

Лекция 5

§5. Линейни и векторни пространства

1. Линейни пространства. Едно множество V се нарича *линейно пространство* над числовото поле F , когато в него са определени двете линейни операции *събиране* и *умножение с число*. По аналогия с геометричните вектори, е удобно елементите на линейното пространство да наричаме *вектори*, а числата от полето – *скалари*. Събирането означава, че за всеки два вектора $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in V$ е определена тяхната сума $\mathbf{a} + \mathbf{b} \in V$. Умножението със скалар означава, че за всеки вектор $\mathbf{a} \in V$ и всяко число $\lambda \in F$ е определено произведението $\lambda \mathbf{a} \in V$, при което по определение са налице следните естествени и очаквани свойства.

- 1) За всеки два вектора \mathbf{a} и \mathbf{b} е изпълнено $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$ – комутативност на събирането.
- 2) За всеки три вектора \mathbf{a} , \mathbf{b} и \mathbf{c} е изпълнено $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{b} + (\mathbf{a} + \mathbf{c})$ – асоциативност на събирането.
- 3) Съществува нулев вектор $\mathbf{0} \in V$ такъв, че за всеки вектор \mathbf{a} е изпълнено $\mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{a}$.
- 4) За всеки вектор \mathbf{a} съществува противоположен вектор $-\mathbf{a}$, за който $\mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = \mathbf{0}$.
- 5) За всеки вектор \mathbf{a} е изпълнено $1 \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a}$.
- 6) За всеки две числа λ и μ и всеки вектор \mathbf{a} е изпълнено $(\lambda + \mu)\mathbf{a} = \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{a}$.
- 7) За всяко число λ и всеки два вектора \mathbf{a} и \mathbf{b} е изпълнено $\lambda(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \lambda\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b}$.
- 8) За всеки две числа λ и μ и всеки вектор \mathbf{a} е изпълнено $\lambda(\mu\mathbf{a}) = (\lambda\mu)\mathbf{a}$.

Например линейно пространство е множеството на всичките еднотипни $(m \times n)$ матрици $F_{m \times n}$. Тук нулевият елемент е нулевата матрица. Друг пример за линейно пространство получаваме ако разгледаме полиномите $\pi_n[x]$ от ред не по-висок от n с коефициенти от полето F . От особена важност е линейното пространство на *геометричните вектори*, за което ще стане дума по нататък. Наличието на асоциативност и комутативност при събирането дава основание да разглеждаме следния сбор на повече от две събираеми $\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \dots + \mathbf{a}_n$, при който е без значение редът на извършване на отделните събирания, както и самият ред на събираемите.

Векторът $\lambda_1 \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \mathbf{a}_2 + \dots + \lambda_n \mathbf{a}_n$, където $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ са числа, се нарича *линейна комбинация* на векторите $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$. Едно линейно пространство съдържа всевъзможните линейни комбинации на своите вектори.

Нека V е линейно пространство, а W е някакво линейно пространство, което е подмножество на V . Тогава се казва, че W е *линейно подпространство* на V . Например *линейната обвивка* $l(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n)$ на векторите $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$, която се състои от всичките техни линейни комбинации е едно линейно подпространство на V ,

$$l(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n) = \{\mathbf{a} \in V \mid \mathbf{a} = \lambda_1 \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \mathbf{a}_2 + \dots + \lambda_n \mathbf{a}_n\} \subseteq V.$$

Определение 5.1. Казва се, че векторите $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ са *линейно независими* (образуват линейно независима система), ако равенството $\lambda_1 \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \mathbf{a}_2 + \dots + \lambda_n \mathbf{a}_n = \mathbf{0}$ е възможно, единствено когато всичките коефициенти на тази линейна комбинация са нули, $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$. Казва се, че векторите $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ са *линейно зависими*, когато не са линейно независими.

От горното определение следва, че векторите $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ са линейно зависими тогава и само тогава, когато може да се намерят числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, поне едно от които различно от нула, за които съответната линейна комбинация дава нулевия вектор,

$\lambda_1 \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \mathbf{a}_2 + \dots + \lambda_n \mathbf{a}_n = \mathbf{0}$. Един вектор \mathbf{a} е линейно независими (зависим) тогава и само тогава, когато е различен (равен) на нулевия вектор.

Твърдение 5.1. Нека системата вектори $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ е линейно независима. Тогава всяка нейна подсистема $\mathbf{a}_{i_1}, \mathbf{a}_{i_2}, \dots, \mathbf{a}_{i_k}$ също е линейно независима. Следователно, ако една система от вектори притежава линейно зависима подсистема, то тя също е линейно зависима.

Доказателство. Без ограничение на общността можем да предположим, че подсистемата се състои от първите k вектора $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$ ($k < n$) и да разгледаме една тяхна линейна комбинация, която дава нулевия вектор, $\lambda_1 \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \mathbf{a}_2 + \dots + \lambda_k \mathbf{a}_k = \mathbf{0}$. Тогава, ако добавим и останалите вектори с множители нула, получаваме линейната комбинация

$$\lambda_1 \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \mathbf{a}_2 + \dots + \lambda_k \mathbf{a}_k + 0 \cdot \mathbf{a}_{k+1} + \dots + 0 \cdot \mathbf{a}_n = \mathbf{0}.$$

Системата $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ е линейно независима и следователно последното равенство е възможно, единствено когато $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_k = 0$. Направеното разсъждение показва, че подсистемата също е линейно независима. ■

От твърдение 5.1 следва, че една линейно независима система не може да съдържа нулевия вектор и обратно, ако един от векторите на системата е нулевият, то системата е линейно зависима.

Твърдение 5.2. Системата вектори $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ е линейно зависима тогава и само тогава, когато някой от векторите може да се изрази като линейна комбинация на останалите.

