Курсова работа по ИГМ

Решенията задължително се оформят ***ръкописно*** и се представят за проверка и защита по време на семестриалния изпит, където се провежда кратко събеседване върху решенията на отделните задачи. Отбелязаните със сиво подусловия са задължителни.

Непрекъснатост и частни производни

1. Определете дефиниционното множество на следните функции:

а) $u = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$

б) $u = \arccos \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

2. Намерете частните производни от първи и втори ред на функциите:

а) $u = x^4 + y^4 - 2x^2 y^2$

б) $u = \operatorname{tg} \dfrac{x^2}{y}$

3. Докажете, че:

а) Функцията $u = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$ удовлетворява уравнението на Лаплас

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 .$$

б) Функцията $u = \dfrac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-b)^2}{4a^2 t}}$, където $a \neq 0$ и b са константи, удовлетворява уравнението на топлопроводимостта

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} .$$

4. Намерете допирателната равнина и нормалния вектор към повърхнината:

а) $z = x^2 + y^2$ в точката $M_0(1,2,5)$.

б) $x^2 + y^2 + z^2 = 169$ в точката $M_0(3,4,12)$.

5. Докажете, че допирателните равнини към повърхнината $xyz = a^3$, $a > 0$, образуват с координатните равнини тетраедър с постоянен обем.

6. Разложете в ред на Тейлор функцията $f(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ в околност на точката $M_0(1,1,1)$.

Екстремуми

7. Намерете локалните екстремуми на следните функции:

а) $z = x^2 - xy + y^2 - 2x + y + 3$

б) $u = x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 6z + 2$

8. Намерете локалните екстремуми на неявно зададените функции $z = z(x, y)$ от съотношението

а) $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 4z - 10 = 0$

б) $x^2 + y^2 + z^2 - xz - yz + 2x + 2y + 2z - 2 = 0$

9. Намерете точките на условен екстремум за функциите:

а) $z = xy$ при условие $x + y = 1$

б) $u = x^2 + y^2 + z^2$ при условие $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$, $a, b, c > 0$.

Кратни интеграли

10. Пресметнете:

а) Интеграла

$$\iint_A x^2 y^3 dxdy$$

в областта A, получена от пресичането на линиите $y = x$ и $y = x^2$.

б) Интеграла

$$\iint_A xydxdy$$

в областта A, получена от пресичането на линиите $y = x$, $y = 2x$, $y = x^2$, $y = 4x^2$.

11. Пресметнете:

а) Интеграла

$$\iint_A \sqrt{x^2 + y^2}\, dxdy$$

в областта $A: x^2 + y^2 \le 9$.

б) Интеграла

$$\iint_A \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}\, dxdy$$

в областта $A: \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \le 1$, $a, b > 0$.

12. Пресметнете:

а) Интеграла

$$\iiint_A xyzdxdydz,$$

където A е областта, оградена от повърхнините $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

б) Интеграла

$$\iiint_A \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}}\, dxdydz,$$

където A е областта

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \le 1, \ a, b, c > 0.$$

13. Намерете лицето на частта от сферата $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, отсечена от цилиндъра $x^2 + y^2 = 1$.

14. Намерете обема на тялото, определено от условието $\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^3 \le 3xyz$.

Редове

15. Изследвайте за сходимост числовите редове:

а) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{2^n}$

б) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+1}{3n+2}\right)^n$

в) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$

16. Намерете интервала на сходимост на степенните редове:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{n^3}$

б) $\sum_{n=1}^{\infty}n\frac{(x+1)^n}{2^n}$

17. Разложете в ред на Фурие функциите:

а) $f(x)=x+\pi$ в интервала $(-\pi,\pi)$

б) $f(x)=\frac{\pi-x}{2}$ в интервала $(0,2\pi)$

в) $f(x)=x\cos x$ в интервала $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$

18. Разложете функцията $f(x)=x$ в интервала $(0,\pi)$ по синуси и по косинуси.

