Лекция 16
§16. Формула за пълната вероятност

1. Формула за пълната вероятност и формула на Бейс. Нека H_1, H_2, ..., H_n е система от събития в пространството на елементарните изходи Ω, които са две по две несъвместими и покриват цялото Ω, което означава, че $H_i H_j = \varnothing$ при $i \neq j$, $1 \leq i, j \leq n$, и освен това

$$H_1 + H_2 + \cdots + H_n = \Omega .$$

В този случай казваме, че събитията, които се наричат още ***хипотези***, H_1, H_2, ..., H_n образуват ***пълна система от несъвместими събития***. Нека $A \subseteq \Omega$ е някакво събитие. Тогава от основните свойствата на събитията имаме

$$A = A\Omega = A(H_1 + H_2 + \cdots + H_n) = AH_1 + AH_2 + \cdots + AH_n ,$$

при което събитията AH_i и AH_j са несъвместими, $(AH_i)(AH_j) = AH_i H_j = A\varnothing = \varnothing$, при $i \neq j$. Тогава съгласно правилото за събиране на вероятности на несъвместими събития имаме

$$P(A) = P(AH_1) + P(AH_2) + \cdots + P(AH_n). \tag{16.1}$$

От друга страна съгласно правилото за умножение на вероятности е изпълнено

$$P(AH_k) = P(A \mid H_k) P(H_k), \; k = 1, 2, \ldots, n ,$$

откъдето след заместване в (16.1) получаваме

$$P(A) = P(A \mid H_1) P(H_1) + P(A \mid H_2) P(H_2) + \cdots + P(A \mid H_n) P(H_n),$$

което се нарича ***формула за пълната вероятност***.

Прилагайки отново правилото за умножение на вероятности получаваме

$$P(H_k \mid A) = \frac{P(H_k A)}{P(A)} = \frac{P(A \mid H_k) P(H_k)}{P(A)}, \; k = 1, 2, \ldots, n ,$$

откъдето въз основа на формулата за пълната вероятност намираме

$$P(H_k \mid A) = \frac{P(A \mid H_k) P(H_k)}{P(A \mid H_1) P(H_1) + P(A \mid H_2) P(H_2) + \cdots + P(A \mid H_n) P(H_n)}, \tag{16.2}$$

което се нарича ***формула на Бейс***.

Условната вероятност $P(H_k \mid A)$ се нарича още ***апостериорна*** (след опита) вероятност, докато вероятността $P(H_k)$ се нарича ***априорна*** (до опита) вероятност. Заложената идея във формулата на Бейс, има огромно значение в теорията на вероятностите и математическата статистика, понеже представлява механизъм за модификация на даден вероятностен модел на базата на известни от опита данни.

Да разгледаме например опит с три урни, първата от които съдържа 5 бели и 5 черни сфери, втората съдържа 4 бели и 6 черни сфери, а третата съдържа 3 бели и 7 черни сфери. От случайно избрана урна по случаен начин се избира една сфера. Събитието A се определя като изтеглената по този случаен начин сфера да бъде бяла. Търси се вероятността на събитието A и освен това, ако след опита е известно, че избраната сфера се е оказала бяла, да се определи вероятността въпросната сфера да е била избрана точно от третата урна. За да решим поставената задача въвеждаме събитията:

H_1="сферата е изтеглена от първата урна";

H_2="сферата е изтеглена от втората урна";

H_3="сферата е изтеглена от третата урна".

