

Лекция 11

§11. Функции на много променливи. Формула на Тейлор

1. **Топология на \mathbb{R}^n .** Точка $\mathbf{x}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ в n -мерното евклидово пространство \mathbb{R}^n наричаме вектора $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, а числото x_k , $k = 1, 2, \dots, n$, е неговата k -та координата. Чрез тези координати векторът се представя като линейна комбинация $\mathbf{x} = x_1 \mathbf{e}^{(1)} + x_2 \mathbf{e}^{(2)} + \dots + x_n \mathbf{e}^{(n)}$ в каноничния базис, $\mathbf{e}^{(1)}(1, 0, \dots, 0)$, $\mathbf{e}^{(2)}(0, 1, \dots, 0)$, ..., $\mathbf{e}^{(n)}(0, 0, \dots, 1)$. Свойствата на векторите и линейните операции в \mathbb{R}^n са познати от курса по линейна алгебра. Линейните операции събиране и умножение се извършават почленно. Ако $\mathbf{x}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $\mathbf{y}(y_1, y_2, \dots, y_n)$, са два вектора от \mathbb{R}^n , то

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n) \text{ и } \lambda \mathbf{x} = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n), \lambda \in \mathbb{R}.$$

Разстоянието между двете точки \mathbf{x} и \mathbf{y} се определя по формулата

$$\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}.$$

В случая, когато $n = 1$ се получава права (числова ос), в случая $n = 2$ имаме геометрична равнина, при $n = 3$ – геометрично пространство. За по-големи стойности на n , \mathbb{R}^n няма естествена геометрична интерпретация. Геометрията в \mathbb{R}^n се определя от наличието на (канонично) **скалярно произведение**

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n.$$

Скалярното произведение има следните основни свойства:

- 1) $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \geq 0$, и ако $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 0$, то $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, където $\mathbf{0} = (0, 0, \dots, 0)$ е нулевият вектор на \mathbb{R}^n ;
- 2) $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle$ -- симетричност;
- 3) $\langle \lambda_1 \mathbf{x}^{(1)} + \lambda_2 \mathbf{x}^{(2)} + \dots + \lambda_m \mathbf{x}^{(m)}, \mathbf{y} \rangle = \lambda_1 \langle \mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{y} \rangle + \lambda_2 \langle \mathbf{x}^{(2)}, \mathbf{y} \rangle + \dots + \lambda_m \langle \mathbf{x}^{(m)}, \mathbf{y} \rangle$ -- линейност.

От симетричността следва, че скалярното произведение е линейно и по втория аргумент. Ако разгледаме векторите като стълбове, то скалярното произведение може да се запише чрез транспониране на втория множител като $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \mathbf{y}^T \mathbf{x}$, а умножението е по известното правило "ред по стълб".

Дължината на вектора \mathbf{x} (модул на вектора \mathbf{x}), по аналогия с геометричните пространства \mathbb{R}^2 и \mathbb{R}^3 , се определя по формулата

$$|\mathbf{x}| = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2},$$

което се нарича **норма на вектора \mathbf{x} , породена от скалярното произведение**.

Твърдение 11.1 (неравенство на Коши). За всеки два вектора $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ е изпълнено

$$(11.1) \quad |\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle| \leq |\mathbf{x}| |\mathbf{y}|,$$

при което ако има равенство, то векторите \mathbf{x} и \mathbf{y} са линейно зависими.

Доказателство. Неравенството може да бъде записано по следния начин

$$|x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n| \leq \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2} \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2}.$$

Да разгледаме квадратната функция

$$\varphi(t) = (x_1 + t y_1)^2 + (x_2 + t y_2)^2 + \dots + (x_n + t y_n)^2 = |\mathbf{x}|^2 + 2t \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + t^2 |\mathbf{y}|^2.$$

Тя е неотрицателна за всяко $t \in \mathbb{R}$, следователно за нейната нейната дискриминанта имаме

$$D = 4 \left[\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle^2 - |\mathbf{x}|^2 |\mathbf{y}|^2 \right] \leq 0,$$

откъдето неравенството на Коши следва непосредствено. Ако $\varphi(t) > 0$, за всяко $t \in \mathbb{R}$, то неравенството за дискриминантата е строго и следователно неравенството (11.1) също е строго, следователно, ако в (11.1) има равенство, то $\varphi(t_0) = 0$, за някое t_0 , което означава, че $\mathbf{x} + t_0\mathbf{y} = \mathbf{0}$. ■

С помощта на неравенството на Коши можем да докажем

Твърдение 11.2 (неравенство на Минковски). За всеки два вектора $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ е изпълнено

$$(11.2) \quad |\mathbf{x} + \mathbf{y}| \leq |\mathbf{x}| + |\mathbf{y}|,$$

при което ако има равенство, то векторите \mathbf{x} и \mathbf{y} са линейно зависими.

Доказателство. Имаме

$$|\mathbf{x} + \mathbf{y}|^2 = \langle \mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{x} + \mathbf{y} \rangle = |\mathbf{x}|^2 + 2\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + |\mathbf{y}|^2,$$

откъдето според неравенството на Коши имаме

$$|\mathbf{x} + \mathbf{y}|^2 \leq |\mathbf{x}|^2 + 2|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle| + |\mathbf{y}|^2 \leq |\mathbf{x}|^2 + 2|\mathbf{x}||\mathbf{y}| + |\mathbf{y}|^2 = (|\mathbf{x}| + |\mathbf{y}|)^2,$$

което доказва (11.2). ■

Нека $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$ са произволни. Тогава

$$\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = |\mathbf{x} - \mathbf{y}| = |(\mathbf{x} - \mathbf{z}) + (\mathbf{z} - \mathbf{y})| \leq |\mathbf{x} - \mathbf{z}| + |\mathbf{z} - \mathbf{y}| = \rho(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + \rho(\mathbf{z}, \mathbf{y}),$$

т.е. получихме неравенството на триъгълника за разстоянието между две точки

$$(11.3) \quad \rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq \rho(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + \rho(\mathbf{z}, \mathbf{y}).$$

Определение 11.1 Едно множество M се нарича **метрично пространство**, когато между всеки два негови елемента $x, y \in M$, е определена функцията $\rho(x, y)$ със следните три свойства:

- 1) $\rho(x, x) = 0$, за всяко $x \in M$, и ако $\rho(x, y) = 0$ за някои $x, y \in M$, то $x = y$;
- 2) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$, за всеки $x, y \in M$ (симетричност);
- 3) $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$, за всеки $x, y, z \in M$ (неравенство на триъгълника).

Сега лесно се вижда, че \mathbb{R}^n е метрично пространство с метрика, породена от нормата, понеже $\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$. Свойствата 1) и 2) са очевидни, а 3) следва от (11.3).

Поради наличието на норма $|\mathbf{x}| = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle}$ казваме, че **пространството \mathbb{R}^n е нормирано**. Нормата има следните характеризиращи основни свойства.

- 1) $|\mathbf{x}| \geq 0$ и $|\mathbf{x}| = 0$ тогава и само тогава, когато $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.
- 2) $|\lambda\mathbf{x}| = |\lambda||\mathbf{x}|$, за всеки скалар $\lambda \in \mathbb{R}$.
- 3) $|\mathbf{x} + \mathbf{y}| \leq |\mathbf{x}| + |\mathbf{y}|$, за всеки два вектора $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$.

Определение 11.2. Нека $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Множеството $B(\mathbf{x}, \varepsilon)$ от всички точки $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, за които $\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) < \varepsilon$ се нарича **отворено кълбо** с център \mathbf{x} и радиус $\varepsilon > 0$. Множеството $\overline{B}(\mathbf{x}, \varepsilon)$ от всички точки $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, за които $\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq \varepsilon$ се нарича **затворено кълбо** с център \mathbf{x} и радиус $\varepsilon \geq 0$.

$B(\mathbf{x}, \varepsilon)$ се нарича още ε -околност на $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. По този начин имаме

$$B(\mathbf{x}, \varepsilon) = \left\{ \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n : \sqrt{\sum_{k=1}^n (x_k - y_k)^2} < \varepsilon \right\}.$$

Когато $n = 1$, $B(x, \varepsilon)$ е отворен интервал с център x и радиус ε (Рис. 11.1)



Рис. 11.1

Когато $n = 2$, $B(\mathbf{x}, \varepsilon)$ е кръг с център $\mathbf{x}(x_1, x_2)$ и радиус ε (Рис. 11.2)

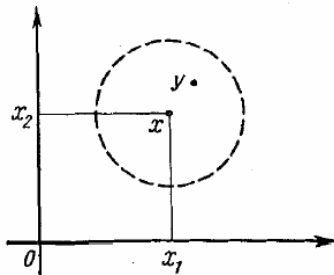


Рис. 11.2

Основните определения и свойства на редиците в \mathbb{R}^n са аналогични на тези, свързани с числови редици.

Ако на всяко естествено число $m \in \mathbb{N}$ е съпоставена точка $\mathbf{x}^{(m)} \in \mathbb{R}^n$, то казваме, че е зададена **редица** от точки в \mathbb{R}^n . Редиците ще бележим с $\{\mathbf{x}^{(m)}\}_{m=1}^{\infty}$ или просто с $\{\mathbf{x}^{(m)}\}$. Ако е дадена редицата $\{\mathbf{x}^{(m)}\}$ и някаква растяща редица от естествени числа $m_1 < m_2 < \dots < m_\nu < \dots$, то можем да образуваме **подредицата** $\{\mathbf{x}^{(m_\nu)}\}$.

Определение 11.3. Точката $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ се нарича граница на редицата $\{\mathbf{x}^{(m)}\}$ и се пише

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \mathbf{x}^{(m)} = \mathbf{x},$$

когато

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \rho(\mathbf{x}^{(m)}, \mathbf{x}) = 0.$$

Ако $\lim_{m \rightarrow \infty} \mathbf{x}^{(m)} = \mathbf{x}$, то се казва, че редицата $\{\mathbf{x}^{(m)}\}$ е сходяща и клони към границата \mathbf{x} .

