Лекция 14

§14. Обикновени диференциални уравнения

1. Уравнения от първи ред. ***Диференциално уравнение*** се нарича уравнение, в което участват известен брой производни на търсената функция. В общия случай диференциалното уравнение има вида $F\left(x, y, y', \ldots, y^{(n)}\right) = 0$, където F е непрекъсната функция. Най-високата производна в записа се нарича ред на уравнението.

Пример 14.1. Уравнението $y''' \sin y + x^2 \cos y' - 2xy'' = 0$ е от трети ред.

Променливата x се нарича ***независима променлива***, а чрез y е означена функцията която търсим в качеството на решение на въпросното уравнение. Една непрекъсната функция $y(x)$ се нарича решение на диференциалното уравнение в интервала Δ, когато има непрекъснати производни до реда на уравнението и след заместване го удовлетворява тъждествено в интервала Δ. Ние ще разглеждаме основно уравнения разрешени относно старшата производна, които имат вида $y^{(n)} = f\left(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right)$, където f е непрекъсната функция. Под ***общо решение*** на дадено диференциално уравнение се разбира съвкупността от всичките негови решения. Намирането на общото решение на дадено диференциално уравнение е специфична и трудна задача, а в повечето случаи общото решение не може да се запише като краен израз от елементарни функции дори когато самото уравнение изглежда достатъчно просто. Едно такова уравнение например е уравнението $y' = y^2 - x^2$.

Намирането на неопределен интеграл от функцията $f(x)$ формално е частен случай на решаване на диференциално уравнение от първи ред $y' = f(x)$. Неговото общо решение е $y = \int f(x)dx + C$, в който запис присъства една произволна константа. Уравнението от n-ти ред $y^{(n)} = f(x)$ се решава чрез последователни интегрирания.

Пример 14.2. Да решим уравнението $y'' = \cos x$. След едно интегриране получаваме $y' = \sin x + C_1$, а след второто $y = -\cos x + C_1 x + C_2$. Тук се получиха две на брой произволни константи колкото е редът на уравнението.

В общия случай ситуацията е аналогична. Общото решение на едно диференциално уравнение от ред n зависи от толкова на брой произволни константи и има вида $\Phi\left(x, y; C_1, C_2, \ldots, C_n\right) = 0$. При фиксирани допустими стойности за тези константи, формулата за общо решение задава връзка между променливите x и y, която в типичния случай представлява (една или повече) крива в декартовата равнина R^2_{xy}. Тези криви се наричат ***интегрални криви*** на уравнението.

За уравнението $y^{(n)} = f\left(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right)$ ще разглеждаме още и ***начална задача***, която се получава когато към това уравнение прибавим определен брой начални условия, които представляват стойностите на търсената функция и нейните производни до ред $n-1$ в дадена начална точка x_0.

В тази лекция отначало ще разглеждаме уравнения от първи ред решени относно производната, които се записват $y' = f(x, y)$, където $f(x, y)$ е непрекъсната функция. Общото решение тук има вида $\Phi(x, y; C) = 0$. Съвкупността на интегралните криви се определя от един параметър – произволната константа C, а решаването на началната задача с начално условие $y(x_0) = y_0$ означава да се избере онази интегрална крива, която минава през точката на началните данни (x_0, y_0). За тези уравнения променливите x и y са фактически равнопоставени по смисъла на самото уравнение, независимо от факта, че първоначално x се схваща като независима променлива, а y като функция на x. Тази равнопоставеност добре се забелязва от вида на общото решение, както и от геометричното тълкуване на решенията като интегрални криви. Ако запишем производната като отношение на двата диференциала, $y' = \frac{dy}{dx}$, то уравнението $y' = f(x, y)$ приема вида

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \text{ или } \frac{dx}{dy} = \frac{1}{f(x, y)} = g(x, y),$$

което още веднъж показва еднаквото значение на променливите x и y. Последното обосновава равенството

(14.1) $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$,

като най-обща форма на записване на едно диференциално уравнение от първи ред, решено относно производната. Уравнението (14.1) можем да презапишем

$$y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{P(x, y)}{Q(x, y)} \text{ или } x' = \frac{dx}{dy} = -\frac{Q(x, y)}{P(x, y)},$$

където x' означава производната на x като функция на y.

Уравнения с разделящи се променливи. Такива са уравненията от вида

$$y' = f(x)g(y),$$

където $f(x)$ и $g(x)$ са непрекъснати функции. Уравнението (14.2) записваме във вида

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y),$$

което позволява да разделим променливите

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx.$$

Като интегрираме последното, за общото решение получаваме формулата

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx + C,$$

където C е произволна константа.

Тук и навсякъде по-нататък в процедура за решаване на диференциални уравнения, под неопределен интеграл ще разбираме само една примитивна, която се избира с оглед на конкретно удобство. Това се прави по целесъобразност да не се смесват по произволен начин константите идващи от неопределения интеграл и за да имат ясен смисъл изразите, в които участват интегралните знаци.

Пример 14.3. Да решим уравнението

(14.2) $y' = 4x\sqrt{y}$.

Следвайки процедурата за решаване на уравнения с разделящи се променливи намираме

$$\frac{dy}{dx} = 4x\sqrt{y}, \quad \frac{dy}{2\sqrt{y}} = 2xdx,$$

откъдето след интегриране получаваме

$$\int \frac{dy}{2\sqrt{y}} = \int 2xdx + C.$$

Като пресметнем интегралите получаваме, че общото решение на (14.2) е

$$\sqrt{y} = x^2 + C.$$

Този подход крие известен риск да пропуснем някои частни решения, което няма да обсъждаме.

По аналогия с формулата (14.1), най-общата форма на запис за уравнения с разделящи се променливи е

$$P(x)dx + Q(y)dy = 0,$$

в която всъщност променливите са разделени още в записа на уравнението.

Нека едно уравнение може да се преобразува във вида

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right). \tag{14.3}$$

Тогава след полагане $y = xu$, $u = u(x)$, (14.3) се свежда към уравнение с разделящи се променливи. Имаме $y' = u + xu'$. След заместване получаваме

$$xu' + u = f(u),\ x\frac{du}{dx} + u = f(u),\ \frac{du}{f(u) - u} = \frac{dx}{x},$$

откъдето за общото решение на (14.3) намираме формулата

$$\int \frac{du}{f(u) - u} = \int \frac{dx}{x} + C,$$

в която след решаване на интегралите трябва да се върнем към първоначалните променливи x и y.