По условие изборът между трите урни е равно възможен, следователно

$$P(H_1)=P(H_2)=P(H_3)=\frac{1}{3}.$$

За условните вероятности непосредствено пресмятаме

$$P(A\,|\,H_1)=\frac{5}{5+5}=\frac{5}{10},\ P(A\,|\,H_2)=\frac{4}{4+6}=\frac{4}{10} \text{ и } P(A\,|\,H_3)=\frac{3}{3+7}=\frac{3}{10}.$$

Сега съгласно формулата за пълната вероятност (16.1) пресмятаме

$$P(A)=P(A\,|\,H_1)P(H_1)+P(A\,|\,H_2)P(H_2)+P(A\,|\,H_3)P(H_3),$$

$$P(A)=\frac{5}{10}\frac{1}{3}+\frac{4}{10}\frac{1}{3}+\frac{3}{10}\frac{1}{3}=\frac{2}{5}.$$

Във втората част от условието се търси условната вероятност $P(H_3\,|\,A)$. По формулата (16.1) на Бейс намираме

$$P(H_3\,|\,A)=\frac{P(A\,|\,H_3)P(H_3)}{P(A\,|\,H_1)P(H_1)+P(A\,|\,H_2)P(H_2)+P(A\,|\,H_3)P(H_3)},$$

$$P(H_3\,|\,A)=\frac{\frac{3}{10}\frac{1}{3}}{\frac{5}{10}\frac{1}{3}+\frac{4}{10}\frac{1}{3}+\frac{3}{10}\frac{1}{3}}=\frac{1}{4}.$$

Тук апостериорната вероятност на H_3 се оказа по-малка от априорната.

2. Схема на Бернули. В този раздел ще разглеждаме сложен опит, който се състои в известен брой независими повторения на даден единичен (прост) опит с два възможни изхода ω_0 и ω_1, които се сбъдват с вероятности съответно p и $q=1-p$, където $0<p<1$. Да означим с A събитието на сбъдване на изхода ω_0. Тогава неговото противоположно събитие $\overline{A}$ означава сбъдване на алтернативния изход ω_1. По условие $P(A)=p$ и $P(\overline{A})=P(\omega_1)=q$. Нека броят на независимите повторения е n. Описаният сложен вероятностен експеримент се нарича ***схема на Бернули***. Понякога за краткост сбъдването на събитието A в пореден опит ще наричаме ***успех***.

За удобство при описване елементарните изходи от сложния опит въвеждаме означение от вида $A\overline{A}A$, което в този случай показва серия от 3 опита в първия от които събитието A се е сбъднало, във втория опит не се е сбъднало (сбъднало се е неговото противоположно) и в третия случай отново се е сбъднало. Например $AAAA$ означава серия от 4 опита, във всеки от които събитието A се е сбъднало. При $n=1$ сложният опит не се различава от единичния. При $n=2$ имаме 4 на брой елементарни изхода, описани по-долу заедно със съответните вероятности

$$AA,\ P(AA)=P(A)P(A)=pp,$$
$$A\overline{A},\ P(A\overline{A})=P(A)P(\overline{A})=pq,$$
$$\overline{A}A,\ P(\overline{A}A)=P(\overline{A})P(A)=qp,$$
$$\overline{A}\overline{A},\ P(\overline{A}\overline{A})=P(\overline{A})P(\overline{A})=qq.$$

За пресмятането на тези вероятности използваме правилото за умножение на вероятности при независими събития. Разсъждавайки аналогично при $n=3$ намираме следните елементарни изходи с техните вероятности

$$AAA,\ P(AAA)=P(A)P(A)P(A)=ppp,$$
$$AA\overline{A},\ P(AA\overline{A})=P(A)P(A)P(\overline{A})=ppq,$$
$$A\overline{A}A,\ P(A\overline{A}A)=P(A)P(\overline{A})P(A)=pqp,$$
$$A\overline{A}\overline{A},\ P(A\overline{A}\overline{A})=P(A)P(\overline{A})P(\overline{A})=pqq,$$

$\overline{A}AA$, $P(\overline{A}AA) = P(\overline{A})P(A)P(A) = qpp$,
$\overline{A}A\overline{A}$, $P(\overline{A}A\overline{A}) = P(\overline{A})P(A)P(\overline{A}) = qpq$,
$\overline{A}\overline{A}A$, $P(\overline{A}\overline{A}A) = P(\overline{A})P(\overline{A})P(A) = qqp$,
$\overline{A}\overline{A}\overline{A}$, $P(\overline{A}\overline{A}\overline{A}) = P(\overline{A})P(\overline{A})P(\overline{A}) = qqq$.

