Лекция 4

§4. Системи линейни уравнения

1. Ранг на матрица. Теорема за базисния минор. Нека A е $(m\times n)$ матрица. Детерминантата, която се получава от пресичането на някои k на брой редове с номера i_1, i_2, ..., i_k $(i_1<i_2<\cdots<i_k)$ с някои k на брой стълбове с номера j_1, j_2, ..., j_k $(j_1<j_2<\cdots<j_k)$ се нарича ***минор от k-ти ред*** и се бележи с $m_{j_1 j_2\dots j_k}^{i_1 i_2\dots i_k}$. Редът на даден минор не надвишава както броя на редовете на A така и броя на стълбовете, $1\le k\le \min(m,n)$. Например за

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 & 3\\ 4 & -2 & 5 & 1 & 2\\ 0 & 3 & 1 & -1 & 4\\ 5 & -7 & 3 & 2 & 1\end{pmatrix}$$

имаме

$$m_{2,3}^{1,2}=\begin{vmatrix} 1 & 0\\ -2 & 5\end{vmatrix}=5,\ m_{2,3,4}^{3,4,5}=\begin{vmatrix} 5 & 1 & 2\\ 1 & -1 & 4\\ 3 & 2 & 1\end{vmatrix}=-24 \text{ и т.н.}$$

Аналогично се определя минор на детерминанта. Например за детерминантата

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 4\\ -1 & 1 & 0 & 2\\ 5 & 3 & -2 & 7\\ 3 & 2 & -5 & 2\end{vmatrix}$$

имаме

$$m_{2,3}^{2,3}=\begin{vmatrix} 1 & 0\\ 3 & -2\end{vmatrix}=-2\,.$$

За всеки минор $m_{j_1 j_2\dots j_k}^{i_1 i_2\dots i_k}$, $k<n$, на дадена детерминанта от ред n, както и за всяка квадратна матрица от ред n, може да се пресметне неговия ***допълнителен минор*** $M_{j_1 j_2\dots j_k}^{i_1 i_2\dots i_k}$ от ред $n-k$, получен от пресичането на останалите редове и стълбове. Например за детерминантата от последния пример имаме

$$M_{3,2}^{3,2}=\begin{vmatrix} 2 & 4\\ 3 & 2\end{vmatrix}=-8\,.$$

Минорите от първи ред са самите елементи на матрицата (детерминантата), $m_j^i=a_{ij}$. Допълнителният минор за детерминанта D от ред n е съответната поддетерминанта, $M_j^i=D_{ij}$, а числото

$$A_{j_1 j_2\dots j_k}^{i_1 i_2\dots i_k}=(-1)^{i_1+i_2+\dots+i_k+j_1+j_2+\dots+j_k}M_{j_1 j_2\dots j_k}^{i_1 i_2\dots i_k}$$

се нарича ***адюнгирано количество*** (алгебрично допълнение) на минора $m_{j_1 j_2\dots j_k}^{i_1 i_2\dots i_k}$. При $k=1$ имаме $A_j^i=(-1)^{i+j}M_j^i=(-1)^{i+j}D_{ij}=A_{ij}$, където A_{ij} е въведеното преди адюнгирано количество на елемента a_{ij}.

Ако за дадена матрица всичките минори от някой ред k са равни на нула, то и всичките минори от ред $k+1$ и по-висок ред (ако има такива) също са равни на нула, понеже всеки минор от ред $k+1$ можем да пресметнем чрез развитие по адюнгираните количества на някой негов ред или стълб, които адюнгирани количества по условие са равни на нула.

Нека A е ненулева $(m\times n)$ матрица. Казва се, че матрицата A има ранг r, когато A притежава минор от ред r, който е различен от нула и всеки минор от по-висок ред (ако има такива) е равен на нула. Рангът на матрицата се означава с $r(A)$, $(r(A)=r)$. Ако A е нулева матрица, то по определение $r(A)=0$.

От определението следва, че ако A е $(m\times n)$ матрица, то $0\le r(A)\le \min(m,n)$, при което $r(A)=0$, единствено когато $A=\mathbf{0}$.

Ако A притежава различен от нула минор от някакъв ред k, то $r(A)\ge k$. За да определим ранга на A, трябва да намерим различен от нула минор от възможно най-висок ред, който ред всъщност съвпада с ранга на матрицата A. Ако A е матрица с ранг $r(A)\ge 2$, то A притежава различен от нула минор от всеки ред k, $1\le k\le r(A)-1$.

Например матрицата

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & 3\\ 2 & 1 & 0 & 5\\ 2 & 4 & -2 & 6\end{pmatrix}$$

има ранг $r(A)=2$, понеже

$$m_{1,2}^{1,2}=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{vmatrix}=-3\ne 0$$

и всеки минор от ред 3 (те са 4 на брой) е равен на нула.

Твърдение 4.1. Нека A е квадратна матрица от ред n. Тогава $r(A)\le n$, при което $r(A)=n$ тогава и само тогава, когато $\det A\ne 0$, следователно $\det A=0$ тогава и само тогава, когато $r(A)<n$.

Доказателство. Очевидно $r(A)\le n$. Нека $r(A)=n$. Съгласно определението A притежава различен от нула минор от ред n, но единственият минор от ред n е $\det A$, следователно $\det A\ne 0$. Ако пък $\det A\ne 0$, то по определение $r(A)=n$, тъй като A не притежава минори от по-висок ред. ■

Рангът на матрица притежава следните основни свойства.

Свойство 1. Рангът се запазва при транспониране, $r(A)=r(A^T)$.

Верността на това свойство следва от факта, че ако A има различен от нула минор $m_{j_1 j_2\cdots j_k}^{i_1 i_2\cdots i_k}\ne 0$, то A^T има различен от нула минор от същия ред $m_{i_1 i_2\cdots i_k}^{j_1 j_2\cdots j_k}\ne 0$ и обратно. Тогава съгласно определението $r(A)\le r(A^T)$ и $r(A^T)\le r(A)$, следователно $r(A^T)=r(A)$. Този начин на разсъждение ще приложим и при доказване на другите свойства на ранга.