От горното определение означава, че $\lim_{m \rightarrow \infty} \mathbf{x}^{(m)} = \mathbf{x}$ тогава и само тогава, когато за всяко $\varepsilon > 0$ може да се намери естествено число m_0 , такова, че $\rho(\mathbf{x}^{(m)}, \mathbf{x}) = |\mathbf{x}^{(m)} - \mathbf{x}| < \varepsilon$, винаги когато $m > m_0$. При $n = 1$ дадените определения напълно се покриват с известните определения за сходящи числови редици. При $n = 2$ сходимостта означава, че за всеки кръг с център $\mathbf{x}(x_1, x_2)$ и радиус $\varepsilon > 0$, от известно място нататък (зависещо от ε) всички членове на редицата се съдържат в този кръг (Рис. 11.3)

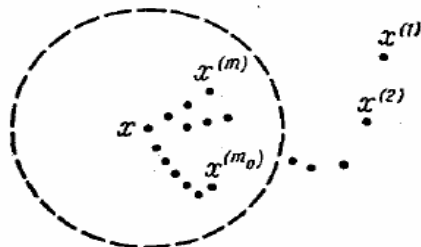


Рис. 11.3

Определение 11.4. Редицата $\{\mathbf{x}^{(m)}\}$ се нарича **фундаментална**, когато $\lim_{m \rightarrow \infty, m' \rightarrow \infty} \rho(\mathbf{x}^{(m)}, \mathbf{x}^{(m')}) = 0$, т.е. ако за всяко $\varepsilon > 0$ съществува m_0 такава, че $\rho(\mathbf{x}^{(m)}, \mathbf{x}^{(m')}) < \varepsilon$, винаги когато $m > m_0$ и $m' > m_0$.

Редицата $\{\mathbf{x}^{(m)}\}$ се нарича ограничена, когато съществува константа C такава, че $|\mathbf{x}^{(m)}| < C$, за всяко $m \in \mathbb{N}$.

Както за числови редици се установява, че всяка сходяща редица е фундаментална и всяка фундаментална редица е ограничена. Освен това, ако една редица е сходяща, то нейната граница е единствена.

Твърдение 11.3 (свойства на подредиците).

- 1) Нека редицата $\{\mathbf{x}^{(m)}\}$ е фундаментална. Тогава всяка нейна подредица $\{\mathbf{x}^{(m_\nu)}\}$ също е фундаментална.
- 2) Нека редицата $\{\mathbf{x}^{(m)}\}$ е сходяща и клони към границата \mathbf{x} . Тогава всяка нейна подредица $\{\mathbf{x}^{(m_\nu)}\}$ също е сходяща и клони към същата граница \mathbf{x} .
- 3) Ако редицата $\{\mathbf{x}^{(m)}\}$ е фундаментална и има някаква сходяща подредица $\{\mathbf{x}^{(m_\nu)}\}$, която клони към границата \mathbf{x} , то цялата редица $\{\mathbf{x}^{(m)}\}$ също е сходяща, при това към същата граница \mathbf{x} . ■

Всеки член $\mathbf{x}^{(m)}$ на една редица $\{\mathbf{x}^{(m)}\}$ се задава чрез своите координати, $\mathbf{x}^{(m)} = (x_1^{(m)}, x_2^{(m)}, \dots, x_n^{(m)})$. Сходимостта в \mathbb{R}^n е еквивалентна на покоординатна сходимост.

Твърдение 11.4. Редицата $\{\mathbf{x}^{(m)} = (x_1^{(m)}, x_2^{(m)}, \dots, x_n^{(m)})\}$ е сходяща и клони към границата $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ тогава и само тогава, когато за всяка координатна редица $\{x_k^{(m)}\}$, $k = 1, 2, \dots, n$, е изпълнено

$$\lim_{m \rightarrow \infty} x_k^{(m)} = x_k.$$

Доказателство. 1) Нека $\lim_{m \rightarrow \infty} \mathbf{x}^{(m)} = \mathbf{x}$ и нека изберем някакво $\varepsilon > 0$. Тогава може да се намери m_0 , за което

$$\rho(\mathbf{x}^{(m)}, \mathbf{x}) = \sqrt{\sum_{k=1}^n (x_k^{(m)} - x_k)^2} < \varepsilon,$$

когато $m > m_0$, следователно при всяко $k = 1, 2, \dots, n$ е изпълнено $|x_k^{(m)} - x_k| < \varepsilon$, когато $m > m_0$, което означава по определение, че всичките координатни редици са сходящи и клонят към съответната координата на границата.

2) Да предположим сега, че за всяка координатна редица е $\{x_k^{(m)}\}$, $k = 1, 2, \dots, n$, изпълнено

$$\lim_{m \rightarrow \infty} x_k^{(m)} = x_k$$

и да изберем едно $\varepsilon > 0$. Тогава за всеки индекс $k = 1, 2, \dots, n$ съществува $m_{0,k}$, за което $|x_k^{(m)} - x_k| < \varepsilon / \sqrt{n}$, при $m > m_{0,k}$. Нека $m_0 = \max(m_{0,1}, m_{0,2}, \dots, m_{0,n})$ и да положим $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$. Ще докажем, че това \mathbf{x} е граница на редицата $\{\mathbf{x}^{(m)}\}$. Наистина, ако $m > m_0$, то е изпълнено

$$\rho(\mathbf{x}^{(m)}, \mathbf{x}) = \sqrt{\sum_{k=1}^n (x_k^{(m)} - x_k)^2} < \varepsilon,$$

което доказва твърдението. ■

По същия начин се доказва, че една редица е фундаментална тогава и само тогава, когато е покоординатно фундаментална, т.е. когато всичките координатни редици са фундаментални и, разбира се, една редица е ограничена тогава и само тогава когато е покоординатно ограничена, т.е. когато всяка координатна редица е ограничена.

Най-важната характеристика на полето на реалните числа е, че то пълно, което означава, **че всяка фундаментална редица има граница** (всяка фундаментална редица е сходяща). Това свойство притежават и фундаменталните редици в \mathbb{R}^n .

Теорема 11.1. Една редица е фундаментална тогава и само тогава, когато е сходяща.

Доказателство. Вече знаем, че всяка сходяща редица е фундаментална. Остава да покажем обратното. Нека редицата $\{\mathbf{x}^{(m)}\}$ е фундаментална. Тогава тя е покоординатно фундаментална, следователно всяка координатна редица $\{x_k^{(m)}\}$, $k = 1, 2, \dots, n$, е фундаментална и сходяща към някоя граница x_k . Сега от твърдение 11.4 следва, че

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \mathbf{x}^{(m)} = \mathbf{x} \stackrel{\text{def}}{=} (x_1, x_2, \dots, x_n). \quad \blacksquare$$

Определение 11.5. Множеството $A \subset \mathbb{R}^n$ се нарича **ограничено**, когато съществува константа C такава, че $|\mathbf{x}| < C$, за всяко $\mathbf{x} \in A$.

Всяка ограничена редица представлява ограничено множество. Теоремата на Болцано-Вайерщрас за числови редици гласи, че от всяка ограничена числова редица може да се избере сходяща подредица. Такава теорема е валидна и за редиците от \mathbb{R}^n .

Теорема 11.2 (Болцано-Вайерщрас). От всяка ограничена редица $\{\mathbf{x}^{(m)}\}$ може да се избере сходяща подредица.

Доказателство. Нека редицата $\{\mathbf{x}^{(m)}\}$ е ограничена. Тогава тя е покоординатно ограничена и следователно от всяка координатна редица $\{x_k^{(m)}\}$, $k = 1, 2, \dots, n$, може да се избере сходяща подредица $\{x_k^{(m_\nu)}\}$ с граница x_k . За простота да предположим, че $n = 2$. Тогава $\lim_{\nu \rightarrow \infty} x_1^{(m_\nu)} = x_1$. Сега да разгледаме редицата $\{x_2^{(m_\nu)}\}$, която е подредица на $\{x_2^{(m)}\}$ и следователно е ограничена. От нея може да се избере сходяща подредица $\{x_2^{(m_{\nu\mu})}\}$, която ще има за граница числото x_2 . Тогава подредицата $\{\mathbf{x}^{(m_{\nu\mu})}\}$ е сходяща и клони към $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$, понеже и двете координатни редици на $\{\mathbf{x}^{(m_{\nu\mu})}\}$ са сходящи и клонят съответно към x_1 и x_2 . За да завършим доказателството остава да се позовем на твърдение 11.4. Случаят на произволно n съдържа само технически усложнения в сравнение с изложеното доказателство. ■

Ако една редица не е ограничена, то тя съдържа подредица, която клони към безкрайност. Казваме, че редицата $\{\mathbf{x}^{(m)}\}$ клони към безкрайност и пишем $\lim_{m \rightarrow \infty} \mathbf{x}^{(m)} = \infty$, когато $\lim_{m \rightarrow \infty} |\mathbf{x}^{(m)}| = \infty$.

Следващото определение касае взаимното разположение на точка и множество.

Определение 11.6. Нека $x \in \mathbb{R}^n$ и $A \subset \mathbb{R}^n$, $A \neq \emptyset$.

- 1) Точката $x \in A$ се нарича **вътрешна** за A , когато се съдържа в A заедно с някоя своя ε -околност $B(x, \varepsilon)$.
- 2) Точката x се нарича **външна** за A , когато е вътрешна за допълнението $A^c = \mathbb{R}^n \setminus A$.
- 3) Точката x се нарича **гранична (контурна)** за A , когато не е нито вътрешна нито външна за A .
- 4) Точката x се нарича **точка на съгъстяване** за A , когато всяка нейна ε -околност $B(x, \varepsilon)$ съдържа точки от A , различни от x .
- 5) Точката $x \in A$ се нарича **изолирана**, когато съществува някаква нейна ε -околност $B(x, \varepsilon)$, която не съдържа други точки от A освен x .

Една гранична точка може да принадлежи или да не принадлежи на множеството. Точката x е външна за A , когато съществува някаква ε -околност $B(x, \varepsilon)$, за която $B(x, \varepsilon) \cap A = \emptyset$. Очевидно всяка изолирана точка е и гранична. От последното определение следва, че **всяка точка е или вътрешна или външна или гранична** относно дадено множество. Една точка x е точка на съгъстяване за A тогава и само тогава, когато може да се намери редица от точки $\{x^{(m)} \in A, x^{(m)} \neq x\}$, за която $\lim_{m \rightarrow \infty} x^{(m)} = x$.

Следващото определение касае основните видове множества в анализа. Да отбележим, че едно множество се нарича **крайно**, когато неговите елементи са краен брой и **безкрайно**, когато неговите елементи са безбройно много.

Определение 11.7 (отворени, затворени и компактни множества).

- 1) Множеството $U \subset \mathbb{R}^n$, $U \neq \emptyset$, се нарича отворено, когато се състои само от вътрешни точки. Празното множество \emptyset също определяме като отворено.
- 2) Множеството $F \subset \mathbb{R}^n$ се нарича затворено, когато неговото допълнение $F^c = \mathbb{R}^n \setminus F$ е отворено.
- 3) Множеството $K \subset \mathbb{R}^n$, $K \neq \emptyset$, се нарича компактно, когато е едновременно затворено и ограничено.