Доказателство. 1) Нека системата е линейно зависима. Тогава съществува линейна комбинация $\lambda_1 \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \mathbf{a}_2 + \dots + \lambda_n \mathbf{a}_n = \mathbf{0}$, при което поне един от коефициентите е различен от нула. Без ограничение на общността да предположим, че $\lambda_1 \neq 0$. Сега непосредствено се получава, че векторът \mathbf{a}_1 е следната линейна комбинация на останалите вектори

$$\mathbf{a}_1 = \left(-\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right) \mathbf{a}_2 + \dots + \left(-\frac{\lambda_n}{\lambda_1} \right) \mathbf{a}_n.$$

2) Сега да предположим, че някой от векторите, например \mathbf{a}_1 , може да се запише като линейна комбинация $\mathbf{a}_1 = \mu_2 \mathbf{a}_2 + \mu_3 \mathbf{a}_3 + \dots + \mu_n \mathbf{a}_n$. Тогава линейната комбинация

$$1 \cdot \mathbf{a}_1 - \mu_2 \mathbf{a}_2 - \mu_3 \mathbf{a}_3 - \dots - \mu_n \mathbf{a}_n = \mathbf{0}$$

има поне един ненулев коефициент, например коефициентът пред \mathbf{a}_1 е равен на $-1 \neq 0$, което по определение означава, че системата е линейно зависима. ■

Най простият пример на линейно пространство V е когато то съдържа само нулевия вектор, $V = \{\mathbf{0}\}$. Ако $V \neq \{\mathbf{0}\}$, то V съдържа линейно независими системи с някакъв брой вектори. Например всеки ненулев вектор $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ сам образува линейно независима система.

Определение 5.2. Казва се, че линейното пространство $V \neq \{\mathbf{0}\}$ е *крайномерно* и има *размерност* $\dim V = n$, когато могат да се намерят някакви n на брой линейно независими вектори и всяка система от $n+1$ на брой вектори е линейно зависима. Ако за всяка n може да се намери линейно независима система от n на брой вектори, то пространството се нарича *безкрайномерно*, $\dim V = \infty$.

Ако $V = \{\mathbf{0}\}$, то полагаме по целесъобразност $\dim V = 0$. Съгласно твърдение 5.1, ако V е крайномерно и $\dim V = n$, то не само всяка система от $n+1$ на брой вектори е

линейно зависима, но всяка система от $n+2$ и повече на брой вектори е линейно зависима. От определението непосредствено следва верността на

Твърдение 5.3. Нека в линейното пространство V могат да се намерят n на брой вектори $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ такива, че всеки вектор $\mathbf{a} \in V$ може да се представи като тяхна линейна комбинация. Тогава $\dim V \leq n$. Ако освен това $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ са линейно независими, то $\dim V = n$. ■

Например линейното пространство $K_{m \times n}$ на еднотипните $(m \times n)$ матрици е крайномерно и има размерност $\dim K_{m \times n} = m \cdot n$, понеже всяка такава матрица $A = (a_{ij})$ може да се запише като линейна комбинация

$$A = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} E_{ij},$$

където E_{ij} е матрица, чийто елемент в ред i и стълб j е равен на 1, а всички останали елементи са нули и освен това тези матрици са линейно независими. Линейното пространство на полиномите $\pi_n[x]$ от ред не по-висок от n с реални или комплексни коефициенти също е крайномерно и има размерност $\dim \pi_n[x] = n+1$, понеже всеки такъв полином

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

може да се схваща като линейна комбинация на елементарните полиноми $p_k(x) = x^k$, $k = 0, 1, \dots, n$, които са $n+1$ на брой и освен това са линейно независими.

Нека $V \neq \{\mathbf{0}\}$ е крайномерно и има размерност $\dim V = n$. Тогава по определение във V може да се намери поне една система от n на брой линейно независими вектори.

Определение 5.3. Всяка система от n на брой линейно независими вектори във крайномерното линейно пространство $V \neq \{\mathbf{0}\}$ с размерност $\dim V = n$ се нарича **базис** във V .

Ползата от понятието базис се показва добре от следната

Теорема 5.1. Нека векторите $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ образуват базис в крайномерното линейно пространство V , $\dim V = n$. Тогава всеки вектор $\mathbf{a} \in V$ може да се представи при това по единствен начин като линейна комбинация на базисните вектори,

$$(5.1) \quad \mathbf{a} = \lambda_1 \mathbf{e}_1 + \lambda_2 \mathbf{e}_2 + \dots + \lambda_n \mathbf{e}_n.$$

Доказателство. Векторите $\mathbf{a}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ са $n+1$ на брой, следователно са линейно зависими и съществува тяхна линейна комбинация

$$\mu \mathbf{a} + \mu_1 \mathbf{e}_1 + \mu_2 \mathbf{e}_2 + \dots + \mu_n \mathbf{e}_n = \mathbf{0},$$

където поне един от коефициентите $\mu, \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ е различен от нула. Ако допуснем, че $\mu = 0$, то получим противоречие с линейната независимост на базисните вектори, следователно $\mu \neq 0$, откъдето намираме

$$\mathbf{a} = \left(-\frac{\mu_1}{\mu}\right) \mathbf{e}_1 + \left(-\frac{\mu_2}{\mu}\right) \mathbf{e}_2 + \dots + \left(-\frac{\mu_n}{\mu}\right) \mathbf{e}_n = \mathbf{0}.$$

Да предположим сега, че имаме две представяния

$$\mathbf{a} = \lambda'_1 \mathbf{e}_1 + \lambda'_2 \mathbf{e}_2 + \dots + \lambda'_n \mathbf{e}_n \quad \text{и} \quad \mathbf{a} = \lambda''_1 \mathbf{e}_1 + \lambda''_2 \mathbf{e}_2 + \dots + \lambda''_n \mathbf{e}_n.$$

Тогава след почленно изваждане на двете равенства намираме

$$\mathbf{0} = (\lambda'_1 - \lambda''_1) \mathbf{e}_1 + (\lambda'_2 - \lambda''_2) \mathbf{e}_2 + \dots + (\lambda'_n - \lambda''_n) \mathbf{e}_n,$$

което отново поради линейната независимост на базисните вектори е възможно, единствено когато

$$(\lambda'_1 - \lambda''_1) = (\lambda'_2 - \lambda''_2) = \dots = (\lambda'_n - \lambda''_n) = 0,$$

което означава, че представянето е единствено. ■

Нека векторите $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ образуват базис. Съгласно теорема 5.1 всеки вектор се идентифицира еднозначно чрез своите коефициенти $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ в линейната комбинация (5.1), които се наричат още координати на вектора \mathbf{a} в дадения базис. Пишем $\mathbf{a}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ или $\mathbf{a} = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$.