Пример 14.4. Да решим уравнението

$$xy' = y(\ln y - \ln x). \tag{14.4}$$

Това уравнение се преобразува до хомогенно

$$y' = \frac{y}{x}\ln\frac{y}{x}.$$

Полагаме $y = xu$, $u = u(x)$, при което $y' = u + xu'$. Заместваме и намираме

$$u + xu' = u\ln u,\ \frac{du}{u(\ln u - 1)} = \frac{dx}{x},$$

следователно общото решение има вида

$$\int \frac{du}{u(\ln u - 1)} = \int \frac{dx}{x} + C.$$

За неопределените интеграли имаме

$$\int \frac{du}{u(\ln u - 1)} = \ln|\ln u - 1| \text{ и } \int \frac{dx}{x} = \ln|x|,$$

откъдето за общото решение получаваме

$$\ln|\ln u - 1| = \ln|x| + C.$$

В последния израз можем да положим $C = \ln C_1$, $C_1 > 0$, и да преобразуваме до вида

$$|\ln u - 1| = C_1|x|,\ C_1 > 0.$$

Сега ще се освободим от модулите позволявайки константата C_1 да приема всякакви стойности. Окончателно за общото решение намираме формулата

$$\ln u - 1 = Cx,\ u = e^{Cx+1},$$

което в първоначалните променливи е

$$y = xe^{Cx+1},$$

където C е произволна константа.

Линейни уравнения. Диференциалното уравнение от първи ред се нарича линейно, когато има вида

(14.5) $y' + a(x)y = b(x)$,

където коефициентите $a(x)$ и $b(x)$ се предполагат непрекъснати функции в отворения интервал Δ. Да положим $y(x) = z(x)e^{-\int a(x)dx}$ и да заместим в (14.5). Получаваме

$$z'e^{-\int a(x)dx} - ze^{-\int a(x)dx}a(x) + a(x)ze^{-\int a(x)dx} = b(x),$$

$$z' = e^{\int a(x)dx}b(x),$$

$$z = \int e^{\int a(x)dx}b(x)dx + C,$$

следователно всичките решения на (14.5) се дават по формулата

(14.6) $y = e^{-\int a(x)dx}\left[\int e^{\int a(x)dx}b(x)dx + C\right]$.

Пример 14.5. Да решим уравнението

(14.7) $y'\cos x + y\sin x = 1$.

Уравнението е линейно, понеже се преобразува като

$$y' + y\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{1}{\cos x}.$$

Съгласно формулата (14.6), неговото общо решение е

(14.8) $y = e^{-\int \frac{\sin x}{\cos x}dx}\left[\int e^{\int \frac{\sin x}{\cos x}dx}\frac{1}{\cos x}dx + C\right]$.

Пресмятаме

$$\int \frac{\sin x}{\cos x}dx = -\ln|\cos x|, \quad e^{-\int \frac{\sin x}{\cos x}dx} = e^{\ln|\cos x|} = |\cos x|$$

и заместваме в (14.8), като разглеждаме два случая.

1) $\cos x > 0$. Тогава имаме

$$y = \cos x\left[\int \frac{dx}{\cos^2 x} + C\right] = \cos x[\operatorname{tg} x + C] = \sin x + C\cos x.$$

2) $\cos x < 0$. Тогава имаме

$$y = -\cos x\left[-\int \frac{dx}{\cos^2 x} + C\right] = -\cos x[-\operatorname{tg} x + C] = \sin x - C\cos x.$$

Понеже C е произволна константа, горните два случая могат да бъдат обединени с единствената формула

$$y = \sin x + C\cos x,$$

което е общото решение на (14.7). Изобщо когато целият първи множител във формулата (14.6) се получи в модул, при следващите преобразувания модулът се пренебрегва.

Уравнението на Бернули

(14.9) $y' + a(x)y = b(x)y^m$, $m \neq 0$, $m \neq 1$,

се свежда до линейно след полагането $z = y^{1-m}$,

$$z' + (1-m)a(x)z = (1-m)b(x).$$

Точни диференциални уравнения. В този раздел ще разглеждаме уравнения от първи ред, записани в общата форма (14.1). Диференциалното уравнение

(14.10) $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$

се нарича ***точно***, когато диференциалната форма $Pdx + Qdy$ се явява пълен диференциал на някоя функция $U(x,y)$. По тази причина точните уравнения се наричат още ***уравнения, произхождащи от пълен диференциал***. Тук функциите $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ се предполагат гладки (имат непрекъснати частни производни) в областта $D \subset \mathrm{R}^2$. Съгласно определението за пълен диференциал, уравнението (14.10) е точно, ако за някоя гладка в D функция $U(x,y)$ е изпълнено

$$(14.11)\left|\begin{array}{l} U'_x = P(x,y) \\ U'_y = Q(x,y) \end{array}\right.$$

при всяко $(x,y) \in D$. Ако уравнението (14.10) е точно, то имаме $U''_{xy} = P'_y(x,y)$ и $U''_{yx} = Q'_x(x,y)$. Сега от равенството на смесените производни следва, че по необходимост е налице условието

$$(14.12)\; Q'_x(x,y) \equiv P'_y(x,y),$$

което се нарича ***условие за точност***. Ако уравнението (14.10) е точно и е породено от пълния диференциал на $U(x,y)$, то може да се запише във вида $dU(x,y) = 0$, а неговото общо решение се дава по формулата

$$(14.13)\; U(x,y) = C,$$

където C е произволна константа.

Пример 14.6. Да разгледаме уравнението

$$(y + 2x)dx + (x + 2y)dy = 0.$$

Това уравнение е точно, понеже е породено от пълния диференциал на функцията $U = xy + x^2 + y^2$, следователно неговото общо решение е

$$x^2 + y^2 + xy = C.$$

Решаването на дадено точно уравнение означава да се намери функцията $U(x,y)$, която го поражда. Това може да стане например по следната схема. Разглеждаме първото от равенствата (14.11) и го интегрираме по x. Получаваме

$$(14.14)\; U(x,y) = \int P(x,y)dx + \varphi(y).$$

Тук $\varphi(y)$ е константата на интегрирането, която може да зависи от другата променлива y. Диференцираме (14.14) по y и получаваме

$$U'_y = \frac{d}{dy}\left(\int P(x,y)dx\right) + \varphi'(y),$$

откъдето съгласно второто равенство в (14.12) намираме

$$(14.15)\; \varphi'(y) = Q(x,y) - \frac{d}{dy}\left(\int P(x,y)dx\right).$$

От последното, след преобразуване и евентуално опростяване на изразите, чрез интегриране определяме функцията $\varphi(y)$. За да бъде възможно извършването на всичките действия е необходимо дясната страна на (14.15) да не зависи от x. Това условие е налице, понеже производната на израза по x е тъждествено нула,

$$\frac{d}{dx}\left[Q(x,y) - \frac{d}{dy}\left(\int P(x,y)dx\right)\right] = Q'_x - \frac{d^2}{dxdy}\left(\int P(x,y)dx\right) =$$

$$= Q'_x - \frac{d^2}{dydx}\left(\int P(x,y)dx\right) = Q'_x - \frac{d}{dy}P(x,y) \equiv 0$$

съгласно условието за точност (14.12).

