Лекция 8

§8. Криви от втора степен в равнината

1. Канонични уравнения. Ще разглеждаме равнина в която е зададена положително ориентирана правоъгълна координатна система. Крива от втора степен γ се нарича множеството от точки (x, y) в равнината, които удовлетворяват уравнението

(8.1) $\quad \gamma : ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$,

където a, b, c, d, e и f са коефициенти, за които $|a| + |b| + |c| > 0$, т.е. поне един от коефициентите a, b или c е различен от нула. Кривите от втора степен се разделят на три основни типа, елиптичен, хиперболичен и параболичен тип. Всеки от тези типове притежава характерен каноничен представител, който ще разгледаме по надолу.

Елипса. Каноничното уравнение на елипса има вида

(8.2) $\quad \mathbf{E} : \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$,

където $a > 0$ и $b > 0$ се наричат ***полуоси*** на елипсата. Елипсата представлява затворена крива подобна на окръжност (рис. 8.1). Когато полуосите са равни, $a = b = r$, то елипсата (8.2) представлява окръжност с център в началото на координатната система и радиус r.

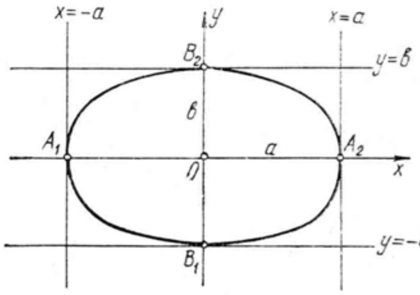

Рис. 8.1.

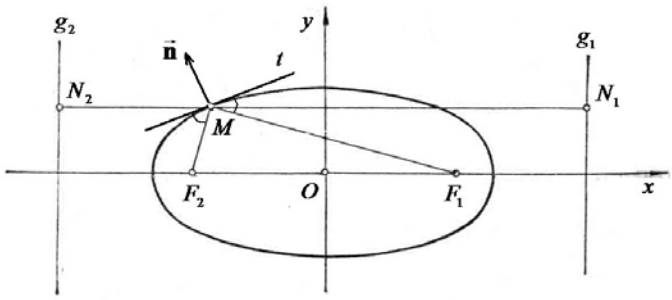

Рис. 8.2.

От уравнението (8.2) следва, че

$$\frac{y^2}{b^2} \le 1 \text{ и } \frac{x^2}{a^2} \le 1,$$

откъдето се вижда, че елипсата $\mathbf{E}$ се вмества в правоъгълника със страни $y = \pm b$ и $x = \pm a$. Освен това $\mathbf{E}$ е ***симетрична*** както спрямо оста Ox така и спрямо оста Oy. Точките $A_1(-a, 0)$, $A_2(a, 0)$, $B_1(0, -b)$ и $B_2(0, b)$ се наричат ***върхове*** на елипсата. В общия случай всяка елипса има ***център***, който за елипсата $\mathbf{E}$ съвпада с началото на координатната система O.

Случаят $a = b$ съответства на добре известната крива окръжност, затова по-нататък ще предполагаме, че $a \ne b$. За определеност да предположим, че $a > b$ и да положим $c = \sqrt{a^2 - b^2}$. Точките $F_1(c, 0)$ и $F_2(-c, 0)$ се наричат ***фокуси*** на елипсата, а правите, успоредни на координатната ос Oy, с уравнения $g_1 : x = \dfrac{a^2}{c}$ и $g_2 : x = -\dfrac{a^2}{c}$ се наричат ***директриси***. Нека $M(x, y)$ е някаква текуща точка от елипсата $\mathbf{E}$. Да прекараме през M права успоредна на оста Ox до пресичане с директрисите в точките N_1 и N_2. Допирателната права $\mathbf{t}$ през точката M има координатно уравнение

$$\mathbf{t} : \frac{Xx}{a^2} + \frac{Yy}{b^2} = 1,$$

относно текущите координати, означени с X и Y. Тази допирателна има нормален вектор $\vec{\mathbf{n}}\left(\dfrac{x}{a^2},\dfrac{y}{b^2}\right)$, за който лесно се съобразява, че винаги сочи навън (рис. 8.2).

