, когато $P(B)=0$.

Например да разгледаме опита с хвърляне на два зара. Събитието B се определя като B="сборът от показанията е равен на 8", а събитието A се определя като A="двата зара показват едно и също число". Търсим условната вероятност $P(A\,|\,B)$. Тук всичките елементарни изходи са показани на рис. 15.5, при което елементарните изходи за събитието B са оградени. От елементарните изходи, които са благоприятни за сбъдване на събитието B, само един води до сбъдване на събитието A, следователно

$$P(A\mid B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{\frac{|A\cap B|}{|\Omega|}}{\frac{|B|}{|\Omega|}}=\frac{\frac{1}{36}}{\frac{5}{36}}=\frac{1}{5},$$

което в частност показва, че до същия извод бихме стигнали следвайки класическото определение за вероятност при опит с краен брой изходи

$$P(A\mid B)=\frac{|A\cap B|}{|B|}=\frac{1}{5}.$$

От дадените определения веднага следва верността на

Теорема 15.2 (***за умножение на вероятностите***). Нека A и B са събития, $P(B)>0$. Тогава за тяхното произведение е в сила

(15.9) $P(AB)=P(A\mid B)P(B)$. □

Например да разгледаме опит при който от дадена урна, съдържаща 4 бели и 7 черни сфери изваждаме по случаен начин две сфери. Търсим вероятността на събитието A и двете извадени сфери да бъдат бели. За да решим задачата въвеждаме двете помощни събития B ="първата извадена сфера е бяла" и C ="втората извадена сфера е бяла". По условие имаме $A=BC$, следователно от формулата за умножение на вероятностите (15.9) намираме

$$P(A)=P(BC)=P(C\mid B)P(B).$$

За вероятността на B пресмятаме по очевиден начин

$$P(B)=\frac{4}{4+7}=\frac{4}{11}.$$

Условната вероятност $P(C\mid B)$ намираме по следните съображения. След като се е случило събитието B, в урната са останали 3 бели и всичките 7 черни сфери, следователно

$$P(C\mid B)=\frac{3}{3+7}=\frac{3}{10}.$$

Сега след заместване за търсената вероятност на събитието A намираме

$$P(A)=P(C\mid B)P(B)=\frac{3}{10}\frac{4}{11}=\frac{12}{110}.$$

В случая на три събития, прилагайки последователно формулата (15.9) получаваме

$$P(ABC)=P(A\mid BC)P(BC)=P(A\mid BC)P(B\mid C)P(C).$$

За четири събития имаме

$$P(ABCD)=P(A\mid BCD)P(BCD)=P(A\mid BCD)P(B\mid CD)P(CD)=$$
$$=P(A\mid BCD)P(B\mid CD)P(C\mid D)P(D)$$

която добре илюстрира закономерността в общия случай на повече множители.

Твърдение 15.2. Нека A_1, A_2, ..., A_m са събития. Тогава

$$P\left(\prod_{k=1}^{m}A_k\right)=P(A_1)P(A_2\mid A_1)P(A_3\mid A_1A_2)\cdots P(A_n\mid A_1A_2\cdots A_{n-1}).$$ □

Да разгледаме отново примера с урна с 4 бели и 7 черни сфери, от която този път изваждаме по случаен начин три сфери. Търсим вероятността на събитието A и трите извадени сфери да бъдат бели. Сега въвеждаме три помощни събития B ="първата извадена сфера е бяла", C ="втората извадена сфера е бяла" и D ="третата извадена сфера е бяла". По условие имаме $A = BCD$, следователно общата формула за умножение на вероятностите имаме

$$P(A) = P(BCD) = P(D \mid BC)P(C \mid B)P(B).$$

Разсъждавайки по същия начин пресмятаме

$$P(B) = \frac{4}{4+7} = \frac{4}{11},\ P(C \mid B) = \frac{3}{3+7} = \frac{3}{10} \text{ и } P(D \mid BC) = \frac{2}{2+7} = \frac{2}{9},$$

следователно

$$P(A) = P(D \mid BC)P(C \mid B)P(B) = \frac{2}{9}\frac{3}{10}\frac{4}{11} = \frac{24}{990}.$$

Двете събития A и B се наричат ***независими***, когато е изпълнено

(15.10) $P(AB) = P(A)P(B)$.