Пример 14.7. Да решим по тази схема уравнението

$$(14.16)\; (y - 2x)dx + (x + 3y^2)dy = 0.$$

Тук $P = y - 2x$ и $Q = x + 3y^2$. Имаме $Q'_x \equiv 1 \equiv P'_y$, следователно уравнението (14.16) е точно. Сега търсим функция $U(x, y)$, за която е изпълнено

$$\begin{vmatrix} U'_x = y + 2x \\ U'_y = x - 3y^2 \end{vmatrix}.$$

Интегрираме първото равенство по x и получаваме

$$U = \int (y - 2x)dx + \varphi(y) = y\int dx - 2\int xdx + \varphi(y),$$

(14.17) $U = yx - x^2 + \varphi(y)$.

След диференциране по y, като отчетем второто равенство намираме

$$x - 3y^2 = x + \varphi'(y),$$

откъдето пресмятаме

$$\varphi(y) = -\int 3y^2 dy = y^3.$$

Сега като заместим в (14.17), получаваме $U = yx - x^2 + y^3$, следователно общото решение на (14.16) се получава по формулата

$$yx - x^2 + y^3 = C,$$

където C е произволна константа.

Изложената схема за определяне на $U(x, y)$ може да стартира и от второто равенство (14.11), като в този случай отначало ще интегрираме по y, а след това за да използваме информацията от първото равенство ще диференцираме по x.

При началната задача за уравнението (14.10) търсим интегрална крива, която минава през точката (x_0, y_0). Ако уравнението е точно, то решението се получава по формулата $U(x, y) = U(x_0, y_0)$.

Уравненията с разделящи се променливи

(14.18) $P(x)dx + Q(y)dy = 0$

са частен случай на точни уравнения, понеже тук $Q'_x(y) \equiv P'_y(x) \equiv 0$. От направените разсъждения следва, че решението на началната задача за (14.18) има вида

$$\int_{x_0}^{x} P(x)dx + \int_{y_0}^{y} Q(y)dy = 0,$$

ако е налице условието $P(x_0) \neq 0$ или $Q(y_0) \neq 0$.

2. Линейни диференциални уравнения от n-ти ред. ***Определения и основни свойства. Детерминанта на Вронски.*** Линейно диференциално уравнение (**ЛДУ**) от n-ти ред $(n \in \mathrm{N})$ се нарича уравнението

(14.19) $a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x)$,

където коефициентите $a_n(x)$, $a_{n-1}(x)$, ..., $a_1(x)$, $a_0(x)$ и функцията $f(x)$ се предполагат ***непрекъснати*** в отворения интервал Δ. Освен това винаги ще предполагаме, че старшият коефициент $a_n(x)$ ***навсякъде е различен от нула***, $a_n(x) \neq 0$, $x \in \Delta$. При тези предположения уравнението (14.19) е от ред n във всяка точка на интервала Δ. Когато функцията $f(x)$ е тъждествено нула, $f(x) \equiv 0$, уравнението (14.19) се нарича линейно хомогенно диференциално уравнение (**ЛХДУ**) от n-ти ред

(14.20) $a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$.

Нека x_0 е някаква точка от Δ. Тогава за уравнението (14.19) може да се постави следната ***начална задача*** (***задача на Коши***)

$$
(14.21)\quad \left|\begin{array}{l} a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x) \\ y(x_0) = y_0^0 \\ y'(x_0) = y_0^1 \\ \ldots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{n-1} \end{array}\right.
$$

която се състои от самото уравнение и n на брой ***начални условия***. Началните условия са стойностите на търсената функция и на нейните производни до ред $n-1$ в ***началната точка*** x_0. Валидна е следната

Теорема 14.1 (***за съществуване и единственост***). При направените предположения, началната задача (14.21) има, при това единствено решение. Това решение е определено в целия интервал Δ. ■

От тази теорема следва верността на

Твърдение 14.1. Началната задача за хомогенно уравнение с нулеви начални условия

$$
(14.22)\quad \left|\begin{array}{l} a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0 \\ y(x_0) = 0 \\ y'(x_0) = 0 \\ \ldots \\ y^{(n-1)}(x_0) = 0 \end{array}\right.
$$

има единствено решение $y(x) \equiv 0$. ■

Доказателство. Функцията $y(x) \equiv 0$ очевидно е решение на началната задача (14.22). От клаузата за единственост на теорема 14.1 следва, че други решения няма. ■

Твърдение 14.1 ще бъде използвано по-нататък при доказване основните резултати от темата.

Решенията на ЛХДУ (14.20) образуват линейно пространство.

Твърдение 14.2. Нека y_1, y_2, ..., y_m са решения на ЛХДУ (14.20). Тогава всяка тяхна линейна комбинация $y = \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \cdots + \lambda_m y_m$ също е решения на (14.20).

Доказателство. Доказателството на това твърдение се получава лесно от факта, че диференцирането е линейна операция. По условие

$$a_n(x)y_1^{(n)} + a_{n-1}(x)y_1^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y_1' + a_0(x)y_1 = 0,$$

$$a_n(x)y_2^{(n)} + a_{n-1}(x)y_2^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y_2' + a_0(x)y_2 = 0,$$

...

$$a_n(x)y_m^{(n)} + a_{n-1}(x)y_m^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y_m' + a_0(x)y_m = 0.$$

Като умножим всяко от горните равенства λ_1, λ_2, ..., λ_m и съберем, получаваме, че линейната комбинация удовлетворява ЛХДУ (14.20), понеже

$$y^{(k)} = [\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \cdots + \lambda_m y_m]^{(k)} = \lambda_1 y_1^{(k)} + \lambda_2 y_2^{(k)} + \cdots + \lambda_m y_m^{(k)},\ k = 0,1,\ldots,n.$$ ■

Твърдение 14.3. Нека y_1 и y_2 са решения на ЛДУ (14.19). Тогава тяхната разлика $y = y_1 - y_2$ е решение на ЛХДУ (14.20).