От горното определение следва, че множеството $U \neq \emptyset$ е отворено, точно когато за всяка негова точка $x \in U$ съществува някаква нейна ε -околност $B(x, \varepsilon)$, за която $B(x, \varepsilon) \subset U$. Единствените множества, които са едновременно отворени и затворени са цялото \mathbb{R}^n и празното множество \emptyset . Освен това всяко отворено кълбо е отворено множество и всяко затворено кълбо е затворено множество.

Следващото твърдение дава характеризира затворените множества.

Твърдение 11.5. Едно множество $F \subset \mathbb{R}^n$, $F \neq \emptyset$, е затворено тогава и само тогава, когато съдържа всичките си точки на съгъстяване. ■

Произволно обединение $U = \bigcup_{\alpha} U_{\alpha}$, $\alpha \in I$, на отворени множества U_{α} е отворено множество. Сега от закона на Де-Морган $\left(\bigcap_{\alpha} F_{\alpha}\right)^c = \bigcup_{\alpha} F_{\alpha}^c$ следва, че произволно

сечение на затворени множества също е затворено. В общия случай произволно сечение на отворени множества може да не бъде отворено, както и произволно обединение на затворени множества може да не бъде затворено. Сечението на краен брой отворени множества е отворено и обединението на краен брой затворени множества е затворено.

От твърдение 11.5 следва, че ако към дадено множество A добавим неговите точки на съгъстяване, то се получава затворено множество, което всъщност е "най-

малкото" затворено множество, което съдържа A и се нарича **затворена обвивка** на A и се бележи с \bar{A} .

Определение 11.8. Граница (контур) ∂A на едно множество $A \subset \mathbb{R}^n$ се нарича съвкупността от всичките му гранични точки.

Понеже всяка гранична точка е или точка на съгъстяване или изолирана, то затворената обвивка на едно множество се получава, като добавим неговите гранични точки, т.е. $\bar{A} = A \cup \partial A$.

Сега ще дадем друга характеристика на затворените множества.

Твърдение 11.6. Едно множество $F \subset \mathbb{R}^n$, $F \neq \emptyset$, е затворено тогава и само тогава, когато съдържа границите на всички свои сходящи редици, т.е. когато от $\lim_{m \rightarrow \infty} \mathbf{x}^{(m)} = \mathbf{x}$ и $\mathbf{x}^{(m)} \in F$ следва, че $\mathbf{x} \in F$. ■

Да припомним, че множеството $K \subset \mathbb{R}^n$ е компактно, когато е едновременно ограничено и затворено. Следващата теорема има особено важна роля в анализа.

Теорема 11.3. Едно множество $K \subset \mathbb{R}^n$ е компактно тогава и само тогава, когато от всяка негова редица може да се избере сходяща подредица, чиято граница принадлежи на K . ■

Една от най-важните теореми на анализа е теоремата на Кантор за вложените интервали. Ограничените затворени интервали са основни примери за компактни множества. Теоремата на Кантор може да се обобщи за случая на редица от вложени едно в друго компактни множества от \mathbb{R}^n .

Теорема 11.4 (Кантор). Нека е дадена редицата от (непразни) компактни множества $K_1 \supseteq K_2 \supseteq \dots \supseteq K_m \supseteq \dots$. Тогава тяхното сечение не е празно. ■

За да характеризираме "размера" на едно множество $A \subset \mathbb{R}^n$ въвеждаме следното

Определение 11.9. Диаметър $d(A)$ на ограниченото множество $A \subset \mathbb{R}^n$ се нарича $d(A) = \sup\{|\mathbf{x} - \mathbf{y}| : \mathbf{x}, \mathbf{y} \in A\}$.

Отсечка, в \mathbb{R}^n свързваща точките $\mathbf{x}^{(1)}$ и $\mathbf{x}^{(2)}$, се нарича множеството $I : \mathbf{x}^{(1)} + t(\mathbf{x}^{(2)} - \mathbf{x}^{(1)})$, $0 \leq t \leq 1$. Когато $n = 2$ или $n = 3$, множеството I представлява геометрична отсечка, което оправдава названието в общия случай. **Начупена линия** $\gamma = [\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(m)}]$ се нарича множество, състоящо се от краен брой отсечки $I_k : [\mathbf{x}^{(k)}, \mathbf{x}^{(k+1)}]$, свързани последователно.

Образно (с някои уточнения) диаметърът на дадено множество може да се определи като мярката на най-дългата отсечка с краища от множеството.

Определение 11.10. Множеството $A \subset \mathbb{R}^n$ се нарича **линейно свързано**, когато всеки две негови точки могат да се съединят с начупена линия. Множеството $D \subset \mathbb{R}^n$ се нарича **област**, когато е едновременно отворено и линейно свързано. Затворената обвивка \bar{D} на дадена област D се нарича **затворена област**.

Аналогично се определя **права** g в \mathbb{R}^n , минаваща през точките $\mathbf{x}^{(1)}$ и $\mathbf{x}^{(2)}$: $g : \mathbf{x}^{(1)} + t(\mathbf{x}^{(2)} - \mathbf{x}^{(1)})$, $t \in \mathbb{R}$. **Хиперравнина** α в \mathbb{R}^n с нормален вектор $\vec{\mathbf{a}}(a_1, a_2, \dots, a_n) \neq \vec{\mathbf{0}}$ се определя като съвкупността от точки $\mathbf{x}(x_1, x_2, \dots, x_n)$, за които е изпълнено равенството $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n + b = 0$. В \mathbb{R}^3 хиперравнини са обичайните геометрични равнини, а в \mathbb{R}^2 хиперравнини са правите.

2. Граница на функция и непрекъснатост. Тук ще разглеждаме функции $f(\mathbf{x}): E \rightarrow \mathbb{R}$, определени в някакво подмножество E на \mathbb{R}^n и приемащи реални стойности. Ще пишем $f(\mathbf{x})$ или $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$. При $n=1$ имаме функция на една променлива $f(x)$, при $n=2$ имаме функция на две променливи, за която обикновено ще пишем $f(x, y)$ вместо $f(x_1, x_2)$, а при $n=3$ имаме функция на три променливи, за която обикновено ще пишем $f(x, y, z)$ вместо $f(x_1, x_2, x_3)$.

Нека е дадена функцията $y = f(\mathbf{x})$, определена в множеството $E \subset \mathbb{R}^n$. Тогава множеството от точки $\Gamma(f)$ в евклидовото пространство \mathbb{R}^{n+1} от вида $(x_1, x_2, \dots, x_n, y)$, където $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in E$ и $y = f(\mathbf{x})$ се нарича графика на функцията $f(\mathbf{x})$. В случай на функция на две променливи, графиката на функцията има геометричен образ в пространството (Рис. 11.4)

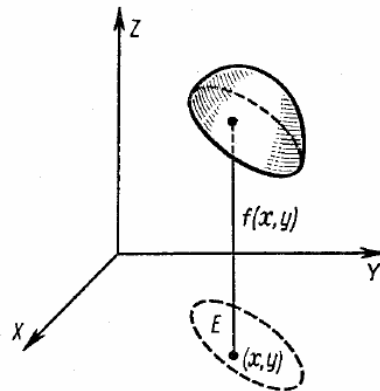


Рис. 11.4

Определение 11.11. Нека функцията $f(\mathbf{x})$ е определена в някакво множество $E \subset \mathbb{R}^n$ и $\mathbf{x}^{(0)}$ се явява точка на съгъстяване за E . Числото a се нарича граница на функцията $f(\mathbf{x})$ при \mathbf{x} клонящо към $\mathbf{x}^{(0)}$ ($\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}^{(0)}$) (или още граница на функцията $f(\mathbf{x})$ в точката $\mathbf{x}^{(0)}$), когато за всяка редица от точки $\{\mathbf{x}^{(m)} \in E, \mathbf{x}^{(m)} \neq \mathbf{x}^{(0)}\}$, за която $\lim_{m \rightarrow \infty} \mathbf{x}^{(m)} = \mathbf{x}^{(0)}$, числовата редица $\{f(\mathbf{x}^{(m)})\}$ клони към числото a . Пишем $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}^{(0)}} f(\mathbf{x}) = a$.

В горното определение $\mathbf{x}^{(0)}$ е точка на съгъстяване за E , следователно съществуват редици $\{\mathbf{x}^{(m)} \in E\}$, такива, че всяко $\mathbf{x}^{(m)} \neq \mathbf{x}^{(0)}$ и $\lim_{m \rightarrow \infty} \mathbf{x}^{(m)} = \mathbf{x}^{(0)}$. Да отбележим специално, че функцията $f(\mathbf{x})$ не се предполага определена в самата точка $\mathbf{x}^{(0)}$. Следващото определение е полезна модификация на определение 11.11 и се отнася за граница на функция по множество.

Определение 11.12. Нека функцията $f(\mathbf{x})$ е определена в някакво множество $E \subset \mathbb{R}^n$, $A \subset E$, и $\mathbf{x}^{(0)}$ се явява точка на съгъстяване за A . Числото a се нарича граница на функцията $f(\mathbf{x})$ по множеството A при \mathbf{x} клонящо към $\mathbf{x}^{(0)}$, когато за всяка редица от точки $\{\mathbf{x}^{(m)} \in A, \mathbf{x}^{(m)} \neq \mathbf{x}^{(0)}\}$, за която $\lim_{m \rightarrow \infty} \mathbf{x}^{(m)} = \mathbf{x}^{(0)}$, числовата редица $\{f(\mathbf{x}^{(m)})\}$ клони към числото a . Пишем $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}^{(0)}, \mathbf{x} \in A} f(\mathbf{x}) = a$.

Съществуването на граница на функция може да се определи в термините на околности на точката $\mathbf{x}^{(0)}$ и числото a .

Твърдение 11.7. Числото a е граница на функцията $f(\mathbf{x})$ при $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}^{(0)}$ тогава и само тогава, когато за всяко $\varepsilon > 0$ съществува δ такава, че $|f(\mathbf{x}) - a| < \varepsilon$, когато $\rho(\mathbf{x}, \mathbf{x}^{(0)}) < \delta$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}^{(0)}$. ■

Твърдение 11.7 дава еквивалентно определение за граница на функция в точка и затова самото то може да се разглежда и като определение.

Определението за граница на функция може да се улесни, ако въведем понятието пробита ε -околност на точка \mathbf{x} , $\overset{\circ}{B}(\mathbf{x}, \varepsilon) = B(\mathbf{x}, \varepsilon) \setminus \{\mathbf{x}\}$. Числото a е граница на функцията $f(\mathbf{x})$ при $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}^{(0)}$ тогава и само тогава, когато за всяко $\varepsilon > 0$ съществува δ такава, че $f(\mathbf{x}) \in B(a, \varepsilon)$, когато $\mathbf{x} \in \overset{\circ}{B}(\mathbf{x}^{(0)}, \delta)$.