Свойство 2. Рангът на матрицата A не се променя ако сменим местата на два реда или на два стълба.

Да означим с $\hat{A}$ преобразуваната по този начин матрица. Предполагаме, че A не е нулева матрица, иначе няма какво да се доказва. Тогава A има някакъв минор $\mathbf{m}$ от ред $r(A)$, който е различен от нула, $\mathbf{m}\ne 0$. В преобразуваната матрица $\hat{A}$, на минора $\mathbf{m}$ съответства минор $\hat{\mathbf{m}}=(-1)\mathbf{m}\ne 0$, следователно $r(\hat{A})\ge r(A)$. Това преобразуване е обратимо, следователно разсъждавайки по същия начин получаваме, че $r(A)\ge r(\hat{A})$, следователно $r(\hat{A})=r(A)$.

Свойство 3. Рангът на матрицата A не се променя ако умножим един ред или един стълб с число λ различно от нула.

Да означим с $\hat{A}$ преобразуваната по този начин матрица ($A \neq \mathbf{0}$). Тогава A има някакъв минор $\mathbf{m}$ от ред $r(A)$, който е различен от нула, $\mathbf{m} \neq 0$. Ако сме умножили ред или стълб, който участва в образуването на $\mathbf{m}$, то в преобразуваната матрица $\hat{A}$, на минора $\mathbf{m}$ съответства минор $\hat{\mathbf{m}} = \lambda\mathbf{m} \neq 0$. Ако сме умножили ред или стълб, който не участва в образуването на $\mathbf{m}$, то в преобразуваната матрица $\hat{A}$, на минора $\mathbf{m}$ съответства същия минор $\hat{\mathbf{m}} = \mathbf{m} \neq 0$, следователно и в двата случая $r(\hat{A}) \geq r(A)$. Това преобразуване е обратимо, следователно разсъждавайки по същия начин получаваме, че $r(A) \geq r(\hat{A})$, следователно $r(\hat{A}) = r(A)$.

Аналогично се установява, че ако $\lambda \neq 0$, то $r(\lambda A) = r(A)$.

Свойство 4. Рангът на матрицата A не се променя, ако към един ред (стълб) прибавим друг ред (стълб), умножен с някакво число.

Ако матрицата A е нулева, то няма какво да се доказва, затова ще предполагаме $r(A) = r \geq 1$. Ще докажем свойството за само случая на преобразуване по редове понеже в случая на преобразуване по стълбове доказателството е аналогично. Отначало ще отбележим, че верността на това свойство не се променя, ако пренаредим редовете и стълбовете на матрицата A, затова без ограничение на общността можем да предполагаме (за улеснение), че главният минор $\mathbf{m} = m_{1,2,\ldots,r}^{1,2,\ldots,r}$ на A от ред $r(A) = r$ е различен от нула, $\mathbf{m} \neq 0$. Нека $\hat{A}$ е преобразуваната по този начин матрица. Ще докажем, че $r(\hat{A}) \geq r$. Да означим редовете на матрицата с $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, ..., $\mathbf{a}_m$ и да предположим, че $\hat{A}$ се получава като умножим реда $\mathbf{a}_q$ с числото $\lambda \neq 0$ и го прибавим към реда $\mathbf{a}_p$, т.е. $\hat{\mathbf{a}}_p = \mathbf{a}_p + \lambda\mathbf{a}_q$, а другите редове се запазват. Да разгледаме два случая.

1) Преобразуването е в рамките на главния минор $\mathbf{m}$, т.е. $q \leq r$ и $p \leq r$. Тогава съгласно основните свойства на детерминантите, стойността на главния минор не се променя, следователно $\hat{\mathbf{m}} = \mathbf{m} \neq 0$ и $r(\hat{A}) \geq r$. Ако $q \leq r$ и $p > r$ (в случай, че изобщо съществуват други редове), то главният минор се запазва в същия вид, следователно отново $\hat{\mathbf{m}} = \mathbf{m} \neq 0$ и $r(\hat{A}) \geq r$.

2) Тук ще предполагаме, че $q > r$, т.е. редът който се умножава с λ и се прибавя е извън главния минор (ако има такива редове). Ако $p > r$, то главният минор се запазва в същия вид, следователно $\hat{\mathbf{m}} = \mathbf{m} \neq 0$ и $r(\hat{A}) \geq r$. Остава да разгледаме само случая, когато $p < r$. Тогава

$$\mathbf{m} = \det\begin{pmatrix} \vdots \\ \mathbf{a}_p \\ \vdots \end{pmatrix} \neq 0 \text{ (по условие)}$$

и

$$\hat{\mathbf{m}} = \det\begin{pmatrix} \vdots \\ \hat{\mathbf{a}}_p \\ \vdots \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} \vdots \\ \mathbf{a}_p + \lambda\mathbf{a}_q \\ \vdots \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} \vdots \\ \mathbf{a}_p \\ \vdots \end{pmatrix} + \lambda\det\begin{pmatrix} \vdots \\ \mathbf{a}_q \\ \vdots \end{pmatrix} = \mathbf{m} + \lambda\hat{\mathbf{m}}_1 .$$

Ако $\hat{\mathbf{m}} \neq 0$, то $r(\hat{A}) \geq r$. Ако $\hat{\mathbf{m}} = 0$, то от последното равенство получаваме, че

$$\hat{\mathbf{m}}_1 = -\frac{\mathbf{m}}{\lambda} \neq 0,$$

което отново води до същото заключение, че $r(\hat{A}) \geq r(A)$.

Преобразуването на матрицата от свойство 4 е обратимо, следователно разсъждавайки по същия начин можем да установим, че $r(A) \geq r(\hat{A})$, което означава, че е налице равенството $r(A) = r(\hat{A})$.

Да разгледаме следните елементарни преобразувания, които съгласно горните свойства ***запазват ранга*** на матрицата.

P1) Смяна местата на два реда или на два стълба.