Доказателство. По условие

$$a_n(x)y_1^{(n)} + a_{n-1}(x)y_1^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y_1' + a_0(x)y_1 = 0,$$

$$a_n(x)y_2^{(n)} + a_{n-1}(x)y_2^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y_2' + a_0(x)y_2 = 0.$$

Като извадим почленно двете равенства и се възползваме от факта, че диференцирането е линейна операция, получаваме верността на твърдението, понеже

$$y^{(k)} = [y_1 - y_2]^{(k)} = y_1^{(k)} - y_2^{(k)},\ k = 0,1,\dots,n\,.\ \blacksquare$$

Функциите y_1, y_2, ..., y_m се наричат ***линейно независими*** в интервала Δ, ако равенството $\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \dots + \lambda_m y_m = 0$, за всяко $x \in \Delta$, е възможно единствено когато $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_m = 0$ и ***линейно зависими*** в противен случай. Функциите y_1, y_2, ..., y_m са линейно зависими в интервала Δ тогава и само тогава, когато могат да се намерят константи λ_1, λ_2, ..., λ_m, поне една от които е различна от нула, за които линейната комбинация $\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \dots + \lambda_m y_m = 0$ тъждествено нула в целия интервал Δ.

Определение 14.1. Казва се, че решенията на ЛХДУ (14.20) y_1, y_2, ..., y_n образуват фундаментална система, когато са линейно независими в интервала Δ.

Детерминанта на Вронски $W(x)$ на функциите y_1, y_2, ..., y_n се нарича следната детерминанта от n-ти ред

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \cdots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \cdots & y_n'(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}.$$

Основната теорема в този раздел е

Теорема 14.2. Нека y_1, y_2, ..., y_n са решения на ЛХДУ (14.20). Тогава следните условия са еквивалентни.

1) y_1, y_2, ..., y_n са линейно независими и образуват фундаментална система.

2) $W(x_0) \neq 0$, за някое $x_0 \in \Delta$.

3) $W(x) \neq 0$, за всяко $x \in \Delta$.

Доказателство. Доказателството ще проведем по кръговата схема $T_1 \Rightarrow T_2 \Rightarrow T_3 \Rightarrow T_1$, след като преобразуваме теоремата в еквивалентна форма. Ще докажем, че следните условия са еквивалентни.

T_1) y_1, y_2, ..., y_n са линейно зависими.

T_2) $W(x) = 0$, за всяко $x \in \Delta$.

T_3) $W(x_0) = 0$, за някое $x_0 \in \Delta$.

Тук на мястото на всяко от условията на теорема 14.2 е взето неговото логическо отрицание. От законите на логиката знаем, че дадени твърдения са еквивалентни тогава и само тогава, когато са еквивалентни техните отрицания.

1) $T_1 \Rightarrow T_2$. Нека решенията y_1, y_2, ..., y_n са линейно зависими. Тогава съществува тяхна линейна комбинация, с поне един различен от нула коефициент, която е тъждествено нула в интервала Δ,

$$\lambda_1 y_1(x) + \lambda_2 y_2(x) + \dots + \lambda_n y_n(x) = 0,\ x \in \Delta\,.$$

Диференцирайки последователно последното равенство, получаваме

$$\lambda_1 y_1'(x) + \lambda_2 y_2'(x) + \dots + \lambda_n y_n'(x) = 0,\ x \in \Delta\,,$$

...

$$\lambda_1 y_1^{(n-1)}(x) + \lambda_2 y_2^{(n-1)}(x) + \dots + \lambda_n y_n^{(n-1)}(x) = 0,\ x \in \Delta\,,$$

което означава, че стълбовете в детерминантата на Вронски са линейно зависими и $W(x) = 0$, за всяко $x \in \Delta$.

2) Твърдението $T_2 \Rightarrow T_3$ е очевидно.

3) $T_3 \Rightarrow T_1$. Да предположим сега, че за някое $x_0 \in \Delta$ е налице $W(x_0)=0$. Равенството на нула на една детерминанта означава, че нейните стълбове (както и нейните редове са линейно зависими). Нека константите λ_1, λ_2, ..., λ_n, поне една от които е различна от нула, са такива, че като умножим с тях съответните стълбове на $W(x_0)$ и съберем се получава нулевия стълб. Да положим

(14.23) $y_*(x)=\lambda_1 y_1(x)+\lambda_2 y_2(x)+\cdots+\lambda_n y_n(x)$.

Съгласно избора на константите, за функцията $y_*(x)$ е изпълнено

$$y_*(x_0)=y_*'(x_0)=\cdots=y_*^{(n-1)}(x_0)=0,$$

следователно y_* е решение на хомогенната начална задача (14.22) с нулеви начални условия и съгласно твърдение 14.1, $y_*(x)\equiv 0$.

По този начин (14.23) се оказа една нетривиална линейна комбинация на решенията y_1, y_2, ..., y_n, която е тъждествено нула в Δ, а това по определение означава, че те са линейно зависими. ■

Теорема 14.2 показва, че ако y_1, y_2, ..., y_n са решения на ЛХДУ (14.20), то $W(x)=0$, за всяко $x\in\Delta$, или $W(x)\neq 0$, за всяко $x\in\Delta$.

Структура на решенията. Отначало ще се убедим, че наистина съществуват фундаментални системи от решения на (14.20). Да изберем едно $x_0\in\Delta$. Нека функцията y_1 е решение на началната задача (14.21) с начални условия $y_1(x_0)=1$, $y_1'(x_0)=0$, ..., $y_1^{(n-1)}(x_0)=0$. Аналогично нека y_2 е решение на началната задача (14.21) с начални условия $y_2(x_0)=0$, $y_2'(x_0)=1$, ..., $y_2^{(n-1)}(x_0)=0$ и т.н. нека y_n е решение на началната задача (14.21) с начални условия $y_n(x_0)=0$, $y_n'(x_0)=0$, ..., $y_n^{(n-1)}(x_0)=1$. Тогава тяхната детерминанта на Вронски

$$W(x_0)=\begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}=1\neq 0$$

което според теорема 14.2 означава, че y_1, y_2, ..., y_n образуват фундаментална система от решения за ЛХДУ (14.20). От направеното разсъждение се вижда, че съществуват различни фундаментални системи и всяка от тях се получава като изберем някаква $n\times n$ матрица A с различна от нула детерминанта и колоните на тази матрица обявим за начални данни на функциите, които образуват фундаменталната система.