Непосредствено се проверява, че линейните операции събиране и умножение със скалар могат да бъдат извършени върху координатите на участващите вектори. Ако

$$\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n), \text{ т.е. } \mathbf{a} = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + \dots + a_n\mathbf{e}_n$$

и

$$\mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n), \text{ т.е. } \mathbf{b} = b_1\mathbf{e}_1 + b_2\mathbf{e}_2 + \dots + b_n\mathbf{e}_n,$$

то

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_1 + b_1)\mathbf{e}_1 + (a_2 + b_2)\mathbf{e}_2 + \dots + (a_n + b_n)\mathbf{e}_n,$$

следователно $\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n)$ и

$$\lambda\mathbf{a} = (\lambda a_1)\mathbf{e}_1 + (\lambda a_2)\mathbf{e}_2 + \dots + (\lambda a_n)\mathbf{e}_n,$$

следователно $\lambda\mathbf{a} = (\lambda a_1, \lambda a_2, \dots, \lambda a_n)$.

Твърдение 5.4. Нека векторите $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ образуват базис във V и $\mathbf{a}_k(a_{k1}, a_{k2}, \dots, a_{kn})$, $k = 1, 2, \dots, m$, ($m \leq n$), са някакви вектори, зададени чрез техните координати в този базис и да разгледаме матрицата от техните координати

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Тогава векторите $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m$ са линейно независими тогава и само тогава, когато $r(A) = m$, т.е. когато рангът на матрицата A е максимален. Следователно, ако $m = n$, то векторите $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m$ образуват базис тогава и само тогава, когато $r(A) = n$, т.е. когато $\det A \neq 0$.

Доказателство. Ще докажем еквивалентното твърдение, че векторите $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m$ са линейно зависими тогава и само тогава, когато $r(A) < m$.

1) Нека векторите $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m$ са линейно зависими. Тогава някой от тях може да се представи като линейна комбинация на останалите, следователно според основните свойства на детерминантите, в матрицата A всеки минор от ред m е равен на нула и $r(A) < m$. 2) Да предположим сега, че $r(A) < m$. Тогава съгласно теоремата за базисния минор в матрицата A има редове (небазисни редове), които се представят като линейна комбинация на други (базисни) редове, следователно между редовете на A съществува линейна зависимост, което означава, че същата линейна зависимост има между векторите $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m$. ■

Нека V е линейно пространство и $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m$ са някакви вектори. Тогава тяхната линейна обвивка $l(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m)$ представлява крайномерно линейно пространство (което е подпространство на V) и неговата размерност се нарича ранг на системата вектори $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m$, $r(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m) = \dim[l(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m)]$. Рангът на една система вектори е равен на най-големия брой линейно независими между тях. В

частност, $r(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m) = m$ тогава и само тогава, когато $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m$ са линейно независими.

2. Геометрични вектори. Тук предполагаме, че читателят е запознат с някои основни геометрични понятия. По целесъобразност различаваме три вида пространства на геометрични вектори, вектори върху права, вектори върху равнина и вектори в пространството. И в трите случая векторът представлява *насочена отсечка* $\vec{a} = \overline{AB}$ с начало точката A и край в точката B (рис. 5.1).

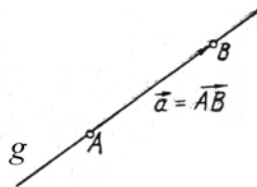


Рис. 5.1.

При нулевият вектор $\vec{0}$, началната и крайната точка съвпадат. Една насочена отсечка \vec{a} притежава следните геометрични характеристики.

1) **Дължина** (модул на вектор), която се бележи с $|\vec{a}|$. Дължината е относително понятие. Ако имаме еталон (машаб) – вектор \vec{e} с дължина $|\vec{e}| \neq 0$, то можем да изразим дължината на всеки друг вектор като пропорция от дължината на \vec{e} . Всеки два вектора могат да бъдат сравнявани по дължина. Нулевият вектор и само той има нулева дължина, $|\vec{0}| = 0$.

2) **Направление и посока.** За всеки ненулев вектор $\vec{a} \neq \vec{0}$, съществува единствена права g , върху която лежи \vec{a} . Тази права се нарича *директриса* и задава направлението на вектора \vec{a} . Едно направление, определено от правата g , задава две посоки, първата съвпада с посоката на вектора \vec{a} , а втората посока е противоположна на \vec{a} . Нулевият вектор няма определено направление и посока.

Ос се нарича права, върху която е избран машаб за дължина и едната от двете нейни посоки е определена като положителна. По този начин за всеки вектор \overline{AB} върху дадена ос g се определя *алгебрична мярка*, равна на неговата дължина в съответствие с машаба, когато \overline{AB} и g са еднопосочни и равна на неговата дължина със знак минус, когато \overline{AB} и g имат противоположни посоки.

Две насочени отсечки, които могат да се получат една от друга с помощта на успоредно пренасяне, по нататък ще разглеждаме като представители на един и същ вектор. По този начин не правим разлика между два вектора, които имат една и съща дължина и едно и също направление и една и съща посока.

Тези вектори можем да разглеждаме като получени от множеството на насочените отсечки след прилагане на описаното *отношение на еквивалентност* между тях.

Между геометричните вектори разглеждаме следните линейни операции.

1) **Умножение с число λ .** За нулевия вектор определяме $\lambda\vec{0} = \vec{0}$. Нека сега $\vec{a} \neq \vec{0}$. Ако $\lambda = 0$ то полагаме $0 \cdot \vec{a} = \vec{0}$. Ако $\lambda \neq 0$, то под произведение $\lambda\vec{a}$ на вектора \vec{a} с числото λ се разбира вектор с дължина $|\lambda\vec{a}| = |\lambda||\vec{a}|$, който има направление като вектора \vec{a} и посока, която съвпада с тази на \vec{a} , когато $\lambda > 0$, и посока противоположна на тази на вектора \vec{a} , когато $\lambda < 0$.

2) **Събиране.** Сборът $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ двата вектора \vec{a} и \vec{b} е векторът, който се получава, когато приложим \vec{b} в крайната точка на \vec{a} (рис. 5.2), $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{OB}$.

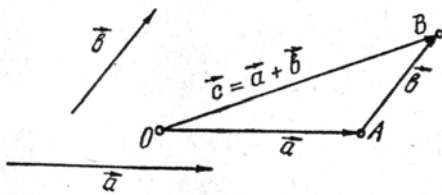


Рис. 5.2.