Ако функцията $f(\mathbf{x}): E \rightarrow \mathbb{R}$ има граница a при $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}^{(0)}$, където $\mathbf{x}^{(0)}$ е точка на съгъстяване за множеството E , то $f(\mathbf{x})$ има същата граница и по всяко множество $A \subset E$, за което $\mathbf{x}^{(0)}$ е точка на съгъстяване. В общия една функция може да има граница по някакво множество и да няма граница по друго (или да има друга граница).

Верността на следното твърдение произтича непосредствено от определенията.

Твърдение 11.8. Нека $\mathbf{x}^{(0)}$ е точка на съгъстяване за дефиниционното множество на функциите $f(\mathbf{x})$ и $g(\mathbf{x})$, $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}^{(0)}} f(\mathbf{x}) = a$ и $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}^{(0)}} g(\mathbf{x}) = b$. Тогава:

- 1) функцията $f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})$ също има граница в $\mathbf{x}^{(0)}$, при което $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}^{(0)}} [f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})] = a + b$;
- 2) функцията $f(\mathbf{x})g(\mathbf{x})$ също има граница в $\mathbf{x}^{(0)}$, при което $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}^{(0)}} [f(\mathbf{x})g(\mathbf{x})] = ab$;
- 3) ако $b \neq 0$, то функцията $f(\mathbf{x})/g(\mathbf{x})$ също има граница в $\mathbf{x}^{(0)}$, при което $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}^{(0)}} [f(\mathbf{x})/g(\mathbf{x})] = a/b$. ■

Сега сме готови да дадем определения за непрекъснатост на функция в точка и множество.

Определение 11.13. Нека функцията $f(\mathbf{x})$ е определена в някакво множество $E \subset \mathbb{R}^n$ и $\mathbf{x}^{(0)} \in E$ се явява точка на съгъстяване за E . Казва се, че $f(\mathbf{x})$ е **непрекъснат** в точката $\mathbf{x}^{(0)}$ (*по съвкупност на променливите*), когато $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}^{(0)}} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}^{(0)})$. По дефиниция приемаме, че ако $\mathbf{x}^{(0)}$ е изолирана точка за E , то $f(\mathbf{x})$ е непрекъснат в $\mathbf{x}^{(0)}$. Ако функцията $f(\mathbf{x})$ е непрекъсната във всяка точка от дефиниционното си множество E , то тя се нарича непрекъсната в E .

Например метриката е непрекъсната по всяка от двете си променливи, т.е. функциите $f(\mathbf{x}) = \rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}^{(0)})$ и $g(\mathbf{y}) = \rho(\mathbf{x}^{(0)}, \mathbf{y})$ са непрекъснати във всяка точка на \mathbb{R}^n .

Определение 11.14. Нека функцията $f(\mathbf{x})$ е определена в някакво множество $E \subset \mathbb{R}^n$, $A \subset E$, и $\mathbf{x}^{(0)}$ се явява точка на съгъстяване за A . Функцията $f(\mathbf{x})$ се нарича непрекъсната по множеството A при \mathbf{x} клонящо към $\mathbf{x}^{(0)}$, когато $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}^{(0)}, \mathbf{x} \in A} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}^{(0)})$.

При определението за непрекъснатост в точка се иска функцията да бъде дефинирана в тази точка и по този начин определението за непрекъснатост може да се изкаже в следния вид.

Твърдение 11.9. Функцията $f(\mathbf{x})$, определена в множеството E , е непрекъсната в точката $\mathbf{x}^{(0)} \in E$ тогава и само тогава, когато:

1) за всяка редица от точки $\{\mathbf{x}^{(m)} \in E\}$, за която $\lim_{m \rightarrow \infty} \mathbf{x}^{(m)} = \mathbf{x}^{(0)}$, числовата редица $\{f(\mathbf{x}^{(m)})\}$ е сходяща и клони към $f(\mathbf{x}^{(0)})$;

2) за всяко $\varepsilon > 0$ съществува δ такава, че $|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}^{(0)})| < \varepsilon$, когато $\rho(\mathbf{x}, \mathbf{x}^{(0)}) < \delta$. ■

Твърдение 11.9 се модифицира по очевиден начин за случая на непрекъснатост по множество.

От твърдение 11.8 следва, че ако $f(\mathbf{x})$ и $g(\mathbf{x})$ са непрекъснати в точката $\mathbf{x}^{(0)}$, то $f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})$, $f(\mathbf{x})g(\mathbf{x})$ и $f(\mathbf{x})/g(\mathbf{x})$ ($g(\mathbf{x}^{(0)}) \neq 0$) също са непрекъснати в $\mathbf{x}^{(0)}$. Аналогично твърдение е вярно и когато $f(\mathbf{x})$ и $g(\mathbf{x})$ са непрекъснати в някакво множество E .

Композицията на непрекъснати функции също е непрекъсната функция.

Функциите, които се получават от променливите x_1, x_2, \dots, x_n чрез краен брой композиции на основните елементарни функции на една променлива и операциите събиране, умножение и деление се наричат **елементарни функции** на променливите x_1, x_2, \dots, x_n . **Елементарните функции са непрекъснати във всяка вътрешна точка на дефиниционната си област.**

Ако една функция е определена и непрекъсната над компактно множество, то тя е ограничена и равномерно непрекъсната. Една функция се нарича **ограничена** (отгоре/отдолу) в дадено множество, когато множеството на нейните стойности е ограничено (отгоре/отдолу).

Теорема 11.5. Нека функцията $f(\mathbf{x})$ е определена над компактното множество $K \subset \mathbb{R}^n$. Тогава $f(\mathbf{x})$ е ограничена, при което $f(\mathbf{x})$ достига най-голяма и най-малка стойности. Съществуват точка $\mathbf{x}_{\max} \in K$ и точка $\mathbf{x}_{\min} \in K$, за които

$$f(\mathbf{x}_{\max}) = \max_{\mathbf{x} \in K} f(\mathbf{x}) \text{ и } f(\mathbf{x}_{\min}) = \min_{\mathbf{x} \in K} f(\mathbf{x}).$$

Доказателство. Да допуснем, че $f(\mathbf{x})$ не е ограничена, т.е. че множеството от нейните стойности не е ограничено. Тогава за всяко $m \in \mathbb{N}$ може да се намери $\mathbf{x}^{(m)} \in K$, за което $|f(\mathbf{x}^{(m)})| > m$. По условие множеството K е компактно, следователно от редицата $\{\mathbf{x}^{(m)}\}$ може да се избере сходяща подредица с граница от K , $\lim_{v \rightarrow \infty} \mathbf{x}^{(m_v)} = \mathbf{x}^{(0)} \in K$. По условие функцията $f(\mathbf{x})$ е непрекъсната, следователно $\lim_{v \rightarrow \infty} f(\mathbf{x}^{(m_v)}) = f(\mathbf{x}^{(0)})$, което противоречи на заключението, че $|f(\mathbf{x}^{(m_v)})| > m_v$.

Нека \mathbf{M} и \mathbf{m} са точната горна и точната долна граница на множеството от стойностите на $f(\mathbf{x})$. Тогава за всяко $\varepsilon > 0$ съществува някакво $\mathbf{x}_\varepsilon \in K$, за което $\mathbf{M} - \varepsilon < f(\mathbf{x}_\varepsilon) \leq \mathbf{M}$; в частност за всяко $m \in \mathbb{N}$ съществува $\mathbf{x}^{(m)} \in K$, за което $\mathbf{M} - 1/m < f(\mathbf{x}_m) \leq \mathbf{M}$. Понеже K е компактно, от редицата $\{\mathbf{x}^{(m)}\}$ може да се избере сходяща подредица с граница от K , $\lim_{v \rightarrow \infty} \mathbf{x}^{(m_v)} = \mathbf{x}^{(0)} \in K$, за която

$$\mathbf{M} - 1/m_v < f(\mathbf{x}_{m_v}) \leq \mathbf{M}.$$

Сега от непрекъснатостта на $f(\mathbf{x})$, след граничен преход по $v \rightarrow \infty$, от последното следва, че $f(\mathbf{x}^{(0)}) = \mathbf{M}$ и можем да положим $\mathbf{x}_{\max} = \mathbf{x}^{(0)}$. Аналогично се доказва съществуването на $\mathbf{x}_{\min} \in K$ с указаното свойство. ■

Определение 11.15. Казва се, че функцията $f(\mathbf{x}): E \rightarrow \mathbb{R}$, $E \subset \mathbb{R}^n$, е равномерно непрекъснатата, когато за всяко $\varepsilon > 0$ може да се намери δ такава, че $|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})| < \varepsilon$, винаги когато $\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) < \delta$, $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E$.

Ако една функция $f(\mathbf{x})$ е равномерно непрекъснатата в множеството E , то тя е и непрекъснатата във всяка точка от $\mathbf{x}^{(0)} \in E$ ($f(\mathbf{x})$ е непрекъснатата в E), понеже за всяко $\varepsilon > 0$ може да се намери δ такава, че $|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}^{(0)})| < \varepsilon$, когато $\rho(\mathbf{x}, \mathbf{x}^{(0)}) < \delta$. Равномерната непрекъснатост означава, че това δ може да се избере едно също за всяко $\mathbf{x}^{(0)} \in E$, докато обикновената непрекъснатост допуска δ да зависи от $\mathbf{x}^{(0)}$.

Една функция може да бъде непрекъснатата, но да не бъде равномерно непрекъснатата, например функцията на една променлива $f(x): (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ е непрекъснатата в дефиниционното си множество $(0, 1]$ но не е равномерно непрекъснатата. Ако обаче дефиниционната област на една непрекъснатата функция е компактно множество, то тя е и равномерно непрекъснатата.

Теорема 11.6. Нека функцията $f(\mathbf{x})$ е определена и непрекъснатата над компактното множество $K \subset \mathbb{R}^n$. Тогава $f(\mathbf{x})$ е равномерно непрекъснатата. ■

Нека $f(\mathbf{x})$ е определена в областта $E \subset \mathbb{R}^n$ и нека $\mathbf{x}^{(1)}$ и $\mathbf{x}^{(2)}$ са две точки от E . По определение E е отворено и линейно свързано множество, следователно точките $\mathbf{x}^{(1)}$ и $\mathbf{x}^{(2)}$ могат да бъдат съединени с непрекъснатата (начупена) линия $\gamma: \mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$, $\alpha \leq t \leq \beta$, $\mathbf{x}(\alpha) = \mathbf{x}^{(1)}$, $\mathbf{x}(\beta) = \mathbf{x}^{(2)}$. Да положим $f(\mathbf{x}^{(1)}) = a$ и $f(\mathbf{x}^{(2)}) = b$, при което за определеност да предположим, че $a \leq b$. Тогава функцията $\varphi(t) = f(\mathbf{x}(t))$ е определена и непрекъснатата в интервала $[\alpha, \beta]$ и съгласно теоремата за междинните стойности за непрекъснатата функция на една променлива, за всяко c между a и b съществува някакво $\theta \in [\alpha, \beta]$, за което $\varphi(\theta) = c$, което означава, че съществува точка $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\theta) \in \gamma$, за която $f(\mathbf{x}) = c$. Последното твърдение е обобщение на познатата **теорема за междинните стойности** на функция на една променлива.