P2) Умножаване на един ред (стълб) с число и прибавянето му към друг ред (стълб).

P3) Умножаване на даден ред (стълб) с число, различно от нула.

Непосредствено се съобразява, че с помощта на тези преобразувания всяка матрица A може да се приведе към форма, в която по главния диагонал донякъде има единици, а на всички останали места нули. Такава форма ще наричаме ***канонична форма*** относно ранга. Например тази канонична форма може да бъде във вида

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ и т.н.}$$

В този случай очевидно рангът на A е равен на броя на единиците по главния диагонал. По този начин получихме практически способ за намиране ранга на дадена матрица въз основа на елементарните преобразувания **P1**, **P2** и **P3**.

Нека A ненулева $(m \times n)$ матрица. Тогава $r(A) \geq 1$ и матрицата A притежава различни от нула минори от ред $r = r(A)$. Всеки такъв минор $m_{j_1 j_2 \cdots j_r}^{i_1 i_2 \cdots i_r} \neq 0$ се нарича ***базисен минор***. В общия случай A може да има повече от един базисен минор.

Казва се, че елементът e е ***линейна комбинация*** на елементите e_1, e_2, ..., e_s, когато $e = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \cdots + \lambda_s e_s$, за някои числа λ_1, λ_2, ..., λ_s. Тези елементи могат да имат различна природа. Например матрици от един и същи тип, в частност вектор-редове или вектор-стълбове от еднакъв тип.

Следващата теорема пояснява значението на главните минори.

Теорема 4.1 *(за базисния минор).* Нека $r(A) = r \geq 1$ и $m_{j_1 j_2 \cdots j_r}^{i_1 i_2 \cdots i_r} \neq 0$ е някакъв (кой да е) базисен минор. Тогава всеки ред (стълб) може да се представи като линейна комбинация на редовете (стълбовете) на този базисен минор.

Доказателство. Както при свойство 4, ще докажем теоремата за само случая на преобразуване по редове понеже в случая на преобразуване по стълбове доказателството е аналогично и отново ще отбележим, че верността на твърдението което доказваме не се променя, ако пренаредим редовете и стълбовете на матрицата A. Затова без ограничение на общността можем да предполагаме, че въпросният базисен минор е главният минор $\mathbf{m} = m_{1,2,\ldots,r}^{1,2,\ldots,r}$ на A от ред $r(A) = r$, $\mathbf{m} \neq 0$. Да означим отново редовете на матрицата A с $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, ..., $\mathbf{a}_m$. Всеки базисен ред се представя по очевиден начин като линейна комбинация на базисните редове, например

$$\mathbf{a}_1 = 1.\mathbf{a}_1 + 0.\mathbf{a}_2 + \cdots + 0.\mathbf{a}_r,$$

затова ще предполагаме, че $r = r(A) < m$, т.е. че в матрицата има и редове, които не участват в базисния минор $\mathbf{m}$, понеже в противен случай няма какво да се доказва.

При направените предположения, да разгледаме следните обратими елементарни преобразувания.

БМ1) *Смяна местата на два **базисни** реда или на два **базисни** стълба.* Както вече отбелязахме това действие не променя верността на теоремата.

БМ2) *Умножаване на даден **базисен** ред (стълб) с число, различно от нула.* Това действие очевидно не променя верността на теоремата.

БМ3) *Умножаване на един **базисен** ред (стълб) с число и прибавянето му към друг ред (стълб).* Нека базисния ред $\mathbf{a}_q$, $q \le r$, е умножен с числото λ и е прибавен към ред $\mathbf{a}_p$, $r < p \le m$. Тогава в преобразуваната матрица $\hat{A}$ имаме $\hat{\mathbf{a}}_p = \mathbf{a}_p + \lambda \mathbf{a}_q$,а всички други редове се запазват същите. Ако при матрицата A редът $\mathbf{a}_p$ е линейна комбинация на базисните редове

$$\mathbf{a}_p = \lambda_1 \mathbf{a}_1 + \cdots + \lambda_2 \mathbf{a}_2 + \cdots + \lambda_r \mathbf{a}_r,$$

то в преобразуваната матрица $\hat{A}$ редът $\hat{\mathbf{a}}_p$ също е линейна комбинация на базисните редове, понеже

$$\hat{\mathbf{a}}_p = \mathbf{a}_p + \lambda \mathbf{a}_q = \lambda_1 \mathbf{a}_1 + \cdots + (\lambda_q + \lambda) \mathbf{a}_q + \cdots + \lambda_r \mathbf{a}_r$$

и обратно, ако в преобразуваната матрица $\hat{A}$ редът $\hat{\mathbf{a}}_p$ е линейна комбинация на базисните редове

$$\hat{\mathbf{a}}_p = \lambda_1 \mathbf{a}_1 + \cdots + \lambda_2 \mathbf{a}_2 + \cdots + \lambda_r \mathbf{a}_r,$$

то в матрицата A редът $\mathbf{a}_p$ също е линейна комбинация на базисните редове, понеже

$$\mathbf{a}_p = \hat{\mathbf{a}}_p - \lambda \mathbf{a}_q = \lambda_1 \mathbf{a}_1 + \cdots + (\lambda_q - \lambda) \mathbf{a}_q + \cdots + \lambda_r \mathbf{a}_r.$$

По този начин доказахме, че това действие също не променя верността на теоремата.

Доказателството на теорема 4.1 се състои в последователно прилагане на елементарните преобразувания **БМ1**, **БМ2** и **БМ3**, докато нейната истинност стане очевидна върху преобразуваната матрица.