Твърдение 8.1. Елипсата има следните основни геометрични свойства.
1) Сборът на разстоянията от всяка точка $M \in \mathbf{E}$ до двата фокуса е постоянно,
(8.3) $\quad MF_1 + MF_2 = 2a$.
2) Отношението между разстоянието от всяка точка $M \in \mathbf{E}$ до някой фокус и разстоянието от M до съответната директриса е постоянно,
(8.4) $\quad \dfrac{MF_1}{MN_1} = \dfrac{MF_2}{MN_2} = \dfrac{c}{a}$.
3) Допирателната $\mathbf{t}$ сключва равни ъгли с двете прави, определени от точка M и двата фокуса F_1 и F_2, $\angle(\mathbf{t}, MF_1) = \angle(\mathbf{t}, MF_2)$.

Доказателство. **1**) По определение разстоянието между точката $M(x,y) \in \mathbf{E}$ и фокуса $F_1(c,0)$ се дава по формулата $MF_1 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$, откъдето след преобразуване, отчитайки равенствата

$$c^2 = a^2 - b^2 \text{ и } y^2 = b^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2,$$

последователно намираме

$$MF_1 = \sqrt{x^2 - 2xc + c^2 + y^2} = \sqrt{x^2 - 2xc + c^2 + b^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2} = \sqrt{x^2\left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right) - 2xc + c^2 + b^2},$$

$$MF_1 = \sqrt{x^2\frac{a^2 - b^2}{a^2} - 2xc + a^2} = \sqrt{\left(\frac{xc}{a} - a\right)^2} = \frac{\left|xc - a^2\right|}{a} = \frac{a^2 - xc}{a},$$

понеже от $|x| \le a$ и $c < a$ следва, че $|xc| < a^2$. Разсъждавайки по същия начин, за другото разстояние намираме

$$MF_2 = \frac{a^2 + xc}{a},$$

следователно

$$MF_1 + MF_2 = \frac{a^2 - cx}{a} + \frac{a^2 + cx}{a} = \frac{2a^2}{2} = 2a,$$

което доказва равенството (8.3).

2) Веднага се вижда, че разстоянията от точката $M(x,y)$ до директрисите $g_1 : x = \dfrac{a^2}{c}$ и $g_2 : x = -\dfrac{a^2}{c}$ се определят по формулите

$$MN_1 = \left|\frac{a^2}{c} - x\right| = \frac{a^2 - cx}{c} \text{ и } MN_2 = \left|-\frac{a^2}{c} - x\right| = \frac{a^2 + cx}{c},$$

следователно

$$\frac{MF_1}{MN_1} = \frac{\dfrac{a^2 - cx}{a}}{\dfrac{a^2 - cx}{c}} = \frac{c}{a} \text{ и } \frac{MF_2}{MN_2} = \frac{\dfrac{a^2 + cx}{a}}{\dfrac{a^2 + cx}{c}} = \frac{c}{a},$$

което доказва равенството (8.4).

3) Ще докажем, че нормалният вектор $\vec{\mathbf{n}}\left(\frac{x}{a^2},\frac{y}{b^2}\right)$ към допирателната $\mathbf{t}$, сключва равни ъгли с векторите $\overrightarrow{MF_1}(x-c,y)$ и $\overrightarrow{MF_2}(x+c,y)$. От правилото за определяне ъгъл между два вектора получаваме

$$\cos\left[\angle\left(\vec{\mathbf{n}},\overrightarrow{MF_1}\right)\right]=\frac{\vec{\mathbf{n}}\overrightarrow{MF_1}}{|\vec{\mathbf{n}}|\left|\overrightarrow{MF_1}\right|}=\frac{\frac{x}{a^2}(x-c)+\frac{y}{b^2}y}{|\vec{\mathbf{n}}|\frac{a^2-cx}{a}}=\frac{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{cx}{a^2}}{|\vec{\mathbf{n}}|\frac{a^2-cx}{a}}=\frac{1-\frac{cx}{a^2}}{|\vec{\mathbf{n}}|\frac{a^2-cx}{a}}=\frac{\frac{a^2-cx}{a^2}}{|\vec{\mathbf{n}}|\frac{a^2-cx}{a}},$$