Анализираните частни случаи добре показват основните закономерности в общия случай. Лесно се съобразява, че с всяко следващо повторение броят на елементарните изходи се удвоява, следователно броят на елементарните изходи при серия от n опита е равен на 2^n. Всичките елементарни изходи могат да се получат, ако разкрием скобите във формалното произведение

$$\left(A+\overline{A}\right)^n = \left(A+\overline{A}\right)\left(A+\overline{A}\right)\cdots\left(A+\overline{A}\right),$$

без да разместваме множителите и следователно без да групираме събираемите с еднакви степени пред A и $\overline{A}$. Съответните вероятности се получават като направим същото с произведението

(16.3) $\left(p+q\right)^n = \left(p+q\right)\left(p+q\right)\cdots\left(p+q\right)$.

Да въведем сега събитията A_k^n, които означават, че при дадената серия от n опита, събитието A се е сбъднало точно при k от случаите, $k = 0,1,2,\ldots,n$. Например за $n = 3$ и $k = 2$ събитието A_2^3 съдържа следните елементарни изходи

$$A_2^3 = \left\{AA\overline{A}, A\overline{A}A, \overline{A}AA\right\},$$

а за неговата вероятност имаме

(16.4) $P\left(A_2^3\right) = P\left(AA\overline{A}\right) + P\left(A\overline{A}A\right) + P\left(\overline{A}AA\right) = ppq + pqp + qpp = 3p^2q$.

От друга страна от познатата формула получаваме

(16.5) $\left(p+q\right)^3 = p^3 + 3p^2q + 3pq^2 + q^3$.

Вероятността $P\left(A_2^3\right)$ се оказа равна на съответното събираемо в от развитието (16.5) на бинома на Нютон от степен 3, което развитие се получава от (16.3) след групиране на събираемите с равни степени пред p и q. Това съвпадение произтича от естеството на събитието A_2^3, понеже A_2^3 събира всичките елементарни изходи, в които точно 2 пъти събитието се е сбъднало, което е степента на p във формулата (16.4) и следователно точно 1 път не се е сбъднало, колкото е степента на q в същата формула.

В случая на произволно n, формулата (16.5) има вида

(16.6) $\left(p+q\right)^n = p^n + np^{n-1}q + \dfrac{n(n-1)}{2}p^{n-2}q^2 + \cdots + \dfrac{n(n-1)}{2}p^2q^{n-2} + npq^{n-1} + q^n$.

Общият член в (16.6) се записва по формулата

$$\binom{n}{k}p^kq^{n-k},\ k = 0,1,2,\ldots,n,$$

където $\binom{n}{k}$ е познатият биномен коефициент.

При схемата на Бернули се говори за ***биномно разпределение*** на верятностите.

От направените разсъждения следва верността на

Твърдение 16.1. Вероятността $P_n(k)$ за точно k появи на събитието A в серия от n на брой независими опита е равна на

(16.7) $P_n(k) = \binom{n}{k}p^kq^{n-k}$, $k = 0,1,2,\ldots,n$. ■

Формулата (16.7) задава вероятността за броя на успехите при схемата на Бернули. Да разгледаме например серия, състояща се от 10 на брой независими хвърляния на правилна монета. Търсим вероятността на събитието A, броят на появата на лице да бъде между 4 и 6. Тук имаме схема на Бернули $n=5$ и $p=q=\dfrac{1}{2}$. По условие събитието A се състои следния сбор на три несъвместими събития

$$A=A_4^{10}+A_5^{10}+A_6^{10}.$$

Сега от формулата за вероятностите намираме

$$P(A)=P\left(A_4^{10}\right)+P\left(A_5^{10}\right)+P\left(A_6^{10}\right),$$

$$P(A)=\binom{10}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^6+\binom{10}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^5\left(\frac{1}{2}\right)^5+\binom{10}{6}\left(\frac{1}{2}\right)^6\left(\frac{1}{2}\right)^4.$$