Непосредствено се съобразява, че с помощта на елементарните преобразувания **БМ1**, **БМ2** и **БМ3** матрицата A може да бъде приведена във следната форма

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} E_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & B \end{pmatrix}, \text{ когато } r < n, \text{ и } \hat{A} = \begin{pmatrix} E_r \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}, \text{ когато } r = n.$$

където E_r е единичната матрица от ред r, а в горния десен и долния ляв ъгъл има само нули. Тук B, за случая $r < n$, е матрица от тип $(m-r, n-r)$, за която ще се убедим, че трябва да съдържа само нули. Наистина, ако B съдържа ненулев елемент $a_{pq} \ne 0$, $p > r$, $q > r$, то в $\hat{A}$ можем да намерим различен от нула минор от ред $r+1$

$$\hat{\mathbf{m}} = m_{1,\dots,r,q}^{1,\dots,r,p} = \begin{vmatrix} 1 & \vdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_{pq} \end{vmatrix} = a_{pq} \ne 0,$$

което ни води до заключението, че $r(\hat{A}) \ge r+1$. Този извод обаче е противоречие, понеже елементарните преобразувания **БМ1**, **БМ2** и **БМ3** не променят ранга на матрицата A и по тази причина $r(\hat{A}) = r(A) = r$. Следователно, в случая когато $r < n$, $\hat{A}$ има вида

$$\hat{A}=\begin{pmatrix} E_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}.$$

В матрицата $\hat{A}$ обаче всеки небазисен ред е нулев и се представя по очевиден начин като нулева линейна комбинация на базисните редове. С това теоремата за базисния минор е доказана. ■

Теорема 4.1 има следното полезно следствие.

Твърдение 4.2. Нека A е квадратна матрица от ред n. В такъв случай $\det A = 0$ тогава и само тогава, когато някой ред (стълб) може да се представи като линейна комбинация на останалите редове (стълбове).

Доказателство. Съгласно твърдение 4.1, $\det A = 0$ тогава и само тогава, когато $r = r(A) < n$. Нека $m_{j_1 j_2 \dots j_r}^{i_1 i_2 \dots i_r} \neq 0$ е някакъв базисен минор. Условието $r < n$ означава, че матрицата A притежава и небазисни редове, а всеки такъв ред, според теоремата за базисния минор, е линейна комбинация на базисните редове. ■

2. Системи линейни уравнения. Теорема на Кронекер-Капели. Да разгледаме системата от m на брой линейни уравнения с n на брой неизвестни x_1, x_2, ..., x_n

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots& \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned} \tag{4.1}$$

Под решене на тази система се разбира всяка наредена съвкупност от n на брой числа, които след заместване в неизвестните удовлетворяват всичките уравнения на системата. Системата (4.1) се нарича ***хомогенна***, когато всичките свободни коефициенти b_1, b_2, ..., b_m са равни на нула. Матрицата

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

се нарича ***основна матрица*** от коефициентите на системата (4.1). Навсякъде по-нататък ще предполагаме, че A не е нулева матрица, $r(A) \geq 1$, понеже разсъжденията когато $r(A) = 0$ са тривиални.

Системата линейни уравнения (4.1) се нарича ***съвместима***, ако има поне едно решение, в противен случай се нарича ***несъвместима***. Една съвместима система се нарича ***определена***, когато решението е единствено и ***неопределена*** в противен случай.

В раздела за формули на Крамер разгледахме частния случай, когато $m = n$ и получихме формули за намиране на решението, когато детерминантата на основната матрица A е различна от нула, $\det A \neq 0$. Сега ще разгледаме общия случай, при който е възможно броят на уравненията да бъде различен от броя на неизвестните, а също така и когато $\det A = 0$ при $m = n$.

За улеснение при доказателството на основните свойства на системата (4.1) да въведем за уравненията означения $\mathbf{eqn}(k) \equiv a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \cdots + a_{kn}x_n - b_k$, $k - 1,2,\dots,n$. Тогава системата (4.2) може да се запише във вида

$$S:\left|\begin{array}{l}\mathbf{eqn}(1)=0\\ \mathbf{eqn}(2)=0\\ \quad\vdots\\ \mathbf{eqn}(m)=0\end{array}\right.$$

Свойство 1. Ако сменим местата на две уравнения, то множеството от решенията не се променя.

Без ограничение на общността можем да предполагаме, че сме сменили местата на първите две уравнения. Тогава преобразуваната система има вида

$$\hat{S}:\left|\begin{array}{l}\mathbf{eqn}(2)=0\\ \mathbf{eqn}(1)=0\\ \quad\vdots\\ \mathbf{eqn}(m)=0\end{array}\right.$$

Двете системи S и $\hat{S}$ очевидно имат еди и същи решения.

Свойство 2. Ако умножим едно уравнение с число $\lambda \neq 0$, то множеството от решенията не се променя.

Без ограничение на общността можем да предполагаме, че сме умножили първото уравнение. Тогава преобразуваната система има вида

$$\hat{S}:\left|\begin{array}{l}\lambda\mathbf{eqn}(1)=0\\ \mathbf{eqn}(2)=0\\ \quad\vdots\\ \mathbf{eqn}(m)=0\end{array}\right.$$

при което очевидно числата x_1, x_2, ..., x_n образуват решение на системата S тогава и само тогава, когато образуват решение и на системата $\hat{S}$, понеже равенството $\lambda\mathbf{eqn}(1)=0$, при $\lambda \neq 0$ е еквивалентно на $\mathbf{eqn}(1)=0$.

Свойство 3. Ако умножим едно уравнение с число и го прибавим към друго уравнение, то множеството от решенията не се променя.

Без ограничение на общността можем да предполагаме, че сме умножили първото уравнение по числото λ и сме го прибавили към второто. Тогава преобразуваната система има вида

$$\hat{S}:\left|\begin{array}{c}\mathbf{eqn}(1)=0\\ \mathbf{eqn}(2)+\lambda\mathbf{eqn}(1)=0\\ \vdots\\ \mathbf{eqn}(m)=0\end{array}\right.$$

Нека числата x_1, x_2, ..., x_n образуват решение на системата S. Тогава те образуват решение и на системата $\hat{S}$, понеже от $\mathbf{eqn}(1)=\mathbf{eqn}(2)=0$ следва $\mathbf{eqn}(2)+\lambda\mathbf{eqn}(2)=0$. Обратно, нека x_1, x_2, ..., x_n образуват решение на преобразуваната система $\hat{S}$. Тогава от $\mathbf{eqn}(1)=0$ $\mathbf{eqn}(2)+\lambda\mathbf{eqn}(2)=0$ следва, че $\mathbf{eqn}(2)=0$, следователно тези числа образуват решение и на системата S.