Обикновени диференциални уравнения

19. Намерете решение за уравнението:

а) $(1+e^x)yy'=e^x$ с начално условие $y(0)=1$

б) $y'\sin x=y\ln y$ с начално условие $y\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$.

20. Решете уравненията

а) $y'-\frac{y}{x}=x$

б) $y'=y\operatorname{tg}x+\frac{1}{\cos x}$

21. Решете уравненията

а) $y''+y=\operatorname{cotg}x$

б) $y''-2y'+y=\frac{e^x}{x}$

22. Решете уравненията

а) $y'''-y=x^3-1$

б) $y'''+y''+y'+y=xe^x$

Теория на вероятностите

23. Монета се хвърля пет пъти. Намерете вероятността да се падне:

а) пет пъти герб

б) поне два пъти герб

24. Урна съдържа 8 бели и 12 черни сфери. Изваждат се последователно две сфери. Намерете вероятността:

а) и двете сфери да бъдат бели

б) двете сфери да бъдат с различен цвят

25. Двама стрелци поразяват цел с вероятности съответно 0.8 и 0.9. Двамата независимо един от друг произвеждат по един изстрел. Намерете вероятността целта да бъде поразена поне с един изстрел.

26. Дадени са три урни, при което първата съдържа 5 бели и 3 черни сфери, втората съдържа 2 бели и 5 черни сфери, а третата съдържа 7 бели и 2 черни сфери. От случайно избрана урна по случаен начин е избрана една сфера.

а) Да се намери вероятността избраната сфера да бъде бяла.

б) Ако е известно, че избраната сфера се е оказала бяла, да се определи вероятността тя да е била избрана от втората урна.

27. Случайната величина X има нормално разпределение със средно $\mu = 5$ и дисперсия $\sigma^2 = 100$. Да се намери вероятността величината X да бъде в интервала $(20,50)$.

28. Случайните величини X и Y имат следната таблица на съвместно разпределение

X \ Y	20	40	60
10	0.15	0.05	0
20	0.1	0.2	0.1
30	0.05	0.1	0.25

Намерете:

а) Математическите очаквания и дисперсиите на X и Y

б) Коефициента на линейна корелация между X и Y

29. Проведена е серия от 100 подхвърляния на правилна монета. Намерете вероятността:

а) Броят на показанията "герб" да бъде между 40 и 60

б) Броят на попаденията "герб" да бъде поне 30.

Операционно смятане

30. Намерете образите на следните функции:

а) $3t^2e^{-t} + 2t^2 - 1$

б) $2\sin 2t + 3e^t - 2t$

31. Намерете оригиналите на следните функции:

а) $\dfrac{1}{p^2 + 2p}$

б) $\dfrac{3p-1}{p^2 - 4p + 7}$

32. Решете следните уравнения при указаните начални условия:

а) $y''' + 4y' = 1$, $y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$

б) $y'' - 4y' + y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$

33. Решете следните системи:

а) $\left|\begin{array}{l} x' - x - y = e^t \\ y' + x - y = 0 \end{array}\right.$, $x(0) = 0$, $y(0) = 1$

б) $\left|\begin{array}{c} x' + y' - y = e^t \\ 2x' + y' + 2y = \cos t \end{array}\right.$, $x(0) = 0$, $y(0) = 0$

Функция на комплексна променлива

34. Намерете всичките стойности на:

а) i^i

б) $\ln(1+i)$

35. Пресметнете интегралите по указаните контури

а) $\int\limits_{\gamma} \frac{zdz}{(z-1)(z^2+1)}$, $\gamma : |z-1| = 1$

б) $\int\limits_{\gamma} \frac{e^z dz}{z^2+1}$, $\gamma : |z| = 3$

36. Пресметнете следните несобствени интеграли:

а) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^3}$

б) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x}{x^2+1} dx$

37. Пресметнете интегралите:

а) $\int\limits_{0}^{2\pi} \frac{dx}{a+\cos x}$, $a > 1$

б) $\int\limits_{0}^{2\pi} \frac{dx}{1-2a\cos x+a^2}$, $0 < a < 1$