Нека y_1, y_2, ..., y_n е една (коя да е) фундаментална система за ЛХДУ (14.20) и нека y_* е някакво решение на това хомогенно уравнение. Да изберем една точка $x_0\in\Delta$ и да образуваме линейната комбинация

$$\varphi(x)=\lambda_1 y_1(x)+\lambda_2 y_2(x)+\cdots+\lambda_n y_n(x)-y_*(x).$$

Функцията $\varphi(x)$ е решение на ЛХДУ (14.20) понеже е линейна комбинация на такива решения. Да изберем константите λ_1, λ_2, ..., λ_n от условието

$$\varphi(x_0)=\varphi'(x_0)=\cdots=\varphi^{(n-1)}(x_0)=0,$$

което е еквивалентно на следната линейна система относно λ_1, λ_2, ..., λ_n,

$$\lambda_1 y_1(x_0)+\lambda_2 y_2(x_0)+\cdots+\lambda_n y_n(x_0)=y_*(x_0),$$

$$\lambda_1 y_1'(x_0)+\lambda_2 y_2'(x_0)+\cdots+\lambda_n y_n'(x_0)=y_*'(x_0)$$

...

$$\lambda_1 y_1^{(n-1)}(x_0)+\lambda_2 y_2^{(n-1)}(x_0)+\cdots+\lambda_n y_n^{(n-1)}(x_0)=y_*^{(n-1)}(x_0),$$

чиято детерминанта е точно $W(x_0)$ и съгласно теорема 14.2 е различна от нула понеже системата от решения се предполага фундаментална. Функцията $\varphi(x)$ се оказа решение на хомогенната начална задача с нулеви начални условия (14.22) и следователно $\varphi(x)\equiv 0$, откъдето за решението y_* намираме следното представяне

$$y_*(x)=\lambda_1 y_1(x)+\lambda_2 y_2(x)+\cdots+\lambda_n y_n(x),\ x\in\Delta.$$

По този начин доказахме

Теорема 14.3. Всичките решения на ЛХДУ (14.2) се получават по формулата

(14.24) $y=C_1y_1+C_2y_2+\cdots+C_ny_n$,

където y_1, y_2, ..., y_n е една (коя да е) фундаментална система, а C_1, C_2, ..., C_n са произволни константи. ■

Формулата (14.24) задава ***общото решение*** на ЛХДУ (14.20). Във вида на това общо решение участват n на брой произволни константи, което съответства на реда на уравнението.

Пример 14.8. Да разгледаме уравнението

(14.25) $y''+y=0$.

Лесно се проверява, че функциите $y_1=\sin x$ и $y_2=\cos x$ са решения. Освен това за тяхната детерминанта на Вронски имаме

$$W(x)=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ \cos x & -\sin x \end{vmatrix}=-1\neq 0,$$

следователно y_1 и y_2 образуват фундаментална система. Сега съгласно теорема 14.3, общото решение на уравнението (14.25) се получава по формулата

$$y=C_1\sin x+C_2\cos x.$$

За да получим вида на общото решение за ЛДУ (14.1) е необходимо да познаваме едно частно решение y_0.

Теорема 14.4. Всичките решения на ЛДУ (14.19) се получават по формулата

(14.26) $y=y_0+C_1y_1+C_2y_2+\cdots+C_ny_n$,

където y_0 е едно (кое да е) частно решение, y_1, y_2, ..., y_n е една (коя да е) фундаментална система на съответното хомогенно уравнение (14.20), а C_1, C_2, ..., C_n са произволни константи.

Доказателство. Да разгледаме едно решение y на ЛДУ (14.19). Съгласно твърдение 14.3, разликата $y-y_0$ е решение на ЛХДУ (14.20) и според теорема 14.3,

$$y-y_0=C_1y_1+C_2y_2+\cdots+C_ny_n,$$

което доказва теоремата. ■

Формулата (14.26) задава ***общото решение*** на ЛДУ (14.19).

Пример 14.9. Да разгледаме уравнението

(14.27) $y''+y=x$.

Съответното хомогенно уравнение е (14.25), за което вече установихме, че функциите $y_1=\sin x$ и $y_2=\cos x$ образуват фундаментална система. Лесно се вижда, че функцията $y_0=x$ е едно частно решение. Сега по формулата (14.26) за общото решение на (14.27) намираме

$y = x + C_1 \sin x + C_2 \cos x$.

Теорема 14.4 може да се схваща като непосредствено обобщение на теорема 14.3, понеже хомогенното уравнение има едно очевидно частно решение $y_0 \equiv 0$.

3. Линейни диференциални уравнения с постоянни коефициенти. Линейно диференциално уравнение от n-ти ред с постоянни коефициенти $(n \in \mathrm{N})$ се нарича уравнението

(14.28) $a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = f(x)$, $a_n \neq 0$,

където коефициентите a_n, a_{n-1}, ..., a_1, a_0 са константи. Тук функцията $f(x)$ се предполага ***непрекъсната*** в отворения интервал Δ, в който търсим решенията. Когато функцията $f(x)$ е тъждествено нула, $f(x) \equiv 0$, уравнението (14.28) е хомогенно

(14.29) $a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0$.

Тези уравнения са частен случай на линейни диференциални уравнения, следователно за тях е валидна теорията от предишния раздел. Преди всичко трябва да се научим да намираме фундаментални системи от решения за ЛХДУ (14.29). Основната роля тук се изпълнява от ***характеристичният полином***

(14.30) $\chi(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$.

Да разгледаме функцията $y = e^{\alpha x}$, $\alpha \in \mathrm{R}$. Пресмятаме $y' = \alpha e^{\alpha x}$, $y'' = \alpha^2 e^{\alpha x}$, ..., $y^{(n)} = \alpha^n e^{\alpha x}$. След заместване в лявата страна на уравнението (14.29) и изнасяне на общия множител $e^{\alpha x}$ пред скоби получаваме

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = e^{\alpha x}\left[a_n \alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + \cdots + a_1 \alpha + a_0\right] = \chi(\alpha) e^{\alpha x} .$$

Последното показва, че ако α е реален корен на $\chi(z)$, то функцията $y = e^{\alpha x}$ е решение на ЛХДУ (14.29). Най-прост е случаят, когато характеристичният полином $\chi(z)$ има n на брой реални и различни корени α_1, α_2, ..., α_n (прости реални корени). Тогава всяка от функциите $y_1 = e^{\alpha_1 x}$, $y_2 = e^{\alpha_2 x}$, ..., $y_n = e^{\alpha_n x}$ е решение на ЛХДУ (14.2). Непосредствено се проверява, че тяхната детерминанта на Вронски има вида

$$W(x) = e^{(\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n)x} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_1^{n-1} & \alpha_2^{n-1} & \cdots & \alpha_n^{n-1} \end{vmatrix} = e^{(\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n)x} VDM[\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n],$$

където $VDM[\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n]$ е детерминантата на Вандермонд за числата α_1, α_2, ..., α_n. От курса по линейна алгебра знаем, че $VDM[\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n] \neq 0$, когато числата, които я пораждат са взаимно различни, което тук е налице по предположение. Сега от теорема 14.3 следва, че функциите $y_k = e^{\alpha_k x}$, $k = 1, 2, \ldots, n$, образуват една фундаментална система за ЛХДУ (14.29). По този начин доказахме

Твърдение 14.4. Нека характеристичният полином $\chi(z)$ има прости реални корени α_1, α_2, ..., α_n. Тогава общото решение на ЛХДУ (14.29) се дава по формулата

$$y = C_1 e^{\alpha_1 x} + C_2 e^{\alpha_2 x} + \cdots + C_n e^{\alpha_n x} . \blacksquare$$

Пример 14.10. Да разгледаме уравнението

(14.31) $y'' - y = 0$.