Свойство 4. Ако пренаредим неизвестните на системата S, то структурата на решенията не се променя. Ако познаваме решенията на преобразуваната система, то лесно можем да получим решенията на изходната система.

Въз основа на тези свойства може да формулираме следните елементарни преобразувания, които не променят решенията или тяхната структура, ако се наложи да се използва свойство 4.

ЛС1) Смяна местата на две уравнения.

ЛС2) Умножаване на дадено уравнение с число, различно от нула.

ЛС3) Умножаване на едно уравнение с число и прибавянето му към друго уравнение.

ЛС4) Пренареждане на неизвестните.

Решаването на системата линейни уравнения се свежда до последователно прилагане на горните елементарни преобразувания докато се превърне в система, която се решава непосредствено.

Всички тези действия могат да бъдат извършени върху разширената матрица на системата $\widetilde{A}$, която представлява $(m\times(n+1))$ матрица,

$$\widetilde{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & | & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & | & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & | & b_m \end{pmatrix},$$

получена от основната след присъединяване на последно място на стълба на свободните коефициенти. Преобразуванията **ЛС1**, **ЛС2** и **ЛС3** се извършват по съответен начин върху редовете на разширената матрица, а **ЛС4** се извършва чрез разместване стълбовете в рамките на основната матрица.

Да разгледаме матрицата $\widetilde{A}$. В рамките на основната матрица съществува някакъв базисен минор. Посредством **ЛС1** и **ЛС4** можем да преобразуваме $\widetilde{A}$ във вид, в който този базисен минор е главният минор от ред $r=r(A)$, след което чрез **ЛС1, ЛС2** и **ЛС3**, разсъждавайки аналогично както при теоремата за базисния минор, да приведем разширената матрица в една от следните четири форми.

$$(4.2)\qquad \hat{\widetilde{A}}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \hat{a}_{1,r+1} & \cdots & \hat{a}_{1n} & | & \hat{b}_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \hat{a}_{2,r+1} & \cdots & \hat{a}_{2n} & | & \hat{b}_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \hat{a}_{r,r+1} & \cdots & \hat{a}_{rn} & | & \hat{b}_r \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & | & \hat{b}_{r+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & | & \hat{b}_m \end{pmatrix}, \text{ за случая } r<m \text{ и } r<n,$$

на който съответства преобразуваната система

$$\begin{array}{cccccccccc} \hat{x}_1 & & & & +\hat{a}_{1,r+1}\hat{x}_{r+1}+ & \cdots & +\hat{a}_{1n}\hat{x}_n & = & \hat{b}_1 \\ & \hat{x}_2 & & & +\hat{a}_{2,r+1}\hat{x}_{r+1}+ & \cdots & +\hat{a}_{2n}\hat{x}_n & = & \hat{b}_2 \\ & & & & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & & \hat{x}_r & +\hat{a}_{r,r+1}\hat{x}_{r+1}+ & \cdots & +\hat{a}_{rn}\hat{x}_n & = & \hat{b}_r \\ & & & & & & 0 & = & \hat{b}_{r+1} \\ & & & & & & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & & & & & 0 & = & \hat{b}_m \end{array},$$

където $\hat{x}_1$, $\hat{x}_2$, ..., $\hat{x}_n$ са някаква пермутация на изходните неизвестни x_1, x_2, ..., x_n, която се е получила, ако е било прилагано преобразуването **ЛС4**. В общия случай се препоръчва при възможност **ЛС4** да се избягва от употреба.

$$(4.3)\qquad \tilde{\hat{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & | & \hat{b}_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & | & \hat{b}_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & | & \hat{b}_r \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & | & \hat{b}_{r+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & | & \hat{b}_m \end{pmatrix}, \text{ за случая } r < m \text{ и } r = n,$$

на който съответства преобразуваната система

$$\begin{array}{cccccc} \hat{x}_1 & & & = & \hat{b}_1 \\ & \hat{x}_2 & & = & \hat{b}_2 \\ & & & \cdots & \cdots \\ & & \hat{x}_r & = & \hat{b}_r \\ & & 0 & = & \hat{b}_{r+1} \\ & & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & 0 & = & \hat{b}_m \end{array} .$$

$$(4.4)\qquad \tilde{\hat{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \hat{a}_{1,r+1} & \cdots & \hat{a}_{1n} & | & \hat{b}_1 \\ 0 & 1 & \ddots & 0 & \hat{a}_{2,r+1} & \cdots & \hat{a}_{2n} & | & \hat{b}_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \hat{a}_{r,r+1} & \cdots & \hat{a}_{r,r+1} & | & \hat{b}_m \end{pmatrix}, \text{ за случая } r = m \text{ и } r < n,$$

на който съответства преобразуваната система

$$\begin{array}{cccccccc} \hat{x}_1 & & & +\hat{a}_{1,r+1}\hat{x}_{r+1}+ & \cdots & +\hat{a}_{1n}\hat{x}_n & = & \hat{b}_1 \\ & \hat{x}_2 & & +\hat{a}_{2,r+1}\hat{x}_{r+1}+ & \cdots & +\hat{a}_{2n}\hat{x}_n & = & \hat{b}_2 \\ & & & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & \hat{x}_r & +\hat{a}_{r,r+1}\hat{x}_{r+1}+ & \cdots & +\hat{a}_{r,r+1}\hat{x}_n & = & \hat{b}_m \end{array} .$$

$$(4.5)\qquad \tilde{\hat{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & | & \hat{b}_1 \\ 0 & 1 & \ddots & 0 & | & \hat{b}_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & | & \hat{b}_r \end{pmatrix}, \text{ за случая } r = m = n,$$

на който съответства преобразуваната система

$$\begin{array}{ccccc} \hat{x}_1 & & & = & \hat{b}_1 \\ & \hat{x}_2 & & = & \hat{b}_2 \\ & & & \cdots & \cdots \\ & & \hat{x}_r & = & \hat{b}_r \end{array} .$$

Да отбележим, че елементарните преобразувания **ЛС1**, **ЛС2**, **ЛС3** и **ЛС4** ***не променят ранга*** на разширената матрица, при което винаги е изпълнено $r(A) \le r(\tilde{A})$.