$$\cos\left[\angle\left(\vec{\mathbf{n}},\overrightarrow{MF_2}\right)\right]=\frac{\vec{\mathbf{n}}\overrightarrow{MF_2}}{|\vec{\mathbf{n}}|\left|\overrightarrow{MF_2}\right|}=\frac{\frac{x}{a^2}(x+c)+\frac{y}{b^2}y}{|\vec{\mathbf{n}}|\frac{a^2+cx}{a}}=\frac{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{cx}{a^2}}{|\vec{\mathbf{n}}|\frac{a^2-cx}{a}}=\frac{1+\frac{cx}{a^2}}{|\vec{\mathbf{n}}|\frac{a^2+cx}{a}}=\frac{\frac{a^2+cx}{a^2}}{|\vec{\mathbf{n}}|\frac{a^2+cx}{a}},$$

откъдето намираме

$$\cos\left[\angle\left(\vec{\mathbf{n}},\overrightarrow{MF_1}\right)\right]=\cos\left[\angle\left(\vec{\mathbf{n}},\overrightarrow{MF_2}\right)\right]=\frac{1}{|\vec{\mathbf{n}}|a},$$

което доказва третото свойство, понеже и двата ъгъла са по-големи от $\frac{\pi}{2}$. ■

Числото $e=\frac{c}{a}$ се нарича ***ексцентрицитет*** (сплеснатост) на елипсата. При елипсата винаги е изпълнено $0\le e<1$.

В горните разсъждения беше важно условието $a>b$. Ако е налице другия случай $b>a$, то разсъжденията се повтарят по очевиден начин, при което елипсата $\mathbf{E}$ вече е сплесната по координатната ос Oy, която съдържа двата фокуса.

Хипербола. Каноничното уравнение на хиперболата има вида

(8.5) $\quad \mathbf{H}:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,$

където $a>0$ и се нарича ***реална полуос***, а $b>0$ се нарича ***имагинерна полуос*** на хиперболата. Хиперболата представлява отворена крива с два клона (рис. 8.3). Правите $l_1: y=\frac{b}{a}x$ и $l_2: y=-\frac{b}{a}x$ се наричат ***асимптоти*** на хиперболата.

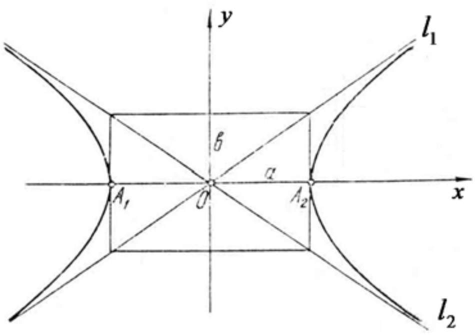

Рис. 8.3.

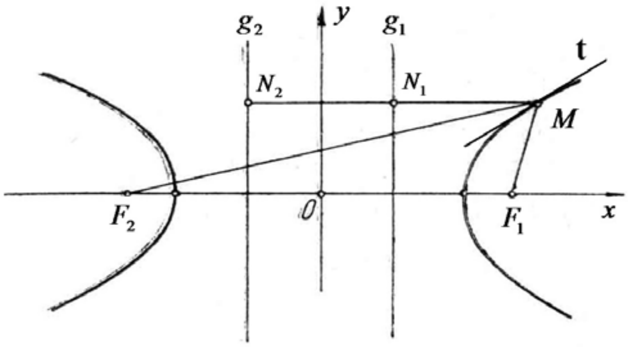

Рис. 8.4.

От уравнението (8.5) следва, че

$$\frac{x^2}{a^2}\ge 1,$$

откъдето се вижда, че хиперболата $\mathbf{H}$ е разположена извън правоъгълника със страни $y=\pm b$ и $x=\pm a$ между двете асимптоти l_1 и l_2. Хиперболата $\mathbf{H}$ също е ***симетрична*** както спрямо оста Ox така и спрямо оста Oy. Точките $A_1(-a,0)$, $A_2(a,0)$ се наричат ***върхове*** на елипсата. Центърът на хиперболата $\mathbf{H}$ също съвпада с началото на координатната система O.