Тук $\chi(z) = z^2 - 1$ има два прости корена $z_{1,2} = \pm 1$, следователно функциите $y_1 = e^x$ и $y_2 = e^{-x}$ образуват фундаментална система и общото решение на (14.31) е

$$y = C_1e^x + C_2e^{-x}.$$

Ако въведем диференциалния оператор $p = \dfrac{d}{dx}$, то уравнението (14.29) може да се запише във вида

$$\chi(p)y = 0,$$

където

$$\chi(p) = a_n p^n + a_{n-1}p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0 = a_n \frac{d^n}{dx^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{d}{dx} + a_0.$$

Да разгледаме функцията $y = x^m e^{\alpha x}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $m = 1,2,\dots$, и да приложим върху нея диференциалния оператор $p - \alpha$. Имаме

(14.32) $(p-\alpha)\left[x^m e^{\alpha x}\right] = \dfrac{d}{dx}\left[x^m e^{\alpha x}\right] - \alpha x^m e^{\alpha x} = mx^{m-1}e^{\alpha x} + \alpha x^m e^{\alpha x} - \alpha x^m e^{\alpha x} = mx^{m-1}e^{\alpha x}$.

Ако $m = 1$, то като приложим още веднъж оператора $p - \alpha$ получаваме

$$(p-\alpha)^2\left[xe^{\alpha x}\right] = (p-\alpha)\left[(p-\alpha)\left[xe^{\alpha x}\right]\right] = (p-\alpha)e^{\alpha x} = \frac{d}{dx}e^{\alpha x} - \alpha e^{\alpha x} = 0.$$

Ако $m \geq 2$, то като приложим още веднъж оператора $p - \alpha$ получаваме

$$(p-\alpha)^2\left[x^m e^{\alpha x}\right] = (p-\alpha)\left[(p-\alpha)\left[x^m e^{\alpha x}\right]\right] = (p-\alpha)\left[me^{\alpha x}\right] = m(m-1)x^{m-2}e^{\alpha x}.$$

Разсъждавайки по същия начин получаваме формулата

$$(p-\alpha)^m\left[x^m e^{\alpha x}\right] = m!(p-\alpha)\left[e^{\alpha x}\right],$$

следователно

(14.33) $(p-\alpha)^{m+1}\left[x^m e^{\alpha x}\right] = 0$.

Нека α е реален корен от кратност $m \geq 1$ за характеристичния полином. Тогава $\chi(z) = \chi_1(z)(z-\alpha)^m$, за някой полином $\chi_1(z)$. Да разгледаме функцията $y = x^k e^{\alpha x}$, $0 \leq k < m$, и да приложим върху нея диференциалния оператор $\chi(p)$. Имаме

$$\chi(p)\left[x^k e^{\alpha x}\right] = \chi_1(p)\left[(p-\alpha)^m\left[x^k e^{\alpha x}\right]\right] = \chi_1(p)[0] = 0,$$

следователно всичките функции $e^{\alpha x}$, $xe^{\alpha x}$, ..., $x^{m-1}e^{\alpha x}$ са решения на хомогенното уравнение. Броят на тези функции е точно кратността на корена α.

За да изследваме случая на кратни реални корени се нуждаем от следното помощно

Твърдение 14.5. Нека α_1, α_2, ..., α_m са различни реални числа, а $P_1(x)$, $P_2(x)$, ..., $P_m(x)$ са полиноми. Тогава равенството

(14.34) $e^{\alpha_1 x}P_1(x) + e^{\alpha_2 x}P_2(x) + \dots + e^{\alpha_m x}P_m(x) = 0$,

за всяко x от някакъв отворен интервал Δ, е възможно, единствено когато всичките полиноми са тъждествено равни на нула.

Доказателство. Доказателството ще проведем чрез индукция по m. За $m = 1$ твърдението следва от основните свойства на полиномите. Нека твърдението е вярно за някое m и да разгледаме тъждеството

$$e^{\alpha_1 x}P_1(x) + e^{\alpha_2 x}P_2(x) + \dots + e^{\alpha_m x}P_m(x) + e^{\alpha_{m+1} x}P_{m+1}(x) = 0,$$

(14.35) $e^{(\alpha_1 - \alpha_{m+1})x}P_1(x) + e^{(\alpha_2 - \alpha_{m+1})x}P_2(x) + \dots + e^{(\alpha_m - \alpha_{m+1})x}P_m(x) + P_{m+1}(x) = 0$.

Нека d_j, $j = 1,2,\dots,m$, са старшите коефициенти на полиномите $P_j(x)$. Ще се убедим, че всяко $d_j = 0$, $j = 1,2,\dots,m$, което означава, че всичките полиноми $P_j(x)$, $j = 1,2,\dots,m$, са тъждествено равни на нула. Да диференцираме последното

$k = \deg P_{m+1}(x) + 1$ пъти, докато събираемото $P_{m+1}(x)$ се превърне в нула. Съгласно формулата на Лайбниц получаваме

$$\sum_{j=1}^{m} e^{(\alpha_j - \alpha_{m+1})x}\left[(\alpha_j - \alpha_{m+1})^k P_j(x) + k(\alpha_j - \alpha_{m+1})^{k-1} P_j'(x) + \cdots\right] = 0 .$$

От индукционното предположение следва, че

$$(\alpha_j - \alpha_{m+1})^k P_j(x) + k(\alpha_j - \alpha_{m+1})^{k-1} P_j'(x) + \cdots \equiv 0 ,\ j = 1,2,\ldots,m .$$

От друга страна старшите коефициенти на горните полиноми са $d_j(\alpha_j - \alpha_{m+1})^k$, следователно $d_j = 0$, $j = 1,2,\ldots,m$. Сега (14.35) приема вида $P_{m+1}(x) = 0$, за всяко $x \in \Delta$, следователно и за последният полином имаме $P_{m+1}(x) \equiv 0$. ■

Вече сме готови да докажем

Твърдение 14.6. Нека характеристичният полином $\chi(z)$ има само реални корени α_1, α_2, ..., α_m ($\alpha_i \neq \alpha_j$ за $i \neq j$) с кратности r_1, r_2, ..., r_m, $r_1 + r_2 + \cdots + r_m = n$. Тогава всеки корен α_j, $j = 1,2,\ldots,m$, поражда следната верига от решения на ЛХДУ (14.29)

$$\alpha_j \to e^{\alpha_j x}, xe^{\alpha_j x}, \ldots, x^{r_j - 1}e^{\alpha_j x},$$

които в своята съвкупност образуват една фундаментална система от решения.