Твърдение 4.3. В случаите (4.2) и (4.3) за ранга на разширената матрица е налице една от двете възможности, $r(\tilde{A}) = r(A)$ или $r(\tilde{A}) = r(A) + 1$, при което

$r\left(\widetilde{A}\right)=r(A)$, когато всичките преобразувани свободни коефициенти $\hat{b}_{r+1}$, ..., $\hat{b}_m$ са равни на нула и $r\left(\widetilde{A}\right)=r(A)+1$, когато поне един от тях е различен от нула.

Доказателство. Да разгледаме преобразуваната разширена матрица $\hat{\widetilde{A}}$. Вече отбелязахме очевидния факт, че $r\left(\hat{\widetilde{A}}\right)=r\left(\widetilde{A}\right)\geq r(A)=r$. Съгласно определението за ранг, в рамките на основната матрица всичките минори от ред $r+1$ и по-висок (ако има такива) са равни на нула. От тук лесно можем да направим извода, че всичките минори от ред $r+2$ в матрицата $\hat{\widetilde{A}}$ (ако има такива) са равни на нула. Да допуснем противното, че в $\hat{\widetilde{A}}$ може да се намери минор $\mathbf{m}$ от ред $r+2$, който е различен от нула, $\mathbf{m}\neq 0$. Тогава $\mathbf{m}$ задължително ще включва и стълба на свободните коефициенти, иначе $\mathbf{m}$ ще бъде минор от ред $r+2$ в рамките на основната матрица, а всеки такъв минор е равен на нула. Сега ако развием $\mathbf{m}$ по стълба на свободните коефициенти, ще получим отново противоречивото заключение, че $\mathbf{m}=0$, понеже неговата стойност ще представлява сбор от произведения, във всяко от които участва стойността на минор от ред $r+1$ в рамките на основната матрица, а всичките те са равни на нула.

Последното разсъждение показва, че всичките минори от ред $r+2$ в матрицата $\hat{\widetilde{A}}$ (ако има такива) са равни на нула, откъдето получаваме $r\left(\hat{\widetilde{A}}\right)\leq r+1$, т.е. налице е една от двете възможности, $r\left(\widetilde{A}\right)=r(A)$ или $r\left(\widetilde{A}\right)=r(A)+1$.

Да предположим сега, че всичките преобразувани свободни коефициенти са равни на нула. Тогава в преобразуваната разширена матрица (4.2) или (4.3) редовете с номера $r+1$, ..., m съдържат само нули, следователно всеки минор от ред $r+1$ и по-висок ще притежава нулев ред и съответно неговата стойност ще бъде нула, откъдето получаваме, че в този случай $r\left(\hat{\widetilde{A}}\right)=r=r(A)$, следователно $r\left(\widetilde{A}\right)=r(A)$.

Да предположим, че поне един между преобразувани свободни коефициенти $\hat{b}_{r+1}$, ..., $\hat{b}_m$ е различен от нула, $\hat{b}_p\neq 0$, за някое p, $r+1\leq p\leq m$. Тогава минорът в матрицата $\hat{\widetilde{A}}$ от ред $r+1$, $m^{1,2,\ldots,r,p}_{1,2,\ldots,r,n+1}=\hat{b}_p\neq 0$, което показва, че в този случай $r\left(\hat{\widetilde{A}}\right)\geq r+1$, което заедно с факта, че $r\left(\hat{\widetilde{A}}\right)\leq r+1$ ни дава $r\left(\hat{\widetilde{A}}\right)=r+1$, което разбира се означава, че и $r\left(\widetilde{A}\right)=r+1$. Твърдението е доказано. ■

При случаите (4.2) и (4.3), преобразуваната система съдържа уравнения от вида

$$
\begin{array}{l}
0.\hat{x}_1+0.\hat{x}_2+\cdots+0.\hat{x}_n=\hat{b}_{r+1}\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots .\\
0.\hat{x}_1+0.\hat{x}_2+\cdots+0.\hat{x}_n=\hat{b}_m
\end{array}
\tag{4.6}
$$

Очевидно системата (4.6), която е част от преобразуваната система (4.1), ***няма решение***, ако някой от преобразуваните свободни коефициенти $\hat{b}_{r+1}$, ..., $\hat{b}_m$ е различен от нула. Съгласно твърдение 4.3, това съответства на случая $r\left(\widetilde{A}\right)=r(A)+1$. Ако е налице другата възможност, всичките $\hat{b}_{r+1}$, ..., $\hat{b}_m$ да са равни на нула, което според твърдение 4.3 съответства на случая $r\left(\widetilde{A}\right)=r(A)$, то фактически случаите (4.2) и (4.3) се свеждат към случаите (4.4) и (4.5), понеже последните редове на преобразуваните разширени матрици съдържат само нули и не носят никаква информация за решенията на съответните системи.

В случая (4.5) имаме ***единствено решение*** $\hat{x}_1 = \hat{x}_2 = \cdots = \hat{x}_r = 0$.