Да положим $c=\sqrt{a^2+b^2}$. Точките $F_1(c,0)$ и $F_2(-c,0)$ се наричат ***фокуси*** на хиперболата, а правите, успоредни на координатната ос Oy, с уравнения $g_1 : x=\frac{a^2}{c}$ и $g_2 : x=-\frac{a^2}{c}$ се наричат ***директриси***. Нека $M(x,y)$ е някаква текуща точка от десния клон на (за левия клон разсъжденията са аналогични) елипсата $\mathbf{E}$. Да прекараме през M права успоредна на оста Ox до пресичане с директрисите в точките N_1 и N_2. Допирателната права $\mathbf{t}$ през точката M има координатно уравнение

$$\mathbf{t} : \frac{Xx}{a^2}-\frac{Yy}{b^2}=1,$$

относно текущите координати X и Y.

Разсъждавайки по същия начин както при доказателството на твърдение 8.1 се получава верността на

Твърдение 8.2. Хиперболата има следните основни геометрични свойства.
1) Разликата на разстоянията от всяка точка $M\in\mathbf{E}$ до двата фокуса е постоянно, $MF_2-MF_1=2a$ за M е от десния клон $MF_1-MF_2=2a$ за M е от левия клон (рис. 8.3).
2) Отношението между разстоянието от всяка точка $M\in\mathbf{E}$ до някой фокус и разстоянието от M до съответната директриса е постоянно,

$$\frac{MF_1}{MN_1}=\frac{MF_2}{MN_2}=\frac{c}{a}.$$

3) Допирателната $\mathbf{t}$ сключва равни ъгли с двете прави, определени от точка M и двата фокуса F_1 и F_2, $\angle(\mathbf{t},MF_1)=\angle(\mathbf{t},MF_2)$. ■

Числото $e=\frac{c}{a}$ се нарича ***ексцентрицитет*** на хиперболата. При хиперболата винаги е изпълнено $e>1$.

Хиперболата

$$\mathbf{H}^* : \frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1$$

се нарича ***спрегната*** на $\mathbf{H}$. Тя има аналогични свойства, но в този случай ролите на осите Ox и Oy са разменени. Асимптотите остават непроменени, но фокусите вече лежат върху оста Oy.

Парабола. Параболата ще разгледаме при следното канонично уравнение

$$\mathbf{P} : y^2=2px,$$

където $p>0$ е параметър. Параболата е отворена крива с един клон (рис. 8.5). Точката $F\left(\frac{p}{2},0\right)$ се нарича ***фокус*** на параболата, а вертикалната права $g : x=-\frac{p}{2}$ се нарича ***директриса***. В този случай точката O – началото на координатната система, се явява ***връх*** на параболата. Нека точка $M(x,y)$ е текуща точка от параболата $\mathbf{P}$. Да прекараме през M права l, успоредна на оста Ox до пресичане с директрисата g в точка N. Тогава дължината на отсечката MN се явява разстоянието между точката M и правата g. Допирателната права $\mathbf{t}$ през точката M има координатно уравнение

(8.6) $\mathbf{t}: Xp - Yy + px = 0$,

относно текущите координати X и Y.

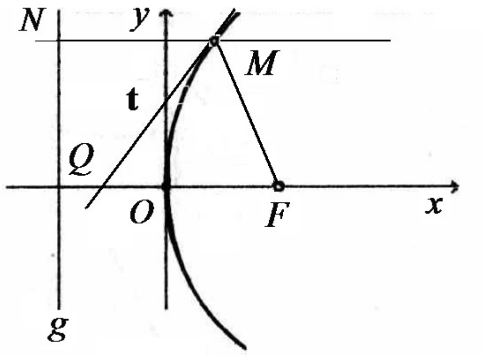

Рис. 8.5

Твърдение 8.3. Параболата $\mathbf{P}$ има следните основни геометрични свойства.
1) Разстоянието от всяка точка $M \in \mathbf{P}$ до фокуса F е равно на разстоянието от точката M до директрисата g, $MF = MN$ (рис. 8.5).
2) Допирателната $\mathbf{t}$ сключва равни ъгли с правата l и вектора $\overrightarrow{MF}$.