Доказателство. От (14.33) знаем, че всяка от функциите $e^{\alpha_j x}$, $xe^{\alpha_j x}$, ..., $x^{r_j-1}e^{\alpha_j x}$ е решение на ЛХДУ (14.29). Техният общ брой е точно $r_1 + r_2 + \cdots + r_m = n$, следователно за да докажем, че те образуват фундаментална система е достатъчно да проверим, че са линейно независими във всеки отворен интервал Δ. Всяка тяхна линейна комбинация има вида на лявата страна в равенството (14.34). Сега тяхната линейна независимост следва от заключението на твърдение 14.2. ■

Пример 14.11. Да решим уравнението

(14.36) $y^{(5)} - 7y^{(4)} + 19y''' - 25y'' + 16y' - 4y = 0$.

Характеристичният полином има вида $\chi(z) = (z-1)^3(z-2)^2$ с два реални корена, $z_1 = 1$ с кратност $r_1 = 3$ и $z_2 = 2$ с кратност $r_2 = 2$. Според твърдение 14.1 тези корени пораждат следните решения

$$z_1 = 1 \to e^x, xe^x, x^2e^x \text{ и } z_2 = 2 \to e^{2x}, xe^{2x} .$$

Общото решение на (14.36) се дава по формулата

$$y = C_1e^x + C_2xe^x + C_3x^2e^x + C_4e^{2x} + C_5xe^{2x} .$$

В тривиалния случай на уравнение $y^{(n)} = 0$ имаме $\chi(z) = z^n$ с един корен $z_0 = 0$ с кратност $r_0 = n$, който поражда веригата $e^{0x} \equiv 1$, $xe^{0x} \equiv x$, ..., $x^{n-1}e^{0x} \equiv x^{n-1}$, следователно неговото общо решение се дава по формулата $y = C_0 + C_1x + C_2x^2 + \cdots + C_{n-1}x^{n-1}$, което е вида на произволен полином от степен по-малка от n.

Нека сега $\chi(z)$ има за корен комплексното число $\gamma = \alpha + i\beta$, $\beta \neq 0$. Тогава спрегнатото $\bar{\gamma} = \alpha - i\beta$ също е корен при това със същата кратност. Съгласно формулата на Ойлер имаме

$$e^{(\alpha + i\beta)x} = e^{\alpha x}e^{i\beta x} = e^{\alpha x}\cos\beta x + ie^{\alpha x}\sin\beta x .$$

Непосредствено се проверява, че тази формула се съгласува диференцирането,

(14.37) $\left[e^{(\alpha+i\beta)x}\right]^{(k)} = (\alpha + i\beta)^k e^{(\alpha+i\beta)x} = \left[e^{\alpha x}\cos\beta x\right]^{(k)} + i\left[e^{\alpha x}\sin\beta x\right]^{(k)}$, $k = 0,1,2,\ldots$.

Последното показва, че функцията $y = e^{(\alpha+i\beta)x}$ е комплексно решение на ЛХДУ (14.29), понеже

$$\chi(p)\left[e^{(\alpha+i\beta)x}\right]=e^{(\alpha+i\beta)x}\chi(\alpha+i\beta)=0\,.$$

Това комплексно решение можем да запишем във вида

$$y=y_{re}+iy_{im}\text{, където } y_{re}=e^{\alpha x}\cos\beta x \text{ и } y_{im}=e^{\alpha x}\sin\beta x\,.$$

Отново от формулата (5.37) следва, че всяка от реалните функции y_{re} и y_{im} е решение на ЛХДУ (14.29), понеже

$$\chi(p)y_{re}+i\chi(p)y_{im}=e^{(\alpha+i\beta)x}\chi(\alpha+i\beta)=0\,.$$

Сега вместо двойката комплексни решения

$$y=e^{(\alpha+i\beta)x}=y_{re}+y_{im} \text{ и } \bar{y}=e^{(\alpha-i\beta)x}=y_{re}-iy_{im}$$

можем да вземем двойката реални решения y_{re} и y_{im}.

Пример 14.12. Уравнението $y''+y=0$ има за корени двойката комплексно спрегнати числа $z_{1,2}=\pm i$ (тук $\alpha=0$ и $\beta=1$) и общото решение може да се запише във вида $Y=Ce^{ix}+\overline{C}e^{-ix}$, където C е произволна комплексна константа. Отнесено към горните разсъждения, за този пример имаме $y_{re}=\cos x$ и $y_{im}=\sin x$, където $y=e^{ix}$, и общото решение може да се запише във вида $Y=C_1\cos x+C_2\sin x$, където C_1 и C_2 са произволни реални константи.

Разсъждавайки аналогично се установява верността на следната теорема, която е непосредствено обобщение на твърдение 14.3.

Теорема 14.5. Една фундаментална система за ЛХДУ (14.28) може да се получи като вземем съвкупността на всичките частни решения, образувани по следната схема.
1) Всеки реален корен α на характеристичния полином $\chi(z)$, от кратност r, поражда следната верига от решения

$$\alpha\to e^{\alpha x},xe^{\alpha x},\ldots,x^{r-1}e^{\alpha x}\,.$$

Техният брой е равен на кратността r.
2) Всяка двойка комплексно спрегнати корени $\alpha\pm i\beta$, $\beta\neq 0$, на характеристичния полином $\chi(z)$, от кратност r, поражда следната верига от решения

$$\begin{Bmatrix}\alpha+i\beta\\ \alpha-i\beta\end{Bmatrix}\to\begin{Bmatrix}e^{\alpha x}\cos\beta x\\ e^{\alpha x}\sin\beta x\end{Bmatrix},\begin{Bmatrix}xe^{\alpha x}\cos\beta x\\ xe^{\alpha x}\sin\beta x\end{Bmatrix},\ldots,\begin{Bmatrix}x^{r-1}e^{\alpha x}\cos\beta x\\ x^{r-1}e^{\alpha x}\sin\beta x\end{Bmatrix}.$$

Техният брой е равен на $2r$, колкото е сумарната кратност на двата корена $\alpha+i\beta$ и $\alpha-i\beta$. ■