В случая (4.4) имаме ***безбройно много решения***. Едно такова решение се получава като дадем произволни стойности на ***свободните*** неизвестни $\hat{x}_{r+1}$, ..., $\hat{x}_n$ и въз основа това определим ***базисните*** неизвестни $\hat{x}_1$, $\hat{x}_2$, ..., $\hat{x}_r$ по формулите

$$
(4.7)\qquad
\begin{aligned}
&\hat{x}_1 = \hat{b}_1 - \hat{a}_{1,r+1}\hat{x}_{r+1} - \cdots - \hat{a}_{1n}\hat{x}_n \\
&\hat{x}_2 = \hat{b}_2 - \hat{a}_{2,r+1}\hat{x}_{r+1} - \cdots - \hat{a}_{2n}\hat{x}_n \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\hat{x}_r = \hat{b}_r - \hat{a}_{r,r+1}\hat{x}_{r+1} - \cdots - \hat{a}_{rn}\hat{x}_n
\end{aligned}
$$

По този начин доказахме следната

Теорема 4.2 ***(Кронекер-Капели)***. Системата линейни уравнения (4.1) е съвместима тогава и само тогава, когато рангът на разширената матрица е равен на ранга на основната, $r(\widetilde{A}) = r(A)$. В този случай, ако $r(A) = n$, то системата е определена (има единствено решение), и ако $r(A) < n$, то системата е неопределена (има безбройно много решения). ■

От тази теорема веднага получаваме верността на

Твърдение 4.4. Ако системата (4.1) е хомогенна, то тя е съвместима.

Доказателство. Както и да преобразуваме разширената матрица на една хомогенна система винаги ще получаваме свободни коефициенти нули, следователно в този случай винаги $r(\widetilde{A}) = r(A)$. ■

Верността на последното твърдение може да се установи чрез непосредствено наблюдение, понеже една хомогенна система винаги има едно решение, което се състои само от нули (***нулево решение***).

Например да решим системата

$$
(4.8)\qquad
\begin{aligned}
&x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 2 \\
&-x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 5
\end{aligned}
$$

Тази система има следната разширена матрица

$$
\widetilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & | & 2 \\ -1 & -1 & 2 & -3 & | & 5 \end{pmatrix},
$$

която без пренареждане стълбовете на неизвестните лесно се преобразува до

$$
\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 3 & | & -12 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & | & 7 \end{pmatrix},
$$

на която съответства системата

$$
\begin{array}{ccccccc}
x_1 & & -3x_3 & +3x_4 & = & -12 \\
& x_2 & +x_3 & -2x_2 & = & 7
\end{array}.
$$

Тук е налице случаят (4.4). Системата е съвместима и има безбройно много решения. Свободните неизвестни са x_3 и x_4, а базисните неизвестни са x_1 и x_2. За да получим тези решения полагаме $x_3 = \lambda$ и $x_4 = \mu$, след което следвайки формулите (4.7) за решенията получаваме

$$
\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 + 3\lambda - 3\mu \\ 7 - \lambda + 2\mu \\ \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 \\ 7 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},
$$

където множителите λ и μ могат да приемат произволни стойности. Ако въведем векторните означения

$$\mathbf{v}_0 = \begin{pmatrix} -12 \\ 7 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix},$$

то, от начина по който са получени, веднага се установява, че векторът $\mathbf{v}_0$ представлява едно частно решение на системата (4.8), а векторите $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$ са решения на съответната хомогенна система, която се получава от (4.8), като заместим свободните коефициенти с нули, а за самото решение получаваме векторната формула

(4.9) $\quad \mathbf{x} = \mathbf{v}_0 + \lambda \mathbf{v}_1 + \mu \mathbf{v}_2$.

Нека $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, ..., $\mathbf{v}_s$, $\mathbf{v}_k = (v_{k1}, v_{k2}, \dots, v_{kn})^T$, $k = 1,2,\dots,s$, са някакви вектор-стълбове с размерност n. Тогава под ***ранг*** $r(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_s)$ на тази система вектори се разбира рангът на $(n \times s)$ матрицата, която се получава, когато ги подредим един до друг,

$$r(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_s) = r\begin{pmatrix} v_{11} & v_{21} & \cdots & v_{s1} \\ v_{12} & v_{22} & \cdots & v_{s2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{1n} & v_{2n} & \cdots & v_{sn} \end{pmatrix}.$$

За последния пример веднага се вижда, че

$$r(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = r\begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2, \text{ понеже } m_{1,2}^{3,4} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

Не е трудно да се съобрази, че формулата за представяне на решението (4.9) се обобщава за произволна съвместима и неопределена система.

Теорема 4.3. Нека системата (4.1) е съвместима и неопределена и нека $s = n - r(A) \geq 1$. Тогава нейното решение се дава по формулата

$$\mathbf{x} = \mathbf{v}_0 + \lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 + \dots + \lambda_s \mathbf{v}_s,$$

където $\mathbf{v}_0$ е едно (кое да е) частно решение на (4.1), а $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, ..., $\mathbf{v}_s$ са някакви решения на съответната хомогенна система, при което $r(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_s) = s$. В частност, ако (4.1) е хомогенна, то нейното решение се дава по формулата

$$\mathbf{x} = \lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 + \dots + \lambda_s \mathbf{v}_s. \ \blacksquare$$

Да се върнем сега към случая, когато броят на уравненията и неизвестните е равен, $m = n$. От Теорема 3.3 знаем, че ако $\det A \neq 0$, то системата е съвместима и определена, при което единственото решение се получава по формулите на Крамер. В този случай имаме $r(A) = n$, откъдето директно се вижда, че $r(\widetilde{A}) = n$, понеже е налице неравенството $n = r(A) \leq r(\widetilde{A}) \leq \min(n, n+1) = n$. Ако тази система е хомогенна, то тя винаги е съвместима, при което е определена само в случая, когато $r(A) = n$, което пък е еквивалентно на $\det A \neq 0$. Ако $\det A = 0$, то очевидно $r(A) \leq n - 1$. Така получихме верността на следното

Твърдение 4.5. Една хомогенна система линейни уравнения, за която броят на уравненията е равен на броя на неизвестните, има ненулево решение тогава и само тогава, когато детерминантата на основната матрица е равна на нула. ■

3. Метод на Гаус за решаване на системи линейни уравнения. Начинът, по който преобразувахме разширената матрица на системата (4.1) с цел да докажем теоремата на Кронекер-Капели представлява разновидност на метода на известния ***метод на Гаус*** на елиминиране на неизвестните.