Доказателство. **1**) За разстоянието между точката $M(x, y)$ и фокуса $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$, отчитайки равенството $y^2 = 2px$, намираме

$$MF = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = \sqrt{x^2 - px + \frac{p^2}{4} + y^2} = \sqrt{x^2 - px + \frac{p^2}{4} + 2px} = \sqrt{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2} ,$$

$$MF = x + \frac{p}{2},$$

което е равно точно на разстоянието между точката M и директрисата g.

2) Нека Q е точката, в която допирателната $\mathbf{t}$ пресича оста Ox. От уравнението на допирателната (8.6) веднага намираме, че точката Q има координати $Q(-x, 0)$, следователно дължината на страната FQ в ΔFQM е равна на $x + \frac{p}{2}$, колкото е и дължината на другата страна FM. По този начин триъгълникът ΔFQM се оказа равнобедрен, $FM = FQ$, което означава, че $\angle FQM = \angle FMQ$, което доказва твърдението. ■

2. Оптични свойства на елипсата, хиперболата и параболата. От свойствата, свързани с допирателната, формулирани в твърдения 8.1, 8.2 и 8.3 произтичат някои много важни за приложенията характеристики на изброените криви, свързани с физичните закони на отражение на вълни (светлинни, електромагнитни и т.н.). При светлинните лъчи ъгълът на падане е равен на ъгъла на отражение.

Отражението в точка от дадена крива става по същия начин както в допирателната права в тази точка, следователно един лъч с източник в единия фокус на елипсата, след отражение по вътрешната повърхност, ще премине през другия фокус (рис. 8.6), а един лъч през единия фокус на хиперболата, след отражение по вътрешната повърхност, ще продължи по права, чието продължение преминава през другия фокус (рис. 8.7). Тези свойства позволяват изработка на оптични или антенни устройства с желани характеристики на фокусиране.

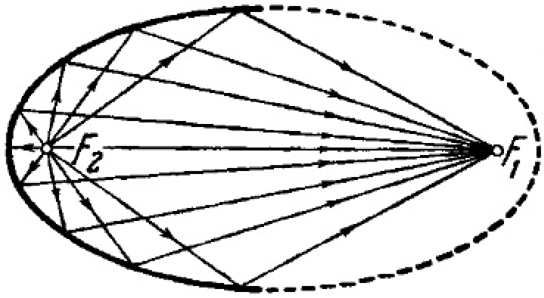

Рис. 8.6.

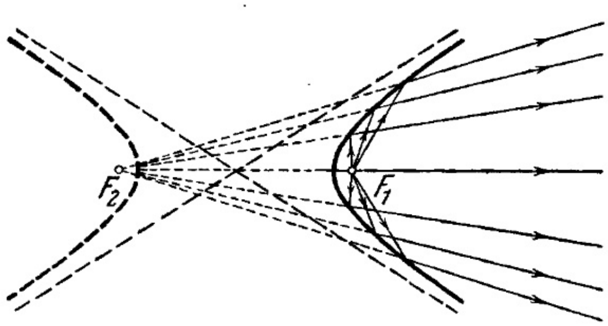

Рис. 8.7.

При параболата

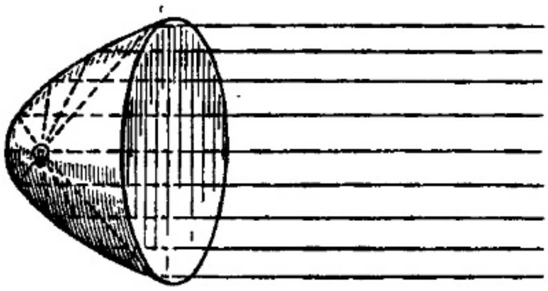
Рис. 8.8.