3. Частни производни и диференцируемост. Нека функцията $f(\mathbf{x})$ е определена в някаква околност на точката $\mathbf{x}^{(0)}(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$. Да разгледаме функцията на една променлива $\varphi(x_1) = f(x_1, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$. Ако функцията $\varphi(x_1)$ е диференцируема в точката $x_1 = x_1^{(0)}$, то нейната производна $\varphi'(x_1^{(0)})$ се нарича **частна производна** на $f(\mathbf{x})$ относно променливата x_1 в точката $\mathbf{x}^{(0)}$ и се бележи с

$$\frac{\partial f(\mathbf{x}^{(0)})}{\partial x_1} = \lim_{\Delta x_1 \rightarrow 0} \frac{f(x_1^{(0)} + \Delta x_1, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}) - f(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})}{\Delta x_1}.$$

Аналогично се определят и останалите частни производни,

$$\frac{\partial f(\mathbf{x}^{(0)})}{\partial x_k}, \quad k = 2, \dots, n.$$

За частните производни се употребяват следните означения

$$\frac{\partial f(\mathbf{x}^{(0)})}{\partial x_k} = f_{x_k}(\mathbf{x}) = D_k f(\mathbf{x}) = f'_{x_k}(\mathbf{x}) = \frac{\partial}{\partial x_k} f(\mathbf{x}).$$

При функция на две променливи $f(x, y)$ имаме две частни производни

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \quad \text{и} \quad \frac{\partial f(x, y)}{\partial y},$$

а за функция на три променливи $f(x, y, z)$,

$$\frac{\partial f(x, y, z)}{\partial x}, \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial y} \text{ и } \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial z}.$$

От определението следва, че когато търсим частната производна на елементарна функция по дадена променлива, останалите променливи се интерпретират като константи.

Пример 11.1. За функцията $f(x, y, z) = xy^2 + \sin(x^2 - y^3) + 2xyz + 1$ намираме

$$\frac{\partial f(x, y, z)}{\partial x} = y^2 + 2x \cos(x^2 - y^3) + 2yz,$$

$$\frac{\partial f(x, y, z)}{\partial y} = 2xy - 3y^2 \cos(x^2 - y^3) + 2xz,$$

$$\frac{\partial f(x, y, z)}{\partial z} = 2xy.$$

Определение 11.16. Нека функцията $f(\mathbf{x})$ е определена в околност на $\mathbf{x}^{(0)}$. Казва се, че $f(\mathbf{x})$ е диференцируема в $\mathbf{x}^{(0)}$, когато в тази околност

$$(11.4) \quad f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}^{(0)}) = A_1(x_1 - x_1^{(0)}) + A_2(x_2 - x_2^{(0)}) + \dots + A_n(x_n - x_n^{(0)}) + o(\rho(\mathbf{x}, \mathbf{x}^{(0)})),$$

за някакви константи A_1, A_2, \dots, A_n .

Тук $\rho(\mathbf{x}, \mathbf{x}^{(0)}) = |\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(0)}|$ е евклидовото разстояние между \mathbf{x} и $\mathbf{x}^{(0)}$,

$$\rho(\mathbf{x}, \mathbf{x}^{(0)}) = \sqrt{\sum_{k=1}^n (x_k - x_k^{(0)})^2}.$$

С помощта на символа $o(q)$ означаваме величина, за която $\lim_{q \rightarrow 0} \frac{o(q)}{q} = 0$. В тези

означения е полезен записът $o(|\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(0)}|) = |\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(0)}| \varepsilon(|\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(0)}|)$, където $\varepsilon(q)$ е величина, за която $\lim_{q \rightarrow 0} \varepsilon(q) = 0$. Ако използваме записа $\mathbf{x} = \mathbf{x}^{(0)} + \Delta \mathbf{x}$, където $\Delta \mathbf{x} = (\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n)$, и

$$\Delta f(\mathbf{x}^{(0)}) = f(\mathbf{x}^{(0)} + \Delta \mathbf{x}) - f(\mathbf{x}^{(0)}), \text{ то (11.4) приема вида}$$

$$(11.5) \quad \Delta f(\mathbf{x}^{(0)}) = A_1 \Delta x_1 + A_2 \Delta x_2 + \dots + A_n \Delta x_n + |\Delta \mathbf{x}| \varepsilon(|\Delta \mathbf{x}|).$$

Диференцируемостта една функция в дадена точка е локално свойство. Формулите (11.4) и (11.5) означават, че ако $f(\mathbf{x})$ е диференцируема в точката $\mathbf{x}^{(0)}$, то нейното локално поведение в околност на $\mathbf{x}^{(0)}$ е линейно, като на линейната функция

$$l(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}^{(0)}) + A_1(x_1 - x_1^{(0)}) + A_2(x_2 - x_2^{(0)}) + \dots + A_n(x_n - x_n^{(0)}).$$

Изразът

$$(11.6) \quad df(\mathbf{x}^{(0)}) = A_1 dx_1 + A_2 dx_2 + \dots + A_n dx_n$$

се нарича **пълнен диференциал** на функцията $f(\mathbf{x})$ в $\mathbf{x}^{(0)}$.

Твърдение 11.10. Нека функцията $f(\mathbf{x})$ е определена в околност на точката $\mathbf{x}^{(0)}$ и диференцируема в $\mathbf{x}^{(0)}$. Тогава частните производни на $f(\mathbf{x})$ в $\mathbf{x}^{(0)}$ съществуват, при

което $A_k = \frac{\partial f(\mathbf{x}^{(0)})}{\partial x_k}$, $k = 1, 2, \dots, n$, следователно

$$\Delta f(\mathbf{x}^{(0)}) = \frac{\partial f(\mathbf{x}^{(0)})}{\partial x_1} \Delta x_1 + \frac{\partial f(\mathbf{x}^{(0)})}{\partial x_2} \Delta x_2 + \dots + \frac{\partial f(\mathbf{x}^{(0)})}{\partial x_n} \Delta x_n + |\Delta \mathbf{x}| \varepsilon(|\Delta \mathbf{x}|),$$

а формулата за пълния диференциал (11.3) приема вида

$$df(\mathbf{x}^{(0)}) = \frac{\partial f(\mathbf{x}^{(0)})}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f(\mathbf{x}^{(0)})}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial f(\mathbf{x}^{(0)})}{\partial x_n} dx_n.$$

Доказателство. Ще докажем, че $A_1 = \frac{\partial f(\mathbf{x}^{(0)})}{\partial x_1}$. Останалите равенства се доказват

аналогично. Нека дадем нарастване само по x_1 , $\Delta \mathbf{x} = (\Delta x_1, 0, \dots, 0)$. Тогава от (11.2) получаваме

$$f(x_1^{(0)} + \Delta x_1, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}) - f(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}) = A_1 \Delta x_1 + |\Delta x_1| \varepsilon(\Delta x_1),$$

следователно

$$\frac{f(x_1^{(0)} + \Delta x_1, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}) - f(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})}{\Delta x_1} = A_1 + \varepsilon(|\Delta x_1|),$$

$$\lim_{\Delta x_1 \rightarrow 0} \frac{f(x_1^{(0)} + \Delta x_1, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}) - f(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})}{\Delta x_1} = A_1.$$

Последното по определение означава, че $A_1 = \frac{\partial f(\mathbf{x}^{(0)})}{\partial x_1}$. ■

Според твърдение 11.10, ако функцията е диференцируема, то тя притежава частни производни. За да бъде вярно обратното твърдение, е необходимо да бъдат налице допълнителни условия.

Теорема 11.7. Нека функцията $f(\mathbf{x})$ е определена в околност на точката $\mathbf{x}^{(0)}$ и нека в тази околност всичките частни производни $\frac{\partial f(\mathbf{x}^{(0)})}{\partial x_k}$, $k = 1, 2, \dots, n$, съществуват и са непрекъснати в $\mathbf{x}^{(0)}$. Тогава $f(\mathbf{x})$ е диференцируема в $\mathbf{x}^{(0)}$. ■

Да отбележим, че при функция на една променлива, диференцируемостта и съществуването на производна като граница на диференчното частно са еквивалентни условия без изискване за непрекъснатост на производната.

Теорема 11.7 оправдава следното определение. Функцията $f(\mathbf{x})$ се нарича **непрекъснато диференцируема в областта D** (отворено и линейно свързано множество), когато всичките частни производни на $f(\mathbf{x})$ съществуват и са непрекъснати в D . Ако $f(\mathbf{x})$ е непрекъснато диференцируема в D , то тя е диференцируема във всяка точка на D . Освен това, ще казваме, че функцията $f(\mathbf{x})$ е **непрекъснато диференцируема в множеството M** , когато съществува област D , съдържаща M , $M \subset D$, такава, че $f(\mathbf{x})$ е непрекъснато диференцируема в D . Например $f(\mathbf{x})$ е **непрекъснато диференцируема в точката $\mathbf{x}^{(0)}$** , когато е непрекъснато диференцируема в някаква околност на $\mathbf{x}^{(0)}$.

