КУРСОВА РАБОТА ПО ЛИНЕЙНА АЛГЕБРА И АНАЛИТИЧНА ГЕОМЕТРИЯ

Решенията се подготвят задължително в ръкописен вид и се поднасят за проверка при заверка на семестъра и по време на изпита. След представяне на курсовата работа се провежда събеседване върху решенията на задачите.

Курсовата работа се приема за успешна, когато обучаемият умее да обяснява основните идеи на представените решения.

Задача 1.

а) Пресметнете $\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^{20}$.

б) Решете уравнението $z^6 = 1 + i\sqrt{3}$.

в) Намерете частното и остатъка от делението на полинома

$$f(x) = x^7 - 3x^5 + x^4 - 2x^3 + 3x - 2$$

с полинома $g(x) = x^2 + x + 1$.

г) Разложете на множители полинома $f(x) = x^6 + 2x^3 + 1$.

Задача 2.

а) Пресметнете детерминантата

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 8 & 7 & -2 \\ 2 & -1 & 8 \end{vmatrix}.$$

б) Пресметнете детерминантата

$$\begin{vmatrix} 8 & 7 & 2 & 10 \\ -8 & 2 & 7 & 10 \\ 4 & 4 & 4 & 5 \\ 0 & 4 & -3 & 2 \end{vmatrix}.$$

в) Пресметнете детерминантата

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 6 \end{vmatrix}.$$

г) Решете уравнението

$$\begin{vmatrix} 3 & x & -x \\ 2 & -1 & 3 \\ x+10 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Задача 3.

а) Намерете матрицата $f(A)$, където

$$f(x) = 3x^2 - 2x + 1,\ A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \end{pmatrix}.$$

б) Намерете обратната матрица A^{-1}, където

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

в) Намерете обратната матрица A^{-1}, където

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -4 & -3 \\ 0 & 6 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

г) Решете системата посредством формулите на Крамер

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 2 \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 &= -1 \\ x_1 - x_2 &= 3 \\ x_3 - x_4 &= 1 \end{aligned}$$

д) Решете матричното уравнение

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}.$$

е) Решете матричното уравнение

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 10 & 2 & 7 \\ 10 & 7 & 8 \end{pmatrix}.$$

ж) Решете матричното уравнение

$$X \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ -5 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 9 & 0 \\ -8 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

з) Намерете всички матрици X, за които $AX = XA$, където

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Задача 4.

а) Намерете ранга на матрицата

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 2 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 4 & -3 & 8 & -1 & 11 \end{pmatrix}.$$

б) Намерете стойностите на параметъра λ, за които матрицата

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & -1 & 2 \\ 2 & -1 & \lambda & 5 \\ 1 & 10 & -6 & \lambda \end{pmatrix}$$

има максимален ранг.

в) Намерете общото решение на системата

$$2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 6$$
$$2x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 4$$
$$9x_1 + 4x_2 + x_3 + 7x_4 = 2$$

г) Намерете общото решение на системата

$$x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 1$$
$$2x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 + 3x_5 = 2$$
$$3x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 1$$

д) Намерете фундаментална система от решения и общото решение на системата

$$3x_1 + x_2 - 8x_3 + 2x_4 + x_5 = 0$$
$$2x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 7x_4 + 2x_5 = 0$$

Задача 5. Намерете собствените числа и съответни собствени вектори за матрицата

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Задача 6. Нека $\vec{\mathbf{a}} = 2\vec{\mathbf{i}} + 3\vec{\mathbf{j}} - \vec{\mathbf{k}}$, $\vec{\mathbf{b}} = \vec{\mathbf{i}} - 2\vec{\mathbf{j}} + 3\vec{\mathbf{k}}$ и $\vec{\mathbf{c}} = 3\vec{\mathbf{i}} + \vec{\mathbf{j}} - 2\vec{\mathbf{k}}$.

а) Намерете скаларното произведение $\vec{\mathbf{a}}\vec{\mathbf{b}}$.

б) Намерете векторното произведение $\vec{\mathbf{b}} \times \vec{\mathbf{c}}$.

в) Намерете смесеното произведение $(\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}}, \vec{\mathbf{c}})$.

г) Намерете лицето на триъгълника с върхове $M_1(1,1,1)$, $M_2(-1,2,0)$ и $M_3(2,4,1)$.

д) Намерете обема на тетраедър с върхове $M_1(1,-1,2)$, $M_2(0,-1,0)$, $M_3(2,-2,1)$ и $M_4(1,1,-3)$.

Задача 7. Напишете общото, каноничното и параметричното уравнение на следните равнинни прави.

а) Права g през точката $M_0(-1,2) \in g$ и нормален вектор $\vec{\mathbf{N}}(2,2) \perp g$.

б) Права g през точката $M_0(1,1) \in g$ и направляващ вектор $\vec{\mathbf{a}}(0,-1) \parallel g$.

в) Права g през точките $M_1(2,-1) \in g$ и $M_2(1,3) \in g$.

г) Права g, намираща се на разстояние $\sqrt{10}$ от точката $M_0(5,4)$ и перпендикулярна на правата $2x + 6y - 3 = 0$.

Задача 8. Намерете общото и параметричното уравнение на следните равнинни.

а) Равнина α през точката $M_0(1,2,-1) \in \alpha$ с нормален вектор $\vec{\mathbf{N}}(2,0,-1) \perp \alpha$.

б) Равнина α през точката $M_0(1,1,1)$, успоредна на векторите $\vec{\mathbf{a}}(0,1,2) \parallel \alpha$ и $\vec{\mathbf{b}}(-1,0,1) \parallel \alpha$.

в) Равнина α през трите точки $M_1(1,2,0) \in \alpha$, $M_2(2,1,1) \in \alpha$ и $M_3(3,0,1) \in \alpha$.

г) Равнина α през точката $M_0(1,2,1)$, отсичаща правилен тетраедър от първи октант.

Задача 9. Напишете каноничното и параметричното уравнение на следните пространствени прави.

а) Права g, получена от сечението на равнините

$$\alpha : 2x - y + 2z - 3 = 0 \text{ и } \beta : x + 2y - z - 1 = 0.$$

б) Права g през точката $M_0(2,0,-3) \in g$ с направляващ вектор $\vec{\mathbf{a}}(2,-3,5) \parallel g$.

в) Права g през двете точки $M_1(1,-2,1) \in g$ и $M_2(3,1,-1) \in g$.

г) Права g през точката $M_0(1,1,1)$, която се намира на разстояние 1 от началото $O(0,0,0)$.

Задача 10. Напишете уравнението на оста на правите

$$g_1 : \frac{x-6}{3} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z+3}{4} \text{ и } g_2 : \frac{x+1}{3} = \frac{y+7}{-3} = \frac{z-4}{8}$$

и намерете разстоянието между g_1 и g_2.