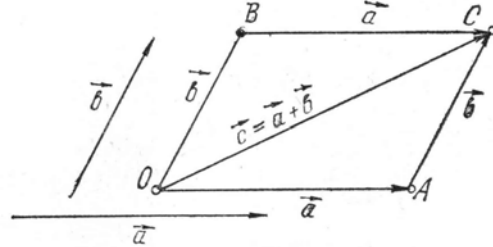


Рис. 5.3.

Събирането може да бъде извършено по **правилото на успоредника** (рис. 5.3), при което двата вектора $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ и $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$ се прилагат в една и съща точка O , след което триъгълникът $\triangle OAB$ се допълва до успоредник $OABC$. Тук сборът $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ се явява векторът, който представлява диагонала \overrightarrow{OC} .

Разликата $\vec{c} = \vec{b} - \vec{a}$ може да се разгледа като сбора на \vec{b} с $-\vec{a}$, $\vec{c} = \vec{b} + (-\vec{a})$ и отново да се определи по правилото на успоредника (рис. 5.4 и рис 5.5).

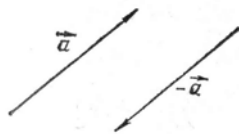


Рис. 5.4.

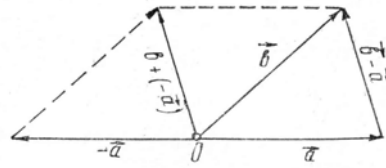


Рис. 5.5.

Непосредствено се проверява, че така определеното множество на геометрични вектори и линейни операции между тях удовлетворяват всички основни изисквания за линейно пространство. Между тези свойства да обърнем внимание на асоциативността на операцията събиране, която е доказана илюстративно на (рис. 5.6).

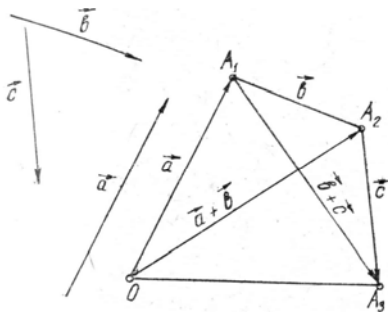


Рис. 5.6.

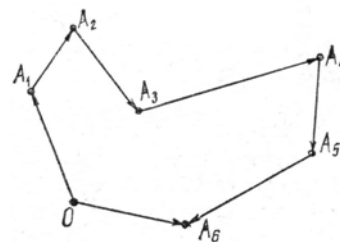


Рис. 5.7.

На рис. 5.7 е илюстриран начинът на събиране на повече от два вектора.

Два вектора \vec{a} и \vec{b} в равнината или в пространството се наричат **колинеарни (успоредни)**, когато са линейно зависими, т.е. когато могат да се намерят две числа λ и μ , поне едното от които различно от нула такива, че $\lambda\vec{a} + \mu\vec{b} = \vec{0}$. По този начин нулевият вектор е колинеарен с всеки друг вектор. Тук е по-интересен случаят когато и двата вектора са ненулеви. Нека за определеност $\mu \neq 0$. Тогава имаме $\vec{b} = \left(-\frac{\lambda}{\mu}\right)\vec{a}$, което

означава, че векторите \vec{a} и \vec{b} имат едно и също направление (успоредни директриси), откъдето и произлиза терминът "колинеарни".

Три вектора \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} в пространството се наричат **компланарни**, когато са линейно зависими, т.е. когато могат да се намерят три числа λ , μ и ν , поне едно от които различно от нула такива, че $\lambda\vec{a} + \mu\vec{b} + \nu\vec{c} = \vec{0}$. По този начин нулевият вектор е компланарен с всеки друг вектор и освен това, ако кои да е два от векторите \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} са колинеарни, то те са компланарни. И тук е по-интересен случаят когато и трите вектора са ненулеви. Нека за определеност $\nu \neq 0$. Тогава имаме $\vec{c} = \left(-\frac{\lambda}{\nu}\right)\vec{a} + \left(-\frac{\mu}{\nu}\right)\vec{b}$,

което означава, че векторът \vec{c} лежи в равнина, определена от векторите \vec{a} и \vec{b} , откъдето и произлиза терминът "компланарни". Тази равнина се явява единствена, когато векторите \vec{a} и \vec{b} не са колинеарни. Пренебрегвайки някои технически уточнения, даваме следното

Определение 5.4. Базис в равнината се наричат всеки два линейно независими (неколинеарни) вектори \vec{e}_1 и \vec{e}_2 . **Базис в пространството** се наричат всеки три линейно независими (некомпланарни) вектори \vec{e}_1 , \vec{e}_2 и \vec{e}_3 .

По-нататък ще се убедим, че горното определение за базис се съгласува напълно с даденото в предишния раздел общо определение за базис.

Теорема 5.2. Нека векторите \vec{e}_1 и \vec{e}_2 образуват базис в равнината. Тогава всеки вектор \vec{a} от тази равнина може да се представи при това по единствен начин като линейна комбинация на базисните, $\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2$. Числата a_1 и a_2 се наричат **координати** на вектора \vec{a} в базиса \vec{e}_1 , \vec{e}_2 . Нека векторите \vec{e}_1 , \vec{e}_2 и \vec{e}_3 образуват базис в пространството. Тогава всеки вектор \vec{a} от пространството може да се представи при това по единствен начин като линейна комбинация на базисните, $\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3$. Числата a_1 , a_2 и a_3 се наричат **координати** на вектора \vec{a} в базиса \vec{e}_1 , \vec{e}_2 , \vec{e}_3 .

Доказателство. 1) Нека \vec{e}_1 и \vec{e}_2 образуват базис в равнината. Да приложим трите вектора $\vec{e}_1 = \overrightarrow{OE_1}$, $\vec{e}_2 = \overrightarrow{OE_2}$ и $\vec{a} = \overrightarrow{OM}$ в една и съща точка O и да допълним конструкцията до успоредник, както е показано на рис. 5.8, при което числовите оси по директрисите на \vec{e}_1 и \vec{e}_2 да означим съответно с Ox и Oy . Тогава

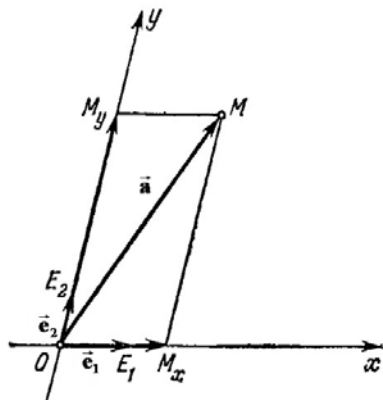


Рис. 5.8.