един лъч с източник във фокуса, след отражение по вътрешната повърхност, ще продължи по направление успоредна на оста Ox (рис. 8.8), което обърнато означава, че сноп лъчи, успоредни на оста Ox, след отражение, ще преминат през фокуса на параболата. Последният факт обуславя изработката на параболичните антени приемници, които усилват сигнали от точкови източници.

3. Канонизация на равнинни криви от втора степен. Каноничните уравнения на елипсата, хиперболата и параболата зависят от избора на координатната система. От друга страна тези криви представляват множества от точки в равнината и техните основни свойства се запазват по същество във всяка координатна система. Тук ще установим начин за определяне типа на една крива от втора степен, когато е зададена в общата форма (8.1),

(8.7) $\quad \gamma : ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0, \ |a| + |b| + |c| > 0,$

като отначало ще се спрем на частни случаи. Случаят, когато $b = 0$ се оказва сравнително елементарен за изследване, когато са налице условията $a \neq 0$ и $c \neq 0$, което изследване ще покажем върху примери. Да разгледаме кривата γ, определена от уравнението

$$\gamma : 2x^2 + 3y^2 - 5 = 0.$$

Тази крива представлява елипса, понеже лесно се записва във вида

$$\gamma : \frac{x^2}{\left(\sqrt{\frac{5}{2}}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\sqrt{\frac{5}{3}}\right)^2} = 1,$$

при това голямата полуос е по оста Ox, върху която лежат двата фокуса. Кривата

$$\gamma : 3x^2 - 5y^2 - 7 = 0$$

представлява хипербола, понеже можем да я запишем във вида

$$\gamma : \frac{x^2}{\left(\sqrt{\frac{7}{3}}\right)^2} - \frac{y^2}{\left(\sqrt{\frac{7}{5}}\right)^2} = 1 .$$

За да изследваме кривата

$$\gamma : 2x^2 + y^2 + 4x - 2y - 2 = 0 ,$$

отначало ще групираме в точни квадрати,

$$\gamma : 2(x+1)^2 + (y-1)^2 - 5 = 0 ,$$

което записваме във вида

$$\gamma : 2\frac{(x+1)^2}{\left(\sqrt{\frac{5}{2}}\right)^2} + \frac{(y-1)^2}{(\sqrt{5})^2} = 1 .$$

Последното представлява елипса, ориентирана по координатните оси, чийто център обаче се намира в точката $O'(-1,1)$. Ако извършим ***транслация*** на координатната система по формулите $x = x' - 1$ и $y = y' + 1$, то в новата координатна система $O'x'y'$, с оси $O'x'$ и $O'y'$ успоредни съответно на осите Ox и Oy, то тази елипса ще има за център началото на новата координатна система O'.

Дадените примери добре показват, че ***когато*** $b = 0$ ***и*** $ac \neq 0$ ***се получават хиперболи или елипси***, при което е възможно да се стигне до следните изключения.

1) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$, елипсата се изражда в точка.

2) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$, кривата не съдържа точки (***имагинерна елипса***).

3) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$, хиперболата се изражда в две прави, които в разгледания по-горе типичен случай представляват асимптотите на хиперболата.

Случаите когато $a = 0$ или $b = 0$, се изследват аналогично, при което се получават ***параболи***. Например за кривата

$$\gamma : y^2 - 2x - 4y + 6 = 0 ,$$

след отделяне на точен квадрат получаваме уравнението

$$\gamma : (y-1)^2 = 2(x-1),$$

което определя елипса с връх в точката $O'(1,1)$. Тук могат да възникнат следните изключения.

1) $y^2 = a^2$ или $x^2 = a^2$, параболата се изражда в две прави, които се сливат при $a = 0$.

2) $y^2 = -a^2$ или $x^2 = -a^2$, $a \neq 0$, кривата не съдържа точки.

Описаните по-горе изключения трябва да се схващат като ***канонични случаи*** при една пълна класификация на кривите от втора степен.

Трудният случай се получава, когато коефициентът b в уравнението (8.7) е различен от нула. Нека $b \neq 0$. Ще покажем, че в този случай може да се избере друга координатна система $Ox'y'$, получена след завъртане на старата координатна система Oxy около началото на някакъв ъгъл φ (рис. 8.9), при която в кривата γ определена от (8.7) коефициентът пред произведението на двете променливи е нула.