Непосредствено от определението се вижда верността на

Твърдение 11.11. Нека функцията $f(\mathbf{x})$ е диференцируема в точката $\mathbf{x}^{(0)}$. Тогава $f(\mathbf{x})$ е непрекъснатата в $\mathbf{x}^{(0)}$. ■

За функция на много променливи можем да прилагаме формулата за крайните нараствания по всяка от променливите, когато са налице съответните условия. Например

$$f(x_2, y) - f(x_1, y) = \frac{\partial f(\xi, y)}{\partial x} (x_2 - x_1),$$

където ξ е число между x_1 и x_2 . Да разгледаме функцията на две променливи $f(x, y)$, която е непрекъснато диференцируема в точката (x_0, y_0) , и нека променливите x и y са функции на променливата t , при което $x(t)$ и $y(t)$ са диференцируеми в точката t_0 и $x_0 = x(t_0)$, $y_0 = y(t_0)$. Да намерим производната на съставната функция $\Phi(t) = f(x(t), y(t))$ в точката t_0 . Имаме

$$\begin{aligned}\Delta\Phi &= \Phi(t_0 + \Delta t) - \Phi(t_0) = f(x(t_0 + \Delta t), y(t_0 + \Delta t)) - f(x(t_0), y(t_0)) = \\ &= f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)\end{aligned}$$

където $\Delta x = x(t_0 + \Delta t) - x(t_0)$ и $\Delta y = y(t_0 + \Delta t) - y(t_0)$. Преобразуваме последното във вида

$$\Delta\Phi = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0 + \Delta y) + f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0),$$

откъдето чрез формулата за крайните нараствания получаваме

$$(11.7) \quad \Delta\Phi = \frac{\partial f(\xi, y_0 + \Delta y)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f(x_0, \eta)}{\partial y} \Delta y,$$

където ξ е число между x_0 и $x_0 + \Delta x$, а η е число между y_0 и $y_0 + \Delta y$. Производната на $\Phi(t)$ в t_0 се определя като границата на диференчното частно $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$, когато тази граница съществува. Сега от (11.7) намираме

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[\frac{\partial f(\xi, y_0 + \Delta y)}{\partial x} \frac{\Delta x}{\Delta t} + \frac{\partial f(x_0, \eta)}{\partial y} \frac{\Delta y}{\Delta t} \right] = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} x'(t_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} y'(t_0),$$

понеже при граничния преход

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = x'(t_0), \quad \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} = y'(t_0), \quad \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \xi = x_0, \quad \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \eta = y_0, \quad \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \Delta x = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \Delta y = 0,$$

а частните производни $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}$ и $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$ се предполагат непрекъснати. По този начин

получихме правилото за диференциране на съставни функции

$$\Phi'(t) = f'_x(x(t), y(t))x'(t) + f'_y(x(t), y(t))y'(t),$$

което можем да запишем като

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt}.$$

За функция на три променливи $f(x, y, z)$ аналогично се доказва, че

$$(11.8) \quad \frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{dz}{dt} \text{ и т.н.}$$

Да предположим сега, че променливите x , y и z от своя страна са функции на двете променливи u и v , $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ и $z = z(u, v)$. Понеже частната производна е обикновена производна относно дадена променлива, от (11.8) следва

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial u} \text{ и } \frac{\partial f}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial v},$$

което се обобщава по очевиден начин за повече променливи. По този начин доказахме

Теорема 11.8. Нека функцията $f(\mathbf{y})$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_m)$, е непрекъснато диференцируема в точката $\mathbf{y}^{(0)} = (y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \dots, y_m^{(0)})$ и освен това $y_k = y_k(\mathbf{x})$, $k = 1, 2, \dots, m$, където функциите $y_k(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, са непрекъснато диференцируеми в точката

$\mathbf{x}^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$ и $y_k(\mathbf{x}^{(0)}) = y_k^{(0)}$, $k = 1, 2, \dots, m$. Тогава съставната функция $\Phi(\mathbf{x}) = f(y_1(\mathbf{x}), y_2(\mathbf{x}), \dots, y_m(\mathbf{x}))$ е непрекъснато диференцируема в точката $\mathbf{x}^{(0)}$, при което

$$(11.9) \quad \frac{\partial \Phi(\mathbf{x}^{(0)})}{\partial x_k} = \sum_{j=1}^m \frac{\partial \Phi(\mathbf{y}^{(0)})}{\partial y_j} \frac{\partial y_j(\mathbf{x}^{(0)})}{\partial x_k}, \quad k = 1, 2, \dots, n. \blacksquare$$

Формулата (11.9) се записва накратко

$$\frac{\partial f}{\partial x_k} = \sum_{j=1}^m \frac{\partial f}{\partial y_j} \frac{\partial y_j}{\partial x_k}, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Да разгледаме диференциала на функцията $f(x, y)$, където $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, разглеждана като функция на независимите променливи u и v

$$df = \frac{\partial f}{\partial u} du + \frac{\partial f}{\partial v} dv = \left[\frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} \right] du + \left[\frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v} \right] dv,$$

откъдето след прегрупиране на събираемите намираме

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} \left[\frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv \right] + \frac{\partial f}{\partial y} \left[\frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv \right],$$

което дава очакваната формула

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy,$$

понеже по определение

$$dx = \frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv, \quad dy = \frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv.$$

Този извод показва свойството **инвариантност на диференциала**, което означава, че стойността на диференциала в дадена точка не се променя при смяна на променливите.

Пълният диференциал притежава следните свойства

$$d(u + v) = du + dv, \quad d(uv) = vdu + udv, \quad d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2},$$

които се проверяват лесно от определенията.

Пример 11.2. Да намерим диференциала на функцията $\operatorname{arctg} \frac{y}{x}$. Полагаме $u = \frac{y}{x}$ и пресмятаме

$$d\left(\operatorname{arctg} \frac{y}{x}\right) = d(\operatorname{arctg} u) = \frac{du}{1+u^2} = \frac{d\frac{y}{x}}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} = \frac{x^2}{x^2+y^2} \frac{xdy - ydx}{x^2} = \frac{xdy - ydx}{x^2+y^2}.$$

Градиент $\nabla f(\mathbf{x})$ на функцията $f(\mathbf{x})$ се нарича векторът от нейните частни производни

$$\nabla f(\mathbf{x}) = \left(\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_1}, \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_n} \right).$$

Нека $f(\mathbf{x})$ е непрекъснато диференцируема по отсечката I с краища точките $\mathbf{x}^{(1)}$ и $\mathbf{x}^{(2)}$, които предполагаме различни. Тази отсечка има следното параметрично представяне $I: \mathbf{x} = \mathbf{x}^{(1)} + t(\mathbf{x}^{(2)} - \mathbf{x}^{(1)})$, $t \in [0, 1]$. Да разгледаме функцията на една променлива $\varphi(t) = f(\mathbf{x}^{(1)} + t(\mathbf{x}^{(2)} - \mathbf{x}^{(1)}))$. Имаме

$$\varphi(t) = f(x_1^{(1)} + t(x_1^{(2)} - x_1^{(1)}), x_2^{(1)} + t(x_2^{(2)} - x_2^{(1)}), \dots, x_n^{(1)} + t(x_n^{(2)} - x_n^{(1)})).$$

По определение $\varphi(0) = f(\mathbf{x}^{(1)})$ и $\varphi(1) = f(\mathbf{x}^{(2)})$. От формулата за крайните нараствания следва, че $\varphi(1) - \varphi(0) = \varphi'(\xi)$, за някое $\xi \in (0,1)$. Сега от правилото за диференциране на съставна функция се получава, че

$$f(\mathbf{x}^{(2)}) - f(\mathbf{x}^{(1)}) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f(\mathbf{x}^{(1)} + \xi(\mathbf{x}^{(2)} - \mathbf{x}^{(1)}))}{\partial x_k} (x_k^{(2)} - x_k^{(1)}).$$

На езика на скаларното произведение, последната формула може да се запише

$$f(\mathbf{x}^{(2)}) - f(\mathbf{x}^{(1)}) = \langle \nabla f(\mathbf{x}^{(1)} + \xi(\mathbf{x}^{(2)} - \mathbf{x}^{(1)})), \mathbf{x}^{(2)} - \mathbf{x}^{(1)} \rangle.$$

Точката $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{x}^{(1)} + \xi(\mathbf{x}^{(2)} - \mathbf{x}^{(1)})$ лежи вътре в отсечката I . По този начин доказахме

Теорема 11.9 (за крайните нараствания). Нека $f(\mathbf{x})$ е непрекъснато диференцируема по отсечката I с краища $\mathbf{x}^{(1)}$ и $\mathbf{x}^{(2)}$ ($\mathbf{x}^{(1)} \neq \mathbf{x}^{(2)}$). Тогава

$$f(\mathbf{x}^{(2)}) - f(\mathbf{x}^{(1)}) = \langle \nabla f(\mathbf{x}^{(0)}), \mathbf{x}^{(2)} - \mathbf{x}^{(1)} \rangle,$$

за някоя точка $\mathbf{x}^{(0)}$ от отсечката I . ■

Нека $\mathbf{n} = (l_1, l_2, \dots, l_n)$ е даден единичен вектор и функцията $f(\mathbf{x})$ е непрекъснато диференцируема в точката $\mathbf{x}^{(0)}$. Да положим $\varphi(t) = f(\mathbf{x}^{(0)} + t\mathbf{n})$. Тогава производната $\varphi'(0)$ се нарича **производна** на функцията $f(\mathbf{x})$ **по направление** \mathbf{n} в точката $\mathbf{x}^{(0)}$ и се бележи с $\frac{\partial f(\mathbf{x}^{(0)})}{\partial \mathbf{n}}$. Имаме

$$\varphi(t) = f(x_1^{(0)} + tl_1, x_2^{(0)} + tl_2, \dots, x_n^{(0)} + tl_n),$$

следователно, съгласно правилото за диференциране на съставни функции

$$(11.10) \quad \frac{\partial f(\mathbf{x}^{(0)})}{\partial \mathbf{n}} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f(\mathbf{x}^{(0)})}{\partial x_k} l_k = \langle \nabla f(\mathbf{x}^{(0)}), \mathbf{n} \rangle.$$

Частните производни могат да се разглеждат като частни случаи на производни по направление. Производната по направление $\mathbf{n} = (1, 0, \dots, 0)$ съвпада с частната

производна $\frac{\partial f(\mathbf{x}^{(0)})}{\partial x_1}$, производната по направление $\mathbf{n} = (0, 1, \dots, 0)$ съвпада с частната

производна $\frac{\partial f(\mathbf{x}^{(0)})}{\partial x_2}$ и т.н.

При функция на три променливи $f(x, y, z)$, векторът \mathbf{n} се задава чрез своите направляващи косинуси, $\mathbf{n} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$, и формулата (11.10) приема вида

$$(11.11) \quad \frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial \mathbf{n}} = \frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial z} \cos \gamma.$$

Чрез оператора ∇ (**набла**), определен в тримерното пространство, както следва

$$\nabla = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z},$$

градиентът на $f(x, y, z)$ може да се разглежда като вектор, получен след прилагането на ∇ върху функцията $f(x, y, z)$,

$$\nabla f(x, y, z) = \left(\mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) f(x, y, z) = \mathbf{i} \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial z}.$$

Формалното скаларно произведение на \mathbf{n} и ∇ има вида

$$\langle \mathbf{n}, \nabla \rangle = \cos \alpha \frac{\partial}{\partial x} + \cos \beta \frac{\partial}{\partial y} + \cos \gamma \frac{\partial}{\partial z}$$

и по този начин производната (11.11) се записва

$$\frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial \mathbf{n}} = \langle \mathbf{n}, \nabla \rangle f(x_0, y_0, z_0).$$

Производната по направление показва поведението на функцията в това направление от тип нарастване/намаление по добре известния начин.