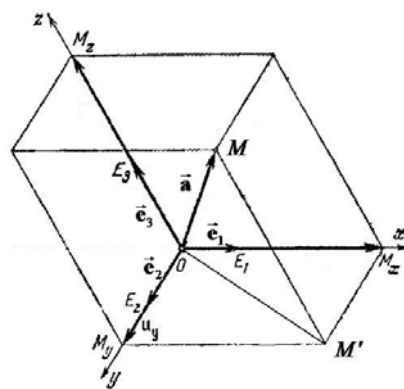


Рис. 5.9.

по правилото на успоредника следва, че $\vec{a} = \overrightarrow{OM_x} + \overrightarrow{OM_y}$. От друга страна имаме $\overrightarrow{OM_x} = a_1\vec{e}_1$ и $\overrightarrow{OM_y} = a_2\vec{e}_2$, за някои числа a_1 и a_2 , следователно $\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2$.

2) Нека \vec{e}_1, \vec{e}_2 и \vec{e}_3 образуват базис в пространството. Да приложим четирите вектора $\vec{e}_1 = \overrightarrow{OE_1}, \vec{e}_2 = \overrightarrow{OE_2}, \vec{e}_3 = \overrightarrow{OE_3}$ и $\vec{a} = \overrightarrow{OM}$ в една и съща точка O и да допълним конструкцията до паралелепипед, както е показано на рис. 5.9, при което числовите оси по директрисите на \vec{e}_1 и \vec{e}_2 да означим съответно с Ox, Oy и Oz . През точката M да прекараме права, успоредна на оста Oz до пресичане с равнината Oxy в точка M' . Тогава, $\vec{a} = \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM'} + \overrightarrow{M'M}$. От друга страна, $\overrightarrow{OM'} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2$ и $\overrightarrow{M'M} = a_3\vec{e}_3$, за някои числа a_1, a_2 и a_3 следователно $\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3$. Единствеността и в двата случая се доказва както при теорема 5.1. ■

Последните разсъждения трябва да се схващат по скоро като резултат на геометричната интуиция отколкото като строги дедукции в рамките на апарата на линейната алгебра.

Сега вече лесно можем да установим, че *всеки три вектора в равнината са линейно зависими и всеки четири вектора в пространството са линейно зависими*. Да разгледаме векторите \vec{a}_1, \vec{a}_2 и \vec{a}_3 от някоя равнина. Ако \vec{a}_1 и \vec{a}_2 са колинеарни, то няма какво да се доказва, ако \vec{a}_1 и \vec{a}_2 не са колинеарни, то те образуват базис и следователно третият вектор \vec{a}_3 се представя като тяхна линейна комбинация. Да разгледаме сега векторите $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ и \vec{a}_4 от пространството. Ако \vec{a}_1, \vec{a}_2 и \vec{a}_3 са компланарни, то няма какво да се доказва, ако \vec{a}_1 и \vec{a}_2 не са компланарни, то те образуват бази и следователно четвъртият вектор \vec{a}_4 се представя като тяхна линейна комбинация.

По този начин се убедихме, че равнината е линейно пространство с размерност 2, а пространството може да бъде разглеждано като линейно пространство с размерност 3. По тази причина понякога равнината се означава с \mathbb{R}^2 , а пространството чрез \mathbb{R}^3 .

Афинна координатна система $O\vec{e}_1\vec{e}_2$ в равнината се получава, когато имаме налице някакъв базис \vec{e}_1, \vec{e}_2 и фиксираме една точка O за начало на координатната система. Базисът позволява да адресираме по единствен начин векторите в равнината, посредством техните координати. Координатната система позволява да адресираме всяка точки M в равнината чрез координатите на нейния *радиус вектор* \overrightarrow{OM} . По същия начин *афинна координатна система $O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$ в пространството* се получава, когато имаме налице някакъв базис $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ и фиксираме една точка O за начало на координатната система. Базисът позволява да адресираме по единствен начин векторите в пространството, посредством техните координати. Координатната система позволява да адресираме всяка точки M в пространството чрез координатите на нейния *радиус вектор* \overrightarrow{OM} .

Ако е зададена една афинна координатна система, то правите през началото O , успоредни на базисните вектори се наричат *координатни оси*. Координатните оси са оси, за които мащабът е посоката се задават от съответните базисни вектори. Всеки две координатни оси на афинната координатна система $O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$ в пространството образуват съответната *координатна равнина*.

Ако базисните вектори сключват помежду си прави ъгли, то базисът се нарича *ортогонален*, а когато базисът е ортогонален и базисните вектори имат единична дължина, то базисът се нарича *ортонормиран*.

Ако базисът е ортонормиран, то съответната афинна координатна система се нарича **декартова (правоъгълна)**. В декартова координатна система координатните оси могат да бъдат разглеждани като **числови** оси.

По нататък в геометричните изследвания ще разглеждаме като правило само декартови координатни системи с базисни вектори, означени с \vec{i} и \vec{j} със съответни числови оси Ox и Oy за случай на равнина (рис 5.10) и \vec{i} , \vec{j} и \vec{k} със съответни числови оси Ox , Oy и Oz за случай на пространство (рис 5.11).

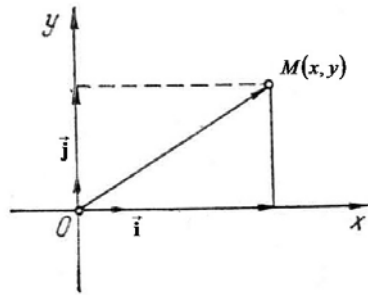


Рис. 5.10.

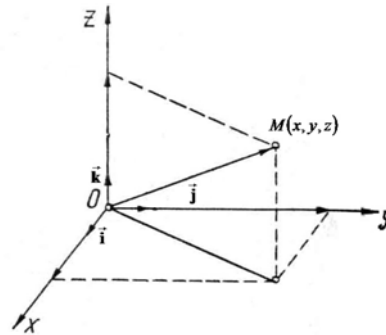


Рис. 5.11.

Когато трябва да означим дадена точка M чрез нейните координати пишем $M(x, y)$ и $M(x, y, z)$ съответно за случая на равнина и пространство.