При метода на Гаус ***няма пренареждане на неизвестните***, което означава, че в разширената матрица не се извършва смяна местата на стълбове. Неговата алгоритмична схема се изпълнява по следния начин. Разглеждаме първия стълб от основната част на разширената матрица, който отговаря на първото неизвестно. Ако той се състои само от нули преминаваме към втория стълб и т.н. докато стигнем до стълб с номер j_1, съдържащ ненулеви елементи. Фиксираме един ненулев (***ключов елемент***) елемент и разместваме редовете така, че ключовият елемент да се окаже в първия ред, след което чрез последователни умножения на първия ред с подходящи числа си осигуряваме в стълба под него да има само нули. В следващите преобразувания вече първият ред няма да участва. Така описаната стъпка повтаряме върху останалата част на матрицата (ако има такава). Преглеждаме стълбовете надясно от стълба с номер j_1, докато стигнем до стълб с номер $j_2 > j_1$, в който има ненулеви елементи от втория ред (включително) надолу. Ако такъв стълб няма то процедурата се прекратява. Ако сме намерили такъв стълб, то избираме от него един ненулев елемент и чрез разместване на редовете поставяме въпросният ненулев елемент да се окаже във втория ред, след което чрез умножаване на втория ред с подходящи числа и прибавяне към редовете по-надолу (ако има такива) си осигуряваме в стълба под него да има само нули. Получените по този начин променливи x_{j_1}, x_{j_2}, ..., x_{j_s} ще бъдат ***базисни***, а останалите ще бъдат свободни променливи. В крайна сметка повтаряйки тази процедура до изчерпване на възможностите, привеждаме основната матрица в ***стъпаловиден вид,*** например както е показано в следващата разширена матрица

$$(4.10)\quad \begin{pmatrix} * & \# & \# & \# & \# & \# & \# & \# & | & \# \\ 0 & 0 & * & \# & \# & \# & \# & \# & | & \# \\ 0 & 0 & 0 & * & \# & \# & \# & \# & | & \# \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & \# & | & \# \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & @ \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & @ \end{pmatrix},$$

в която * означава различен от нула елемент, # означава елемент с произволна стойност, а @ означава преобразуван свободен коефициент, за който в реда на основната матрица има само нули. Системата е съвместима тогава и само тогава, когато всичките @ елементи (ако има такива) са нули. В този пример базисни са променливите x_1, x_3, x_4 и x_7, а останалите променливи x_2, x_5, x_6 и x_8 са свободни. Сега за да решим системата извършваме ***обратен ход***. Изразяваме отначало последното базисно неизвестно, след което чрез него изразяваме предпоследното, докато стигнем накрая до първото базисно неизвестно. В крайна сметка всичките базисни неизвестни се получават като линейни комбинации на свободните.

Полезна модификация на метода на Гаус е ***метода на Гаус-Жордан***, при който след като матрицата е приведена в типичния вид (4.10) се извършва следния ***обратен ход***. Разглеждаме отначало реда на последното базисно неизвестно и го разделяме на стойността на ключовия елемент (означен със *), при което този елемент приема стойност 1. Умножаваме този ред с подходящи числа и го прибавяме към редовете над него за да получим само нули над ключовия елемент. Тази стъпка се повтаря последователно докато стигнем до първото базисно неизвестно. За примера (4.10) ще получим следната преобразувана разширена матрица

$$\begin{pmatrix} 1 & \# & 0 & 0 & \# & \# & 0 & \# & | & \# \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \# & \# & 0 & \# & | & \# \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \# & \# & 0 & \# & | & \# \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \# & | & \# \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix},$$

с помощта на която базисните неизвестни се изразяват непосредствено чрез свободните неизвестни.

Ако основната матрица A е квадратна и $\det A \neq 0$, то след преобразуване по метода на Гаус-Жордан, на мястото на основната матрица ще се окаже единичната матрица, а на мястото на стълба на свободните коефициенти ще се окаже решението на системата.

Описаните методи могат да се прилага и за решаване на ***матрични уравнения***. Системата линейни уравнения (4.1) може да бъде записана в матричен вид

(4.11) $Ax = b$,

където както обикновено сме положили

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \ b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}, \ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Системата (4.11) може да се разгледа в по-обща форма. Нека B е $(m \times s)$ матрица, X е матрица на неизвестните от тип $(n \times s)$,

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1s} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{ms} \end{pmatrix}, \ X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & b_{1s} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{ns} \end{pmatrix},$$

и да разгледаме матричното уравнение

$AX = B$.

Това матричното уравнение може да се схваща като s на брой отделни системи линейни уравнения от вида (4.11), по една система за всеки от стълбовете на X и B, които могат да се решават едновременно, понеже имат една и съща основна матрица, следователно матричното уравнение има следната разширена матрица

$$(A \mid B) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & | & b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1s} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & | & b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & | & b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{ms} \end{pmatrix},$$

която можем да преобразуваме по характерния начин с помощта на методите на Гаус и на Гаус-Жордан.

Нека A е квадратна матрица от ред n и $\det A \neq 0$. Тогава A е обратима и нейната обратна може да бъде намерена по формулата

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^*,$$

където A^* е присъединената матрица. Този подход обаче включва много голям брой изчислителни операции. Друг начин за намиране на A^{-1} се основава на факта, че A^{-1} се явява решение на матричното уравнение $AX = E_n$, където E_n е единичната матрица от ред n. Разширената матрица на това уравнение е

$$(4.12)\quad \left(A \mid E_n\right) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{array}\right).$$

По условие $\det A \neq 0$, следователно по метода на Гаус-Жордан разширената матрица (4.12) може да се преобразува до вида

$$\left(E_n \mid B\right) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & \cdots & 0 & b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{array}\right),$$

при което $B = A^{-1}$. В това се състои известният ***метод на Гаус-Жордан за намиране на обратна матрица***.

Накрая да отбележим, че всички описани техники за намиране на минори, детерминанти, рангове на матрици и решаване на системи линейни уравнения са валидни по същия начин когато елементите на участващите матрици са от произволно числово поле.