Да предположим, че n нараства, при което $np\to\lambda$ при $n\to\infty$. Да означим $np=\lambda_n$ и да преобразуваме (16.7) последователно

$$P_n(k)=\binom{n}{k}p^kq^{n-k}=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!}\left(\frac{\lambda_n}{n}\right)^k\left(1-\frac{\lambda_n}{n}\right)^{n-k},$$

(16.8) $$P_n(k)=\frac{\lambda_n^k}{k!}\left(1-\frac{\lambda_n}{n}\right)^n\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\left(1-\frac{\lambda_n}{n}\right)^{-k}.$$

Тук k е постоянно, а $\lambda_n\to\lambda$ при $n\to\infty$. Вече сме готови да докажем

Теорема 16.1 (***Поасон***). Нека $np\to\lambda$ при $n\to\infty$. Тогава за всяко фиксирано k е изпълнено граничното съотношение

(16.9) $$P_n(k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}\to\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}\ \text{ при } n\to\infty.$$

Доказателство. Във формулата (16.8), при $n\to\infty$ имаме

$$\frac{\lambda_n^k}{k!}\to\frac{\lambda^k}{k!},\quad\left(1-\frac{\lambda_n}{n}\right)^n\to e^{-\lambda},$$

а всички останали множители клонят към 1, което доказва теоремата. ■

Освен теоремата на Поасон, за приближено пресмятане на вероятностите $P_k(n)$ може да се използва и ***локалната теорема на Моавър-Лаплас***, според която

$$P_n(k)\approx\frac{1}{\sqrt{2\pi npq}}e^{-\frac{(k-np)^2}{2npq}}.$$

Формулата (16.9) дава основание да разгледаме дискретно вероятностно пространство с безбройно много изходи ω_k, $k=0,1,2,\dots$, с вероятности $p_k=P(\omega_k)=\dfrac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$. Съгласно развитието на експоненциалната функция в ред на Маклорен, имаме

$$e^\lambda=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}=1+\lambda+\frac{\lambda^2}{2}+\frac{\lambda^3}{6}+\cdots,$$

следователно вероятностите p_0, p_1, p_2,..., удовлетворяват условието за съгласуваност

$$\sum_{k=0}^{\infty}p_k=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}=e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}=e^{-\lambda}e^{\lambda}=1.$$

Да разгледаме сега сложен опит, който се състои в серия от независими повторения на даден прост опит с два възможни изхода, както при схемата на Бернули. Тук обаче опитът се прекратява при първо сбъдване на събитието A. В този случай имаме безбройно много елементарни изходи, които по аналогия с разсъждението при схемата на Бернули, могат да се представят както следва

$\omega_1 \sim A$, $P(\omega_1) = P(A) = p$,

$\omega_2 \sim \overline{A}A$, $P(\omega_2) = P(\overline{A}A) = P(\overline{A})P(A) = qp$,

$\omega_3 \sim \overline{A}\overline{A}A$, $P(\omega_3) = P(\overline{A}\overline{A}A) = P(\overline{A})P(\overline{A})P(A) = q^2 p$,

$\omega_4 \sim \overline{A}\overline{A}\overline{A}A$, $P(\omega_4) = P(\overline{A}\overline{A}\overline{A}A) = P(\overline{A})P(\overline{A})P(\overline{A})P(A) = q^3 p$,

и т.н. За сумата от вероятностите на елементарните изходи имаме

$$P(\omega_1) + P(\omega_2) + P(\omega_3) + P(\omega_4) + \cdots = q\left(1 + p + p^2 + p^3 + \cdots\right) = q\frac{1}{1-p} = 1.$$

В този случай говорим за ***геометрично разпределение*** на вероятностите.