Частните производни от втори и по висок ред се определят последователно чрез производните от по-нисък ред

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_i \partial x_j}.$$

За функция на две променливи имаме следните четири производни от втори ред

$$\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial x} = \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y \partial x}, \quad \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2}.$$

Оказва се, че при достатъчно общи предположения **смесените производни са равни**

$$\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y \partial x}.$$

Такова равенство е налице например, ако и двете смесени производни са непрекъснати. Ние винаги ще предполагаме равенство на смесените производни, което се отнася и за частните производни от ред трети и по-висок, когато се налага да боравим с тях. Например

$$\frac{\partial^3 f(x, y)}{\partial x \partial x \partial y} = \frac{\partial^3 f(x, y)}{\partial x \partial y \partial x} = \frac{\partial^3 f(x, y)}{\partial y \partial x \partial x} \text{ и т.н.}$$

Това предположение оправдава означението

$$\frac{\partial^m f(x, y)}{\partial x^j \partial y^{m-j}},$$

което означава, че частната производна е от ред m , по променливата x е диференцирано j пъти, а по променливата y е диференцирано $m-j$ пъти, при което последователността, по която се извършва това диференциране е без значение.

Без да привеждаме съображения за целесъобразност, определяме пълнен диференциал от втори ред за функцията $f(\mathbf{x})$,

$$d^2 f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j,$$

а пълният диференциал от трети ред е

$$d^3 f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial^3 f(\mathbf{x})}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} dx_i dx_j dx_k \text{ и т.н.}$$

4. Формула на Тейлър. Да разгледаме отначало функцията на две променливи $f(x, y)$, за която ще предполагаме, че е $m+1$ пъти непрекъснато диференцируема в околност на точката $M_0(x_0, y_0)$. Нека $M = M(x, y)$ е точката с текущи координати. Да положим $\varphi(t) = f(x_0 + t(x - x_0), y_0 + t(y - y_0))$. За функцията на една променлива $\varphi(t)$ ще приложим познатата формула на Тейлър с остатъчен член във формата на Лагранж, в околност на $t_0 = 0$. Съгласно тази формула

$$(11.12) \varphi(1) = \varphi(0) + \varphi'(0) + \frac{\varphi''(0)}{2} + \frac{\varphi'''(0)}{6} + \dots + \frac{\varphi^{(m)}(0)}{m!} + \frac{\varphi^{(m+1)}(\xi)}{(m+1)!},$$

където $\xi \in (0,1)$. Формулата за развитие на функцията $f(x, y)$ по Тейлър в околност на точката $M_0(x_0, y_0)$ се получава от (11.12) след привеждане на събираемите в подходящ вид. Очевидно

$$\varphi(0) = f(x_0, y_0) = f(M_0) \text{ и } \varphi(1) = f(x, y) = f(M).$$

За да пресметнем $\varphi'(0)$ трябва първо да намерим $\varphi'(t)$. От правилото за диференциране на съставни функции имаме

$$(11.13) \quad \varphi'(t) = \frac{\partial f(x_0 + t(x-x_0), y_0 + t(y-y_0))}{\partial x} (x-x_0) + \frac{\partial f(x_0 + t(x-x_0), y_0 + t(y-y_0))}{\partial y} (y-y_0),$$

следователно

$$\varphi'(0) = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} (x-x_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} (y-y_0) = f'_x(M_0)\Delta x + f'_y(M_0)\Delta y,$$

където $\Delta x = x - x_0$ и $\Delta y = y - y_0$. За да намерим $\varphi''(0)$ диференцираме (11.13) въз основа на правилото за диференциране на съставни функции, след което по същия начин получаваме

$$\begin{aligned} \varphi''(0) &= \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2} (x-x_0)^2 + 2 \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x \partial y} (x-x_0)(y-y_0) + \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y^2} (y-y_0)^2 = \\ &= f''_{xx}(M_0)\Delta x^2 + 2f''_{xy}(M_0)\Delta x\Delta y + f''_{yy}(M_0)\Delta y^2 \end{aligned}$$

Разсъждавайки аналогично, за $\varphi^{(k)}(0)$, $k = 1, 2, \dots, m$, получаваме

$$\varphi^{(k)}(0) = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \frac{\partial^k f(M_0)}{\partial x^j \partial y^{k-j}} \Delta x^j \Delta y^{k-j}, \quad \varphi^{(m+1)}(\xi) = \sum_{j=0}^{m+1} \binom{m+1}{j} \frac{\partial^{m+1} f(M_1)}{\partial x^j \partial y^{m+1-j}} \Delta x^j \Delta y^{m+1-j},$$

където M_1 е точка от отсечката с краища M_0 и M (формулата е вярна и за $k = 0$).

От тези изрази получаваме формулата на Тейлър,

$$(11.14) \quad \begin{aligned} f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) &= \sum_{k=0}^m \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \frac{\partial^k f(M_0)}{\partial x^j \partial y^{k-j}} \Delta x^j \Delta y^{k-j} + \\ &+ \frac{1}{(m+1)!} \sum_{j=0}^{m+1} \binom{m+1}{j} \frac{\partial^{m+1} f(M_1)}{\partial x^j \partial y^{m+1-j}} \Delta x^j \Delta y^{m+1-j} \end{aligned}$$

първите няколко члена на която имат вида

$$\begin{aligned} f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) &= f(M_0) + [f'_x(M_0)\Delta x + f'_y(M_0)\Delta y] + \\ &+ \frac{1}{2} [f''_{xx}(M_0)\Delta x^2 + 2f''_{xy}(M_0)\Delta x\Delta y + f''_{yy}(M_0)\Delta y^2] + \\ &+ \frac{1}{6} [f'''_{xxx}(M_0)\Delta x^3 + 3f'''_{xxy}(M_0)\Delta x^2\Delta y + 3f'''_{xyy}(M_0)\Delta x\Delta y^2 + f'''_{yyy}(M_0)\Delta y^3] + \dots \end{aligned}$$

За остатъчния член на формулата имаме

$$R_m = \frac{1}{(m+1)!} \sum_{j=0}^{m+1} \binom{m+1}{j} \frac{\partial^{m+1} f(M_1)}{\partial x^j \partial y^{m+1-j}} \Delta x^j \Delta y^{m+1-j} = o(|\overline{M_0 M}|^m),$$

където $|\overline{M_0 M}| = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}$ е дължината на отсечката $\overline{M_0 M}$. Използвайки

диференциалните оператори $\frac{\partial}{\partial x}$ и $\frac{\partial}{\partial y}$, общият член на (11.14) се записва като

$$\frac{1}{k!} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \frac{\partial^k f(M_0)}{\partial x^j \partial y^{k-j}} \Delta x^j \Delta y^{k-j} = \frac{1}{k!} \left(\Delta x \frac{\partial}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial}{\partial y} \right)^k f(M_0), \quad k = 0, 1, 2, \dots, m,$$

а самата формула приема вида

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = \sum_{k=0}^m \frac{1}{k!} \left(\Delta x \frac{\partial}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial}{\partial y} \right)^k f(M_0) + o\left(\overline{M_0 M}^m\right).$$

Разсъждавайки по същия начин, за случая на функция на три променливи $f(x, y, z)$ получаваме

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z) = \sum_{k=0}^m \frac{1}{k!} \left(\Delta x \frac{\partial}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial}{\partial y} + \Delta z \frac{\partial}{\partial z} \right)^k f(M_0) + o\left(\overline{M_0 M}^m\right),$$

и т.н.

В общия случай на функция $f(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, от основен интерес представляват събираемите от първи и втори ред. Да въведем матрицата на Хесе (**хесиан**) $\mathbf{H}(\mathbf{x})$,

$$\mathbf{H}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} f''_{x_1 x_1}(\mathbf{x}) & f''_{x_1 x_2}(\mathbf{x}) & \dots & f''_{x_1 x_n}(\mathbf{x}) \\ f''_{x_2 x_1}(\mathbf{x}) & f''_{x_2 x_2}(\mathbf{x}) & \dots & f''_{x_2 x_n}(\mathbf{x}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f''_{x_n x_1}(\mathbf{x}) & f''_{x_n x_2}(\mathbf{x}) & \dots & f''_{x_n x_n}(\mathbf{x}) \end{pmatrix},$$

която е симетрична ($n \times n$) матрица, поради равенството на смесените производни. Тогава чрез скалярно произведение и матрично умножение формулата на Тейлър с точност до събираеми от втори ред може да се запише

$$(11.15) \quad f(\mathbf{x} + \Delta \mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) + \langle \nabla f(\mathbf{x}), \Delta \mathbf{x} \rangle + \frac{1}{2} \langle \mathbf{H}(\mathbf{x}) \Delta \mathbf{x}, \Delta \mathbf{x} \rangle + o(|\Delta \mathbf{x}|^2).$$

Тук $\mathbf{H}(\mathbf{x}) \Delta \mathbf{x}$ е векторът, който се получава като умножим матрицата $\mathbf{H}(\mathbf{x})$ с вектор стълба на нарастванията $\Delta \mathbf{x}$. В този вид формулата на Тейлър е особено полезна при изследване локалното поведение на функцията $f(\mathbf{x})$.

Геометрична тълкуване на производните. Такова тълкуване е възможно за функция на две променливи $z = f(x, y)$, понеже свойствата на функцията се показват върху нейната графика Γ в тримерното пространство. Нека функцията $z = f(x, y)$ е непрекъснато диференцируема, в околност на точката $M_0(x_0, y_0)$. Тогава от формулата на Тейлър следва представянето

$$f(x, y) = f(M_0) + [f'_x(M_0)(x - x_0) + f'_y(M_0)(y - y_0)] + o\left(\overline{M_0 M}\right).$$

Събираемите от нулев и първи ред формират **допирателната равнина** π към графиката на функцията за точката M_0

$$(11.16) \quad \pi: z = f(M_0) + f'_x(M_0)(x - x_0) + f'_y(M_0)(y - y_0).$$

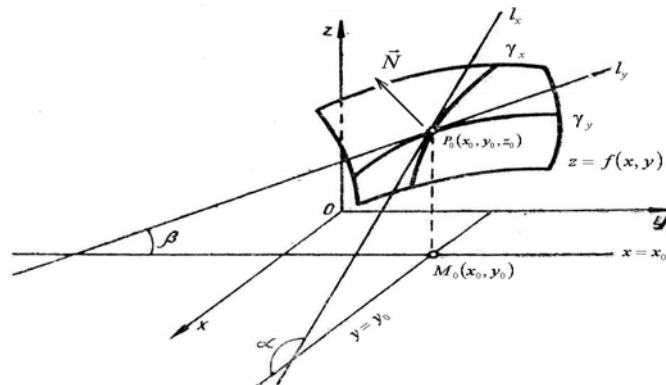


Рис. 11.5.