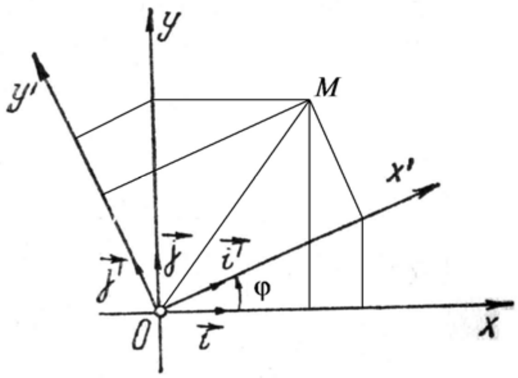

Рис. 8.9.

В този случай се казва, че извършваме ***ротация*** (въртене) на координатната система. Преди всичко да намерим връзка между старите и новите координати на дадена точка M. От рис. 8.9, посредством правилата за решаване на правоъгълен триъгълник, намираме, че

$$x = x'\cos\varphi - y'\sin\varphi$$
$$y = x'\sin\varphi + y'\cos\varphi$$

където (x, y) са координатите на точката M в координатната система Oxy, а (x', y') са координатите на същата точка в координатната система $Ox'y'$. Последните формули могат да се запишат в матричен вид

(8.8) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = H\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, където $H = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$.

Уравнението на самата крива (8.7) може да се запише във вид на ***квадратична форма***,

(8.9) $\gamma : (x, y)A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + (d, e)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + f = 0$, където $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$.

Умноженията са по правилото "ред по стълб", а матрицата A е ***симетрична,*** $A^T = A$. След транспониране, равенството (8.8) дава

$(x, y) = (x', y')H^T$, където $H^T = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$.

За матрицата H непосредствено се проверява, че $HH^T = E_2$, където E_2 е единичната матрица от ред 2, следователно $H^{-1} = H^T$, което означава, че H е ортогонална матрица. Една квадратна матрица от ред n с реални елементи се нарича ***ортогонална***, когато нейната обратна съвпада с нейната транспонирана.

Сега като заместим в (8.9), за уравнението на кривата γ в новите координати (x', y') получаваме

$$\gamma : (x', y')H^T AH\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + (d, e)H\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + f = 0,$$

(8.10) $\gamma : (x', y')A'\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + (d', e')\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + f = 0$,

където

$$A' = H^T AH = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \text{ и } (d', e') = (d, e)H.$$

Матрицата A' също е симетрична, понеже $A'^T = \left(H^T A H\right)^T = H^T A^T H^{TT} = H^T A H$. След извършване на матричните умножения, получаваме A' във вида

(8.11) $$A' = \begin{pmatrix} a\cos^2\varphi + c\sin^2\varphi + b\sin 2\varphi & b\cos 2\varphi + (c-a)\sin\varphi\cos\varphi \\ b\cos 2\varphi + (c-a)\sin\varphi\cos\varphi & c\cos^2\varphi + a\sin^2\varphi - b\sin 2\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a' & b' \\ b' & c' \end{pmatrix}.$$

Сега от формата (8.10), за уравнението на кривата γ в новите координати намираме

(8.12) $$\gamma : a'x^2 + 2b'xy + c'y^2 + d'x' + e'y' + f = 0,$$

където a', b' и c' са съответните елементи на матрицата A', а d' и e' са другите нови коефициенти . Последното показва, че смяната на координатната система чрез ротация не променя основния вид на уравнението. За коефициента b' имаме

(8.13) $$b' = b\cos 2\varphi + (c-a)\sin\varphi\cos\varphi = b\cos 2\varphi + \frac{(c-a)}{2}\sin 2\varphi.$$

Ъгълът φ ще изберем от условието $b' = 0$, което съгласно (8.13) е еквивалентно на

(8.14) $$\operatorname{cotg} 2\varphi = \frac{c-a}{2b},\ b \neq 0.$$

Последното уравнение винаги има решение φ, определено в отворения интервал $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ и в този интервал решението е единствено.