Когато не е изпълнено (15.10), събитията A и B се наричат ***зависими***. Ако A и B са независими, то от (15.9) и (15.10) за условните вероятности намираме

$$P(A \mid B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{P(A)P(B)}{P(B)} = P(A) \text{ и } P(B \mid A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{P(A)P(B)}{P(A)} = P(B),$$

което показва, че условните вероятности на събитията A и B са равни на техните безусловни вероятности. С други думи обективната оценка за шанса дали ще се сбъдне едно от тези събития не зависи от факта дали се е сбъднало другото. Такава интерпретация на понятието независимост на две събития напълно съответства на интуитивния смисъл, който влагаме при ежедневната употреба на думата независимост.

Независимостта на две събития на практика означава, че те са съвместими, понеже ако A и B са несъвместими, то $P(AB) = 0$ и формулата (15.10) може да бъде вярна само когато $P(A) = 0$ или $P(B) = 0$.

Ако A и B са независими, то A и $\overline{B}$ също са независими, понеже $A = (A - B) + AB$, при което $A - B$ и AB са несъвместими, следователно

$$P(A\overline{B}) = P(A - B) = P(A) - P(AB) = P(A) - P(A)P(B) = P(A)(1 - P(B)) = P(A)P(\overline{B}).$$

Когато A и B са независими събития, то формулата за събиране на вероятностите приема вида

(15.11) $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A)P(B)$.

Да разгледаме следния пример. Двама снайперисти обстрелват независимо един от друг цел, при което вероятността първият да порази целта е равна на 0.8, а вероятността вторият да порази целта е равна на 0.9. Търсим вероятността на събитието A, след произвеждана по един изстрел от всеки снайперист, целта да бъде поразена. За да решим поставената задача въвеждаме събитията B="първият снайперист поразява целта" и C="вторият снайперист поразява целта". По условие $A = B + C$ и освен това събитията B и C се предполагат независими, следователно от формулата (15.11) намираме

$$P(A) = P(B + C) = P(B) + P(C) - P(B)P(C) = 0.8 + 0.9 - 0.8 * 0.9.$$

Понятието независимост се пренася и за случая на повече от две събития. Събитията A_1, A_2, ..., A_m се наричат ***независими по съвкупност***, когато за всяко тяхно подмножество A_{k_1}, A_{k_2}, ..., A_{k_s} е изпълнено

$$P(A_{k_1}A_{k_2}\cdots A_{k_s}) = P(A_{k_1})P(A_{k_2})\cdots P(A_{k_s}).$$

Например независимостта по съвкупност за три събития A, B и C означава, че са налице всичките равенства $P(AB) = P(A)P(B)$, $P(AC) = P(A)P(C)$, $P(BC) = P(B)P(C)$ и $P(ABC) = P(A)P(B)P(C)$. По този начин формулата за събиране на вероятностите за три независими по съвкупност събития A, B и C приема вида

$$P(A+B+C)=P(A)+P(B)+P(C)-$$
$$-P(A)P(B)-P(A)P(C)-P(B)P(C)+P(A)P(B)P(C)$$

Независимостта по съвкупност означава, че вероятността за сбъдване на кое да е от тези събития не зависи от това какво се е случило с останалите събития.

Да разгледаме следния ***пример на Бернщайн***. Даден е правилен тетраедър, едната стена на който е оцветена в бяло, втората стена е оцветена в черно, третата стена е оцветена в синьо, а на четвъртата страна са отбелязани и трите цвята – бяло, черно и синьо. Избираме по случаен начин една стена, например посредством хвърляне върху някаква плоскост и отбелязване стената, върху която е паднал тетраедърът. Разглеждаме следните събития: A="на отбелязаната стена има бял цвят", B="на отбелязаната стена има черен цвят" и C="на отбелязаната стена има син цвят". Съгласно правилата за пресмятане на вероятността имаме

$$P(A)=P(B)=P(C)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2},$$

$$P(AB)=P(AC)=P(BC)=\frac{1}{4},$$

$$P(ABC)=\frac{1}{4}.$$

Тук е налице

$$P(AB)=P(A)P(B),\ P(AC)=P(A)P(C) \text{ и } P(BC)=P(B)P(C),$$

следователно събитията A, B и C са две по две независими, обаче

$$P(ABC)=\frac{1}{4}\neq P(A)P(B)P(C)=\frac{1}{8},$$

следователно тези събития са зависими по съвкупност.