Нека γ_x (Рис. 11.5) е пространствената линия, която се получава от пресичането на равнината $y = y_0$ с графиката Γ и аналогично, γ_y е сечението на Γ с равнината $x = x_0$. Линиите γ_x и γ_y се пресичат върху Γ в точката $P_0(x_0, y_0, z_0)$, където $z_0 = f(x_0, y_0)$. Нека правата l_x лежи в равнината $y = y_0$ и е допирателна към γ_x , при която α е ъгълът, който сключва l_x с правата $y = y_0$ от координатната равнина Oxy . Тогава в равнината $y = y_0$ уравнението на правата l_x е $l_x: z = z_0 + f'_x(x_0, y_0)(x - x_0)$ и според известното тълкуване на производната имаме $\operatorname{tg} \alpha = f'_x(x_0, y_0)$. Разсъждавайки аналогично за правата l_y (Рис. 11.5) получаваме, че в равнината $x = x_0$ уравнението тази права е $l_y: z = z_0 + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0)$ и $\operatorname{tg} \beta = f'_y(x_0, y_0)$, което представлява геометричното тълкуване на стойностите на частните производни. Правите l_x и l_y лежат в допирателната равнина π . От уравнението (11.16) следва, че π има нормален вектор $\vec{N}(-f'_x(M_0), -f'_y(M_0), 1)$ с положителен направляващ косинус относно базисния вектор \mathbf{k} . Този вектор се нарича **нормален вектор към повърхнината** $z = f(x, y)$ за точката $M_0(x_0, y_0)$.

5. Неявни функции. Основната идея на диференциалното смятане е моделиране локалното поведение на сложно структурирани нелинейни функции с помощта на линейни такива. Тази идея се откроява най-добре при работа с неявни функции и обратни изображения.

Да разгледаме отначало уравнението $f(x, y) = 0$, което се удовлетворява ($f(x_0, y_0) = 0$) в дадена (начална) точка $M_0(x_0, y_0)$ от областта G . За функцията $f(x, y)$ ще предположим, че е непрекъснато диференцируема в областта G . В типичния случай, когато $|f'_x(x_0, y_0)| + |f'_y(x_0, y_0)| > 0$ (поне една от двете частни производни не се анулира в M_0), множеството от точки в равнината, което удовлетворява това уравнение представлява крива γ , съдържаща M_0 . В много случаи е невъзможно уравнението да се реши в елементарни функции относно y (или относно x) въпреки, че в околност на x_0 кривата γ във всяко отношение наподобява графика на някаква функция $y = \varphi(x)$ (Рис. 11.6).

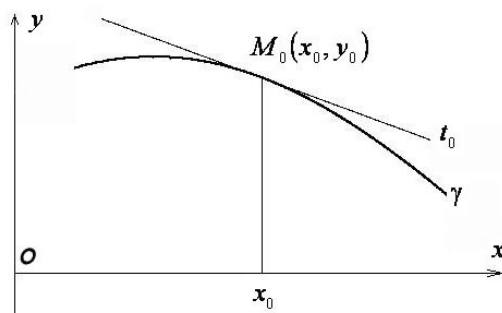


Рис. 11.6.

Кривата γ има допирателна t_0 в точката M_0 , чието уравнение се получава по следния начин. Пресмятайки пълния диференциал на лявата и дясната страна на равенството $f(x, y) = 0$ в точката M_0 получаваме $f'_x(x_0, y_0)dx + f'_y(x_0, y_0)dy = 0$. Сега като заместим $dx = \Delta x = x - x_0$ и $dy = \Delta y = y - y_0$, за допирателната намираме

$$t_0: f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0) = 0.$$

В частност векторът $\vec{N}(f'_x(x_0, y_0), f'_y(x_0, y_0))$ е нормален към допирателната. Този вектор се нарича **нормален вектор към кривата** γ в точката M_0 .

Средствата на диференциалното смятане позволяват при определени условия да разглеждаме променливата y като функция на x , $y = y(x)$, в някаква околност на x_0 (или x като функция на y в някаква околност на y_0). В този случай говорим за неявни функции. Идеята за неявна функция се състои в следното. Избираме една начална точка $M_0(x_0, y_0)$, която удовлетворява уравнението, $f(x_0, y_0) = 0$. Ако такава точка не може да се намери, то уравнението е безпредметно. След това се интересуваме от възможността променливата y да се изрази като неявна функция на променливата x , $y = y(x)$, в някаква (достатъчно малка) околност $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, $\delta > 0$, т.е. да бъде изпълнено $f(x, y(x)) = 0$, за всяко $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, при което да е налице и началното условие $y(x_0) = y_0$. Оказва се, че така формулираната задача за неявна функция има решение при условията на следната теорема.

Теорема 11.10. Нека функцията $f(x, y)$ е непрекъснато диференцируема в някаква околност на точката $M_0(x_0, y_0)$, при което $f(x_0, y_0) = 0$ и $f'_x(x_0, y_0) \neq 0$. Тогава променливата y може да се изрази като неявна функция на x в достатъчно малка околност на x_0 . Освен това тази функция е диференцируема в околност на x_0 , при което $y'(x_0) = -\frac{f'_x(x_0, y_0)}{f'_y(x_0, y_0)}$. ■

Горната теорема е типичен локален резултат, което означава, че се изследват свойства и характеристики в околност на някаква точка, която околност може да бъде много малка. По тази причина единственото достъпно за въпросната неявна функция са нейните локални свойства, като монотонност и изпъкналост. Всички тези свойства обикновено могат да бъдат открити в развитието на функцията по Тейлър около x_0 ,

$$(11.17) \quad y(x) = y(x_0) + y'(x_0)(x - x_0) + \frac{y''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \frac{y'''(x_0)}{6}(x - x_0)^3 + \frac{y^{(4)}(x_0)}{24}(x - x_0)^4 + \dots$$

Макар функцията $y(x)$ да е неявна, коефициентите в горната формула могат да се определят ефективно. За да определим $y'(x_0)$ постъпваме по следния начин. Диференцираме $f(x, y(x)) = 0$, съгласно правилото за диференциране на съставни функции и получаваме $f'_x + f'_y y' = 0$. Сега заместваем $x \rightarrow x_0$, $y \rightarrow y_0$ и получаваме $f'_x(x_0, y_0) + f'_y(x_0, y_0) y'(x_0) = 0$, откъдето намираме $y'(x_0)$. Тук беше важно, че можем да разделим на $f'_y(x_0, y_0)$, което по условие е различно от нула. Както ще се убедим след малко, същото условие е достатъчно и за получаване на останалите коефициенти в развитието. За да пресметнем $y''(x_0)$, диференцираме по x съотношението $f'_x + f'_y y' = 0$ следвайки правилото за диференциране на съставни функции и помейки, че $y = y(x)$. Получаваме $[f''_{xx} + f''_{yx} y'] y + [f''_{yx} + f''_{yy} y'] y' + f'_y y'' = 0$. Заместваем $x \rightarrow x_0$, $y \rightarrow y_0$ и $y'(x_0)$, което е вече пресметнато и получаваме

$$\text{известни величини} + f'_y(x_0, y_0) y''(x_0) = 0,$$

което ни позволява да пресметнем $y''(x_0)$. Този механизъм може да се повтори за определяне на следващите коефициенти. Описаната току що процедура ще покажем върху следния пример.

Пример 11.3. Да разгледаме съотношението

$$(11.18) f(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$$

и да фиксираме начално значение $x_0 = 0$. Тогава за начално значение на y остават две възможности $y_0 = \pm 1$. Избираме $y_0 = 1$. По този начин избрахме началната точка $M_0(0, 1)$. В този илюстративен пример става дума за явната функция $y = \sqrt{1 - x^2}$. Накрая на примера ще се върнем към явния вид на $y(x)$ за да съпоставим получения резултат. Първо трябва да се погрижим за условията на теорема 11.10. Функцията $f(x, y)$, както и нейните частни производни са непрекъснати навсякъде, при което $f'_y = 2y$ и $f'_y(x_0, y_0) = 2 \neq 0$. Следователно е валидно и заключението на теоремата, според което y може да се изрази като неявна функция на x в някаква околност на $x_0 = 0$ с изпълнение на началното условие $y(0) = 1$.

Нашата следваща цел е да получим първите няколко коефициента в развитието (11.17). По условие $y(0) = 1$. Диференцирайки (11.18) по x получаваме $2x + 2yy' = 0$, което може да опростим

$$(11.19) x + yy' = 0.$$

Заместваме $x \rightarrow 0$, $y \rightarrow 1$ и получаваме $0 + 1 \cdot y'(0) = 0$, откъдето намираме $y'(0) = 0$.

Сега диференцираме (11.19) и получаваме

$$(11.20) 1 + y'y'' + yy''' = 0.$$

Заместваме $x \rightarrow 0$, $y \rightarrow 1$, $y' \rightarrow 0$ и намираме $y''(0) = -1$. По-нататък за да определим $y'''(0)$, диференцираме (11.20) по x и получаваме

$$(11.21) 2y'y'' + y'y''' + yy'''' = 0.$$

Заместваме $x \rightarrow 0$, $y \rightarrow 1$, $y' \rightarrow 0$, $y'' \rightarrow -1$ и намираме $y'''(0) = 0$. Сега диференцирайки (11.21) по x получаваме $3y''y'' + 3y'y''' + y'y'''' + yy^{(5)} = 0$. Заместваме $x \rightarrow 0$, $y \rightarrow 1$, $y' \rightarrow 0$, $y'' \rightarrow -1$, $y''' \rightarrow 0$ и получаваме $y^{(4)}(0) = -3$.

Събирайки получените дотук резултати можем да напишем следното развитие

$$(11.22) y = 1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{24}x^4 + \dots$$

Информацията с която разполагаме е достатъчна да установим, че $x_0 = 0$ е точка на строг локален максимум за въпросната неявна функция без да познаваме самата функция, понеже първата производна се анулира, а втората производна е отрицателна.

От друга страна, съгласно формулата за обобщения нютонин бином,

$$y = \sqrt{1 - x^2} = (1 - x^2)^{\frac{1}{2}} = 1 + \binom{\frac{1}{2}}{1}(-x^2)^1 + \binom{\frac{1}{2}}{2}(-x^2)^2 + \dots,$$

което е същото като (11.22), понеже за обобщените биномни коефициенти имаме

$$\binom{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2} \text{ и } \binom{\frac{1}{2}}{2} = \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}{2} = -\frac{1}{8}.$$

Ако бяхме избрали другото начално условие $y_0 = -1$, щяхме да разсъждаваме за явната функция $y = -\sqrt{1 - x^2}$.