Декартовата координатна система в равнината Oxy се нарича **положително ориентирана**, когато по-краткият път на завъртане на първата числова ос Ox до сливане с втората ос Oy е в посока, **обратна на движението на часовниковата стрелка**, както е в случая, изобразен на рис. 5.10. В противен случай координатната система Oxy се нарича **отрицателно ориентирана**. Очевидно ако координатната система Oxy е положително ориентирана, то системата Oyx е отрицателно ориентирана.

Декартовата координатна система в пространството $Oxyz$ се нарича **положително ориентирана**, когато координатната система Oxy в съответната координатна равнина е положително ориентирана, "погледнато от върха" на третата ос Oz , както е в случая, изобразен на рис. 5.11. В противен случай координатната система $Oxyz$ се нарича **отрицателно ориентирана**.

Аналогични означения за координатните оси както и аналогични определения за ориентация могат да бъдат въведени и за произволна афинна координатна система.

Освен декартови координатни системи могат да бъдат използвани и други координатни системи, които имат същото основно предназначение – да адресират точките в равнината и пространството, например полярна, цилиндрична и сферична координатна система.

3. Евклидовото пространство R^n . Един от най-важните за приложенията примери за линейни пространства е линейното пространство R^n , елементите на което са вектори стълбове (еднотипни $(n \times 1)$ матрици), които за удобство в текста ще изписваме понякога като редове,

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}.$$

Координатите на тези вектори се предполагат *реални числа*, макар че при доказателството на основните твърдения в много случаи се допуска възможността координатите да приемат и комплексни стойности. Размерността на \mathbf{R}^n е равна на n , $\dim \mathbf{R}^n = n$. Тук най-често се използва *каноничният базис*

$$\bar{\mathbf{e}}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \bar{\mathbf{e}}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \bar{\mathbf{e}}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix},$$

за които имаме $\bar{\mathbf{a}} = a_1 \bar{\mathbf{e}}_1 + a_2 \bar{\mathbf{e}}_2 + \dots + a_n \bar{\mathbf{e}}_n$. Съгласно твърдение 5.4, векторите $\bar{\mathbf{a}}_k (a_{k1}, a_{k2}, \dots, a_{kn})$, $k = 1, 2, \dots, n$, образуват базис тогава и само тогава, когато

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \neq 0.$$

По аналогия се определя и линейното пространство K^n , където K е някакво друго числово поле, например $K = \mathbf{C}$.

В този раздел ще разгледаме понятия като собствено число, собствен вектор, ортогонална матрица и характеристичен полином, които имат огромно значение за цялата линейна алгебра, при което ще дадем определенията в общия случай, както и ще докажем някои основни свойства.

Преди всичко в \mathbf{R}^n се въвежда скалярно произведение и по тази причина то се нарича *евклидово пространство* (другата причина е, че координатите на векторите се приемат основно за реални числа). Нека $\bar{\mathbf{a}}(a_1, a_2, \dots, a_n)$ и $\bar{\mathbf{b}}(b_1, b_2, \dots, b_n)$ са два вектора. Тогава тяхното скалярно произведение $\langle \bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}} \rangle$ се определя като сбор от произведенията на съответните координати.

$$\langle \bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}} \rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n.$$

По нататък ще установим, че горното определение се съгласува правилото на пресмятане на геометричното скалярно произведение, когато геометричните вектори се разглеждат в ортонормирания базис $\bar{\mathbf{i}}, \bar{\mathbf{j}}, \bar{\mathbf{k}}$.

Лесно се проверява, че са налице следните основни свойства.

- 1) $\langle \bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{a}} \rangle \geq 0$, при което равенство има единствено в случая $\bar{\mathbf{a}} = \bar{\mathbf{0}}$.
- 2) $\langle \bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}} \rangle = \langle \bar{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{a}} \rangle$ (*симетричност*).
- 3) $\langle \lambda_1 \bar{\mathbf{a}}_1 + \lambda_2 \bar{\mathbf{a}}_2 + \dots + \lambda_p \bar{\mathbf{a}}_p, \bar{\mathbf{b}} \rangle = \lambda_1 \langle \bar{\mathbf{a}}_1, \bar{\mathbf{b}} \rangle + \lambda_2 \langle \bar{\mathbf{a}}_2, \bar{\mathbf{b}} \rangle + \dots + \lambda_p \langle \bar{\mathbf{a}}_p, \bar{\mathbf{b}} \rangle$ (*линейност*).

Поради симетрията, скалярното произведение е линейно и по двата аргумента, което позволява при работа да се разкриват скобите по обичайния начин.

Строго погледнато даденото определение представлява един частен (макар и най-важния) случай на скалярно произведение. В \mathbf{R}^n могат да се въведат различни скалярни произведения, следвайки изискването да са изпълнени изброените по горе три свойства.

Скалярното произведение може да се запише във вида

$$\langle \bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}} \rangle = \bar{\mathbf{b}}^T \bar{\mathbf{a}},$$

в който се използва познатото матрично умножение "ред по стълб".

Векторите \vec{a} и \vec{b} се наричат *ортогонални*, когато тяхното скалярно произведение е равно на нула, $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = 0$. В този случай понякога се пише $\vec{a} \perp \vec{b}$.

Дължината $|\vec{a}|$ (модула) на вектора \vec{a} се определя като $|\vec{a}| = \sqrt{\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle}$ (също както при геометричните вектори).

Следващото твърдение намира различни приложения.

Твърдение 5.5. Собствените вектори, отговарящи на дадено собствено значение заедно с нулевия вектор образуват линейно подпространство на \mathbb{R}^n .

Доказателство. Нека $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m$ са собствени вектори, отговарящи на собственото значение λ и да разгледаме една тяхна линейна комбинация

$$\vec{v} = \mu_1 \vec{v}_1 + \mu_2 \vec{v}_2 + \dots + \mu_m \vec{v}_m.$$

Тогава

$$A\vec{v} = A(\mu_1 \vec{v}_1 + \mu_2 \vec{v}_2 + \dots + \mu_m \vec{v}_m) = \mu_1 A\vec{v}_1 + \mu_2 A\vec{v}_2 + \dots + \mu_m A\vec{v}_m,$$

$$A\vec{v} = \mu_1 \lambda \vec{v}_1 + \mu_2 \lambda \vec{v}_2 + \dots + \mu_m \lambda \vec{v}_m = \lambda(\mu_1 \vec{v}_1 + \mu_2 \vec{v}_2 + \dots + \mu_m \vec{v}_m) = \lambda \vec{v},$$

което доказва твърдението. ■

В частност, ако $\vec{v} \neq \vec{0}$ е собствен вектор за матрицата A , отговарящ на собствено значение λ , то всеки вектор $\mu \vec{v}$, $\mu \neq 0$, също е собствен за това значение.