Например да разгледаме опита с хвърляне на зар, при който събитието A означава, че зарът показва 6. Тук отчитаме само два изхода – зарът показва 6 (събитието A се сбъдва) и зарът показва число, различно от 6 (събитието A не се сбъдва). Искаме да определим вероятността на събитието $B=$"зарът ще покаже 6 за не повече от 3 хвърляния". Тази задача ще решим посредством схемата на геометрично разпределение на вероятностите. Имаме $p = \frac{1}{6}$, $q = 1 - p = \frac{5}{6}$, а събитието B по определение се състои от елементарните изходи ω_1, ω_2 и ω_3. За вероятността на B пресмятаме

$$P(B) = P(\omega_1) + P(\omega_2) + P(\omega_3) = q\left(1 + p + p^2\right) = q\frac{1-p^3}{1-p} = 1 - p^3 = 1 - \frac{1}{6^3}$$

3. Най-вероятен брой успехи в схемата на Бернули. При всяко естествено n формулата (16.7) задава редица от вероятности $P_n(0)$, $P_n(1)$, $P_n(2)$, ..., $P_n(n)$. Определен интерес представлява въпросът коя от тези вероятности е най-голямата по стойност. За тази цел да разгледаме отношението на две последователни вероятности $P_n(k)$ и $P_n(k+1)$, $0 \le k < n$. Имаме

$$\frac{P_n(k+1)}{P_n(k)} = \frac{\binom{n}{k+1} p^{k+1} q^{n-k-1}}{\binom{n}{k} p^k q^{n-k}} = \frac{\frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!}}{\frac{n!}{k!(n-k)!}} \frac{p}{q},$$

$$\frac{P_n(k+1)}{P_n(k)} = \frac{n-k}{k+1}\frac{p}{q},$$

следователно

$$\frac{P_n(k+1)}{P_n(k)} - 1 = \frac{P_n(k+1) - P_n(k)}{P_n(k)} = \frac{n-k}{k+1}\frac{p}{q} - 1 = \frac{np - kp - kq - q}{(k+1)q},$$

(16.10) $$\frac{P_n(k+1) - P_n(k)}{P_n(k)} == \frac{np - q - k}{(k+1)q}.$$

Теорема 16.2. Ако $np - q$ не е цяло число, то най-голямата стойност на редицата $\{P_n(k)\}$ се достига при $k = m$, където m е единственото цяло число в интервала $[np - q, np + p]$. Ако $np - q$ е цяло число, то най-голямата стойност на редицата $\{P_n(k)\}$ се достига при две съседни значения на k, $k = np - q$ и $k = np + p$.

Доказателство. От равенството (16.9) получаваме, че ако $k < np - q$, то $P_n(k+1) > P_n(k)$ и ако $k > np - q$, то $P_n(k+1) < P_n(k)$. Тук са налице две възможности. **1**) Нека $np - q$ не е цяло число. Тогава нека m е единственото цяло число, което се съдържа в интервала $[np-q, np-q+1] = [np-q, np+p]$. Този интервал съдържа само едно цяло число, понеже има дължина 1 и краищата му не са цели числа. От направеното разсъждение следва, че при $k = 0,1,\ldots,m-1$, имаме $P_n(k+1) > P_n(k)$, т.е.

$$P_n(0) < P_n(1) < P_n(2) < \cdots < P_n(m-1) < P_n(m).$$

При $k = m, m+1, \ldots, n-1$ имаме $P_n(k+1) < P_n(k)$, т.е.