Нека φ е избрано такова, че $b' = 0$. Тогава в новите координати кривата има уравнение

$$\gamma : a'x^2 + c'y^2 + d'x' + e'y' + f = 0,$$

което вече знаем как да изследваме, ако са известни неговите коефициенти. От друга страна имаме съотношението $H^T A H = A'$, което след умножение отдясно с H приема вида $AH = HA'$,

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a' & 0 \\ 0 & c' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a'\cos\varphi & -c'\sin\varphi \\ a'\sin\varphi & c'\cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Последното, записано по стълбовете на матрицата H, дава двете равенства

(8.15) $$\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix} = a'\begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix} = b'\begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix}$$

или още

$$\begin{pmatrix} a-a' & b \\ b & c-a' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} a-c' & b \\ b & c-c' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Тук имаме две линейни хомогенни системи, които имат ненулево решение. Това е възможно единствено когато техните детерминанти са нули,

$$\det\begin{pmatrix} a-a' & b \\ b & c-a' \end{pmatrix} = 0 \text{ и } \det\begin{pmatrix} a-c' & b \\ b & c-c' \end{pmatrix} = 0,$$

което означава, че a' и c' са ***решенията на квадратното уравнение***

$$\det\begin{pmatrix} a-z & b \\ b & c-z \end{pmatrix} = 0,$$

което се явява характеристичното уравнение на матрицата A, което е удобно да запишем чрез ***характеристичния полином*** $\chi(z)$

$$\chi(z) = \det\begin{pmatrix} a-z & b \\ b & c-z \end{pmatrix} = \det\left(A - zE_2\right) = 0.$$

С други думи, a' и c' са ***собствените значения*** на матрицата A. До последния извод можехме да достигнем и по следния начин. Имаме $A' = H^T A H$, което е еквивалентно на $A = HA'H^T$ и освен това $HH^T = E_2$. Преобразуваме

$$\chi(z) = \det(A - zE_2) = \det(HA'H^T - zE_2) = \det(HA'H^T - zHH^T) = \det(H(A' - zE_2)H^T),$$

$$\chi(z) = (\det H)\det(A' - zE_2)(\det H^T) = \det(A' - zE_2) = \det\begin{pmatrix} a' - z & 0 \\ 0 & c' - z \end{pmatrix},$$

$$\chi(z) = (z - a')(z - c').$$

Равенствата (8.15) означават, че векторите

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix}$$

са ***собствени вектори*** на матрицата A, отговарящи на собствените значения a' и c'.

От тук в частност следва, че $\chi(0) = \det A = a'c'$, т.е. произведението на двете собствени числа на A е равно на стойността на детерминантата.

Направеното дотук изследване показва, че за да получим кривата посредством каноничното и уравнение в общия случай се налага да извършим ротация и транслация на координатната система.

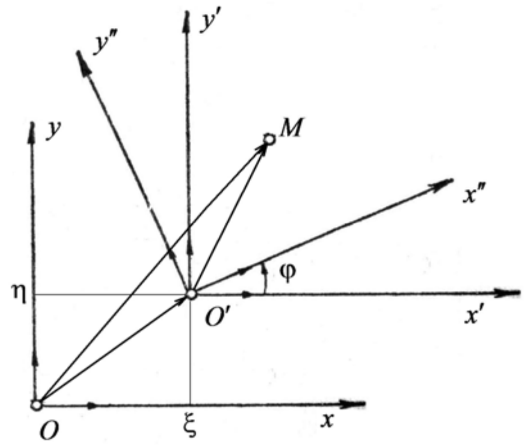

Рис. 8.10.

Транслацията $x = x' + \xi$, $y = y' + \eta$, при която се преминава към нова координатна система $O'x'y'$, чието начало O' има координати (ξ, η) в системата Oxy, и ротацията

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix},$$

при която се преминава към нова координатна система $O'x''y''$, получена от $O'x'y'$ след завъртане на ъгъл φ (рис. 8.10), могат да бъдат разглеждани заедно като едно ***преобразуване на еднаквост***, при следната връзка между координатите на точките

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix}.$$