Твърдение 5.6. Собствените вектори, отговарящи на различни собствени значения на дадена $(n \times n)$ матрица A са линейно независими.

Доказателство. Нека $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_s$ са собствени вектори, отговарящи на различните помежду си собствени значения $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$ и да образуваме една тяхна нулева линейна комбинация

$$\mu_1 \vec{v}_1 + \mu_2 \vec{v}_2 + \dots + \mu_s \vec{v}_s = \vec{0}.$$

Като приложим матрицата A върху горното равенство, намираме

$$\mu_1 A\vec{v}_1 + \mu_2 A\vec{v}_2 + \dots + \mu_s A\vec{v}_s = \vec{0},$$

$$\mu_1 \lambda_1 \vec{v}_1 + \mu_2 \lambda_2 \vec{v}_2 + \dots + \mu_s \lambda_s \vec{v}_s = \vec{0},$$

понеже по определение $A\vec{v}_k = \lambda_k \vec{v}_k$, за всяко $k = 1, 2, \dots, s$. Прилагайки отново матрицата A намираме

$$\mu_1 \lambda_1 A\vec{v}_1 + \mu_2 \lambda_2 A\vec{v}_2 + \dots + \mu_s \lambda_s A\vec{v}_s = \vec{0},$$

$$\mu_1 \lambda_1^2 \vec{v}_1 + \mu_2 \lambda_2^2 \vec{v}_2 + \dots + \mu_s \lambda_s^2 \vec{v}_s = \vec{0},$$

и т.н. намираме, че за всяко цяло положително число m е налице равенството

$$\mu_1 \lambda_1^m \vec{v}_1 + \mu_2 \lambda_2^m \vec{v}_2 + \dots + \mu_s \lambda_s^m \vec{v}_s = \vec{0}.$$

Да разгледаме тези равенства за $m = 0, 1, 2, \dots, s-1$ и да ги подредим в матричен вид.

Получаваме матричното равенство

$$(5.2) \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_s \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{s-1} & \lambda_2^{s-1} & \dots & \lambda_s^{s-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_1 \vec{v}_1^T \\ \mu_2 \vec{v}_2^T \\ \vdots \\ \mu_s \vec{v}_s^T \end{pmatrix} = \vec{0},$$

в което първата матрица множител отляво има детерминанта от тип на Вандермонд, която е различна от нула по условие, вторият множител отляво е $(n \times n)$ матрица, чиито редове са образувани от собствените вектори на A , умножени с коефициентите на

линейната комбинация, а матрицата отлясно е нулевата $(n \times n)$ матрица. Умножавайки (5.2) отляво с обратната матрица на вандермондовия множител, получаваме

$$\begin{pmatrix} \mu_1 \bar{\mathbf{v}}_1^T \\ \mu_2 \bar{\mathbf{v}}_2^T \\ \vdots \\ \mu_s \bar{\mathbf{v}}_s^T \end{pmatrix} = \mathbf{0},$$

което означава, че всичките вектори редове $\mu_k \bar{\mathbf{v}}_k^T$, $k=1,2,\dots,s$, са нулеви, а това е възможно, единствено когато всичките коефициенти $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_s$ на линейната комбинация са равни на нула. ■

В общия случай собствените значения на реалните матрици могат да бъдат и комплексни числа. Симетричните матрици обаче имат само реални собствени значения.

Твърдение 5.7. Нека A е реална симетрична матрица от ред n . Тогава всичките нейни собствени значения са реални.

Доказателство. Нека $\lambda = \alpha + i\beta$ е едно собствено число на A , на което отговаря собствен вектор $\bar{\mathbf{h}} = \bar{\mathbf{u}} + i\bar{\mathbf{v}}$, където α и β са реалната и имагинерната част на λ , а $\bar{\mathbf{u}}$ и $\bar{\mathbf{v}}$ са реални вектори, задаващи реалната и имагинерната част на собствения вектор $\bar{\mathbf{h}}$. Трябва да покажем, че $\beta = 0$. По условие имаме $A\bar{\mathbf{h}} = \lambda\bar{\mathbf{h}}$,

$$A(\bar{\mathbf{u}} + i\bar{\mathbf{v}}) = (\alpha + i\beta)(\bar{\mathbf{u}} + i\bar{\mathbf{v}}), \quad A\bar{\mathbf{u}} + iA\bar{\mathbf{v}} = (\alpha\bar{\mathbf{u}} - \beta\bar{\mathbf{v}}) + i(\alpha\bar{\mathbf{v}} + \beta\bar{\mathbf{u}}),$$

откъдето отделяйки реална и имагинерна част получаваме

$$A\bar{\mathbf{u}} = \alpha\bar{\mathbf{u}} - \beta\bar{\mathbf{v}} \quad \text{и} \quad A\bar{\mathbf{v}} = \alpha\bar{\mathbf{v}} + \beta\bar{\mathbf{u}}.$$

Умножавайки скалярно първото с $\bar{\mathbf{v}}$, а второто с $\bar{\mathbf{u}}$, получаваме

$$(5.3) \quad \langle A\bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{v}} \rangle = \alpha\langle \bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{v}} \rangle - \beta\langle \bar{\mathbf{v}}, \bar{\mathbf{v}} \rangle \quad \text{и} \quad \langle A\bar{\mathbf{v}}, \bar{\mathbf{u}} \rangle = \alpha\langle \bar{\mathbf{v}}, \bar{\mathbf{u}} \rangle + \beta\langle \bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{u}} \rangle.$$

От друга страна матрицата A е симетрична, следователно

$$\langle A\bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{v}} \rangle = \bar{\mathbf{v}}^T A\bar{\mathbf{u}} = (\bar{\mathbf{v}}^T A\bar{\mathbf{u}})^T = \bar{\mathbf{u}}^T A^T \bar{\mathbf{v}}^T = \bar{\mathbf{u}}^T A\bar{\mathbf{v}} = \langle A\bar{\mathbf{v}}, \bar{\mathbf{u}} \rangle.$$