$$P_n(m) > P_n(m+1) > \cdots > P_n(n).$$

С други думи, редицата $\{P_n(k)\}$ расте до $k = m$, след което намалява. В този случай най-голямата стойност на $P_n(k)$ се достига за $k = m$. **2**) Нека сега $np - q$ е цяло число. Тогава интервалът $[np-q, np+p]$ съдържа точно две цели числа – неговите краища $np - q$ и $np + p$. Да положим $m = np - q$. Тогава разсъждавайки както в първия случай получаваме, че редицата $\{P_n(k)\}$ расте до $k = m$, $P_n(m) = P_n(m+1)$, след което намалява до $k = n$. В този случай поставената задача има две решения, m и $m+1$. ■

И в двата случая за най-вероятния брой успехи m имаме

$$np - q \le m \le np + p,$$

което след разделяне на n приема вида

$$p - \frac{q}{n} \le \frac{m}{n} \le p + \frac{p}{n}.$$

Последното показва, че най-вероятната емпирична честота $\frac{m}{n}$ на поява на събитието A при серия от n повторения става все по близка до вероятността p на това събитие,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{m}{n} = p.$$

Да разгледаме серия от $n = 20$ независими повторения на опит, при който събитието A се сбъдва с вероятност $p = 0.3$. Тук имаме $np - q = 20 * 0.3 - 0.7 = 5.3$, което не е цяло число. Единственото цяло число в интервала $[np-q, np+p] = [5.3, 6.3]$ е числото $m = 6$, което и дава най-вероятния брой на успехите при тази схема на Бернули.

Схемата на Бернули може да се обобщи за случая, когато единичният опит има повече от два елементарни изхода. Нека единичният опит е свързан с s на брой елементарни изходи ω_1, ω_2, ..., ω_s с вероятности p_1, p_2, ..., p_s. Нека събитието A_k означава сбъдването на изхода ω_k, $k = 1,2,\ldots,s$. Тук се поставя въпросът за вероятността при серия от n на брой независими единични опита точно k_1 пъти да се сбъдне събитието A_1, точно k_2 пъти да се сбъдне събитието A_2 и т.н. точно k_s пъти да се сбъдне събитието A_s, при което разбира се $k_1 + k_2 + \cdots + k_s = n$, $0 \le k_i \le n$, $i = 1,2,\ldots,s$. Отговорът на този въпрос се дава от формулата

$$(16.11) \quad \frac{n!}{k_1! k_2! \cdots k_s!} p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots p_s^{k_s}.$$

Лесно се вижда, че (16.7) се явява частен случай на (16.11) при $s = 2$, $p_1 = p$ и $p_2 = q$. Изразът (16.11) представлява събираемото, което се получава след разкриване на скобите и групиране на еднотипните по степен събираеми от

$$\left(p_1 + p_2 + \dots + p_s\right)^n,$$

откъдето веднага се установява, че сумата на всевъзможните вероятности (16.11) е равна на 1. В този случай говорим за ***полиномно разпределение*** на вероятностите.

Например да разгледаме серия от 10 хвърляния на зар. Търсим вероятността на събитието A, което се състои в това точно 2 пъти зарът да покаже, точно 3 пъти зарът да покаже 4 и точно 5 пъти зарът да покаже 2. Тук простият опит (еднократно хвърляне на зар) съдържа 6 на брой елементарни изхода ω_k="зарът показва k", $1 \le k \le 6$. Всеки от тях има вероятност $\omega_k = \dfrac{1}{6}$. Вероятността на събитието A ще намерим по формулата (16.11) при конфигурация на индексите $k_1 = 0$, $k_2 = 5$, $k_3 = 0$, $k_4 = 3$, $k_5 = 0$ и $k_6 = 2$. Имаме

$$P(A) = \frac{10!}{0!5!0!3!0!2!}\left(\frac{1}{6}\right)^0\left(\frac{1}{6}\right)^5\left(\frac{1}{6}\right)^0\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{1}{6}\right)^0\left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{10!}{2!3!5!}\left(\frac{1}{6}\right)^{10}.$$

4. Сведения за вероятностни пространства. Систематичното определение на вероятностните схеми води до понятието ***вероятностно пространство***. Вероятностно пространство се нарича тройката $(\Omega, \aleph, P)$, където Ω е множеството на елементарните изходи, $\aleph$ представлява съвкупността на събитията, които са някакви подмножества на Ω, а P функцията вероятност, определена за всяко събитие от $\aleph$. За съвкупността от събитията $\aleph$ да съдържа самото Ω, както и невъзможното събитие $\varnothing$ и освен това да бъде затворена относно множествените операции обединение, сечение и разлика. Такава съвкупност се нарича ***алгебра*** от събития. Ако $\aleph$ е алгебра от подмножества на Ω, то всяко обединение от краен брой елементи на $\aleph$ също представлява елемент на $\aleph$. Когато $\aleph$ съдържа всевъзможните изброими обединения на своите елементи, то $\aleph$ се нарича σ-алгебра. При вероятностните пространства се изисква съвкупността от събитията $\aleph$ да представлява σ-алгебра. Вероятността или още ***вероятностната мярка*** трябва да притежава следните аксиоматични свойства.

1) $P(A) \ge 0$ за всяко $A \in \aleph$ (***неотрицателност***).

2) $P(\Omega) = 1$ (***нормираност***);

3) $P(A + B) = P(A) + P(B)$, когато $AB = \varnothing$ (***адитивност***);

4) За всяка намаляваща редица от събития $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \dots \supseteq A_n \supseteq \dots$, за която $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \varnothing$ е изпълнено $\lim_{n\to\infty} P(A_n) = 0$ (***непрекъснатост***).

В случая на дискретни вероятностни пространства $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots\}$, с краен или безкраен брой елементарни изходи, за всеки елементарен изход задаваме по някакъв начин неговата вероятност $p_k = P(\omega_k)$. Условието за нормировка изисква сумата (крайна или безкрайна) от тези елементарни вероятности да бъде равна на 1. Тук всяко подмножество $A = \{\omega_{k_1}, \omega_{k_2}, \dots\}$ на Ω се разглежда като събитие с вероятност

$$P(A) = P(\omega_{k_1}) + P(\omega_{k_2}) + \cdots,$$

при което последната сума е безкрайна (ред с положителни членове), когато A съдържа безбройно много елементарни изходи.

Структурата на дискретните пространства позволява всяко подмножество на Ω да бъде разглеждано като събитие, при което така определената алгебра на събития представлява σ-алгебра. При схемата на геометричната вероятност обаче далеч не всяко точково подмножество на Ω може да се разглежда като събитие, поради невъзможността да се определи вероятностна мярка над толкова широк клас от множества.

Логически безупречното изграждане на вероятностно пространство за случая на схемата с геометричната вероятност води до самостоятелна задача в математическия анализ, свързана със задаване на разумен клас измерими множества и определяне на подходяща вероятност за всяко от тях при изпълнение на аксиомите за вероятност. Тази част от математиката е известна като ***теория на мярката и интеграла*** и служи за основа на различни приложения. В практически план разглеждането в качеството на събития на измерими в смисъл на Пеано-Жордан множества покрива нуждите на повечето съдържателни приложения. По тази причина ние използваме геометричната вероятност без да навлизаме във всичките споменати обстоятелства.

Може да се случи вероятността на дадено събитие A да бъде равна на нула, $P(A)=0$, при което A не се явява невъзможното събитие, $A \neq \varnothing$. Това не противоречи нито на теорията нито на практиката. От емпирична гледна точка, равенството на нула на вероятността на едно събитие A означава, че с нарастване повторенията на опита, неговата емпирична честота клони към нула. В този смисъл могат да се сбъдват и събития, които имат вероятност нула. Такива събития обаче като правило нямат съществено значение при анализа на вероятностния модел и неговите заключения.