Сега изваждайки почленно двете равенства в (5.3) получаваме

$$\beta(\langle \bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{u}} \rangle + \langle \bar{\mathbf{v}}, \bar{\mathbf{v}} \rangle) = 0,$$

което показва, че $\beta = 0$, понеже ако $\langle \bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{u}} \rangle + \langle \bar{\mathbf{v}}, \bar{\mathbf{v}} \rangle = 0$, то ще следва, че $\bar{\mathbf{u}} = \bar{\mathbf{0}}$ и $\bar{\mathbf{v}} = \bar{\mathbf{0}}$, а това противоречи на изискването, че собственият вектор не е нулев. От факта, че $\beta = 0$ веднага се получава, че $A\bar{\mathbf{u}} = \alpha\bar{\mathbf{u}}$ и $A\bar{\mathbf{v}} = \alpha\bar{\mathbf{v}}$, при което поне един от двата вектора $\bar{\mathbf{u}}$ и $\bar{\mathbf{v}}$ е различен от нулевия. ■

Един базис $\bar{\mathbf{h}}_1, \bar{\mathbf{h}}_2, \dots, \bar{\mathbf{h}}_n$ се нарича **ортонормиран**, когато е **ортогонален**, т.е. базисните вектори са взаимно ортогонални,

$$\langle \bar{\mathbf{h}}_i, \bar{\mathbf{h}}_j \rangle = 0 \quad \text{за} \quad i \neq j, \quad i, j = 1, 2, \dots, n,$$

и **нормиран**, т.е. когато всичките базисни вектори имат единична дължина,

$$|\bar{\mathbf{h}}_1| = |\bar{\mathbf{h}}_2| = \dots = |\bar{\mathbf{h}}_n|.$$

В \mathbb{R}^n може да се определи ортонормиран базис, състоящ се само от собствени вектори на дадена симетрична матрица A . Това важно твърдение ще докажем за случая, когато собствените числа на матрицата са различни.

Твърдение 5.8. Нека A е реална симетрична матрица от ред n и нека нейните собствени значения са различни помежду си. Тогава в \mathbb{R}^n може да се намери ортонормиран базис от собствени вектори на A .

Доказателство. Нека реалната симетрична $(n \times n)$ матрица A има различни помежду си собствени значения $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, за които вече знаем че всичките са реални, и нека $\vec{h}_1, \vec{h}_2, \dots, \vec{h}_n$ са съответни собствени вектори. Съгласно твърдение 5.7 те са линейно независими, следователно образуват базис в \mathbb{R}^n понеже $\dim \mathbb{R}^n = n$. Сега ще покажем, че те са взаимно ортогонални помежду си. Да изберем два индекса $i \neq j$, $1 \leq i, j \leq n$. Тогава

$$\lambda_i \langle \vec{h}_i, \vec{h}_j \rangle = \langle A\vec{h}_i, \vec{h}_j \rangle = \langle \vec{h}_i, A\vec{h}_j \rangle = \lambda_j \langle \vec{h}_i, \vec{h}_j \rangle, (\lambda_i - \lambda_j) \langle \vec{h}_i, \vec{h}_j \rangle = 0,$$

следователно $\langle \vec{h}_i, \vec{h}_j \rangle = 0$, понеже $\lambda_i \neq \lambda_j$. По този начин установихме, че те образуват ортогонален базис. Сега веднага се проверява, че векторите

$$\frac{\vec{h}_1}{|\vec{h}_1|}, \frac{\vec{h}_2}{|\vec{h}_2|}, \dots, \frac{\vec{h}_n}{|\vec{h}_n|},$$

образуват ортонормиран базис. ■

Да подредим този ортонормиран базис в стълбове и да разгледаме така получената матрица $U = [\vec{h}_1 \vec{h}_2 \dots \vec{h}_n]$. Тогава непосредствено се проверява, че

$$UU^T = E_n,$$

т.е. $U^{-1} = U^T$. Такива матрици се наричат *ортогонални*. В частност, ако U е ортогонална, то $\det U = \pm 1$, понеже

$$1 = \det E_n = \det(UU^T) = (\det U)(\det U^T) = (\det U)^2.$$

Нека $\vec{h}_1, \vec{h}_2, \dots, \vec{h}_n$ е ортонормираният базис от собствени вектори за симетричната матрица A и нека $U = [\vec{h}_1 \vec{h}_2 \dots \vec{h}_n]$. По условие имаме $U\vec{h}_k = \lambda_k \vec{h}_k$, за всяко $k = 1, 2, \dots, n$, следователно

$$AU = U\Lambda, \text{ където } \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

По този начин доказахме следната основна

Теорема 5.3 (спектрална теорема). Нека A е реална симетрична матрица от ред n . Тогава съществува ортогонална матрица U , за която $U^T A U = \Lambda$, където Λ е диагонална матрица, по главния диагонал на която стоят собствените значения на матрицата A . ■

Теорема 5.3 е доказана строго по-горе за случая, когато собствените значения на A са различни помежду си.

Нека A е $(n \times n)$ матрица и $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^n$ са вектори, зададени чрез техните координати в каноничния базис. Тогава

$$\langle A\vec{a}, \vec{b} \rangle = \vec{b}^T A\vec{a} \text{ и } \langle \vec{a}, A\vec{b} \rangle = (A\vec{b})^T \vec{a} = \vec{b}^T A^T \vec{a},$$

следователно винаги е налице равенството $\langle A\vec{a}, \vec{b} \rangle = \langle \vec{a}, A^T \vec{b} \rangle$. В частност, ако A е симетрична, то $\langle A\vec{a}, \vec{b} \rangle = \langle \vec{a}, A\vec{b} \rangle$.

Нека сега U е $(n \times n)$ ортогонална матрица. Тогава

$$\langle U\vec{a}, U\vec{b} \rangle = \langle \vec{a}, U^T U \vec{b} \rangle = \langle \vec{a}, E_n \vec{b} \rangle = \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle,$$

следователно преобразуването на векторите посредством ортогонална матрица запазва скаларното произведение, което е най-важното свойство на ортогоналните матрици. В частност се запазват и дължините на векторите, понеже

$$|U\vec{a}| = \sqrt{\langle U\vec{a}, U\vec{a} \rangle} = \sqrt{\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle} = |\vec{a}|.$$