Пример 14.13. Да разгледаме уравнението
(14.38) $y'''-y=0$.
Тук $\chi(z)=z^3-1=(z-1)(z^2+z+1)$, който има един реален корен $z_1=1$ с кратност $r_1=1$ и двойка комплексно спрегнати корени $z_{2,3}=\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ с обща кратност $r_{2,3}=1$. Според теорема 14.1 имаме

$$z_1=1\to e^x,$$

$$\begin{Bmatrix}z_1\\ z_2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}-\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\\ -\dfrac{1}{2}-i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\end{Bmatrix}\to\begin{Bmatrix}e^{-\frac{1}{2}x}\cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}x\\ e^{-\frac{1}{2}x}\sin\dfrac{\sqrt{3}}{2}x\end{Bmatrix},$$

следователно общото решение на (14.38) има вида

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-\frac{x}{2}} \cos\frac{\sqrt{3}x}{2} + C_3 e^{-\frac{x}{2}} \sin\frac{\sqrt{3}x}{2}.$$

4. Метод на Лагранж за търсене на частни решения. Да разгледаме линейното диференциално уравнение (**ЛДУ**) от n-ти ред

(14.39) $a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x)$,

където коефициентите $a_n(x)$, $a_{n-1}(x)$, ..., $a_1(x)$, $a_0(x)$ и функцията $f(x)$ са непрекъснати в отворения интервал Δ и старшият коефициент $a_n(x) \neq 0$, $x \in \Delta$, както и съответното хомогенно уравнение

(14.40) $a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$.

От теорема 14.4 знаем, че общото решение на ЛДУ (14.39) се дава от формулата

$$y = y_0 + C_1 y_1 + C_2 y_2 + \cdots + C_n y_n,$$

където y_0 е някакво частно решение, а y_1, y_2, ..., y_n е някаква фундаментална система на хомогенното уравнение (14.40).

Решаването на дадено линейно диференциално уравнение изисква да разполагаме с някаква фундаментална система от решения за съответното хомогенно уравнение както и някакво частно решение. Тук ще приведем един общ метод за намиране на частни решения, който носи името метод на Лагранж или още ***метод на вариране на константите***, понеже отправната точка за неговото търсене е формулата за общото решение на хомогенното уравнение

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \cdots + C_n y_n,$$

в която обаче величините C_k, $k = 1,2,\ldots,n$, се предполагат функции на независимата променлива x.

Теорема 14.6 ***(Лагранж).*** При направените предположения, едно частно решение на ЛДУ (14.39) може да се намери във вида

(14.41) $y_0(x) = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x) + \cdots + C_n(x)y_n(x)$,

където C_1, C_2, ..., C_n са функции, чиито производни удовлетворяват системата

$$(14.42)\ \left|\begin{array}{l} C_1'y_1 + C_2'y_2 + \cdots + C_n'y_n = 0 \\ C_1'y_1' + C_2'y_2' + \cdots + C_n'y_n' = 0 \\ \ldots \\ C_1'y_1^{(n-2)} + C_2'y_2^{(n-2)} + \cdots + C_n'y_n^{(n-2)} = 0 \\ C_1'y_1^{(n-1)} + C_2'y_2^{(n-1)} + \cdots + C_n'y_n^{(n-1)} = \dfrac{f(x)}{a_n(x)} \end{array}\right.$$

Доказателство. Отначало да отбележим, че системата (14.42), която се нарича ***система на Лагранж***, винаги има решение, понеже нейната детерминанта е точно детерминантата на Вронски, която е различна от нула навсякъде в интервала Δ. Ще проверим чрез заместване, че функцията определена от (14.41) наистина е решение на уравнението (14.41), когато функциите $C_k(x)$, $k = 1,2,\ldots,n$, удовлетворяват системата на Лагранж (14.42). За тази цел да пресметнем последователно производните на $y_0(x)$.

По условие е изълнено

(14.43) $y_0(x) = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x) + \cdots + C_n(x)y_n(x)$,

което след диференциране дава

$$y_0'(x)=\left[C_1(x)y_1'(x)+C_2(x)y_2'(x)+\cdots+C_n(x)y_n'(x)\right]+$$
$$+\left[C_1'(x)y_1(x)+C_2'(x)y_2(x)+\cdots+C_n'(x)y_n(x)\right]$$
откъдето съгласно първия ред в системата на Лагранж получаваме
(14.44) $y_0'(x)=\left[C_1(x)y_1'(x)+C_2(x)y_2'(x)+\cdots+C_n(x)y_n'(x)\right]$.
След диференциране получаваме
$$y_0''(x)=\left[C_1(x)y_1''(x)+C_2(x)y_2''(x)+\cdots+C_n(x)y_n''(x)\right]+$$
$$+\left[C_1'(x)y_1'(x)+C_2'(x)y_2'(x)+\cdots+C_n'(x)y_n'(x)\right]$$
откъдето съгласно втория ред в системата на Лагранж намираме
(14.45) $y_0''(x)=\left[C_1(x)y_1''(x)+C_2(x)y_2''(x)+\cdots+C_n(x)y_n''(x)\right]$.
Продължавайки по същия начин получаваме
(14.46) $y_0^{(n-1)}(x)=\left[C_1(x)y_1^{(n-1)}(x)+C_2(x)y_2^{(n-1)}(x)+\cdots+C_n(x)y_n^{(n-1)}(x)\right]$,
което след диференциране дава
$$y_0^{(n)}(x)=\left[C_1(x)y_1^{(n)}(x)+C_2(x)y_2^{(n)}(x)+\cdots+C_n(x)y_n^{(n)}(x)\right]+$$
$$+\left[C_1'(x)y_1^{(n-1)}(x)+C_2'(x)y_2^{(n-1)}(x)+\cdots+C_n'(x)y_n^{(n-1)}(x)\right]$$
откъдето съгласно последния ред в системата на Лагранж намираме
(14.47) $y_0^{(n)}(x)=\left[C_1(x)y_1^{(n)}(x)+C_2(x)y_2^{(n)}(x)+\cdots+C_n(x)y_n^{(n)}(x)\right]+\dfrac{f(x)}{a_n(x)}$.

Умножаваме (14.43) с $a_0(x)$, (14.44) с $a_1(x)$, (14.45) с $a_2(x)$ и т.н. умножаваме (14.46) с $a_{n-1}(x)$ и накрая умножаваме (14.47) с $a_n(x)$, след което събираме почленно. Като прегрупираме събираемите в тази сума получаваме
$$\begin{aligned}
&a_0y_0+a_1y_0'+a_2y_0''+\cdots+a_{n-1}y_0^{(n-1)}+a_ny_0^{(n)}=\\
&\quad=C_1\left[a_0y_1+a_1y_1'+a_2y_1''+\cdots+a_{n-1}y_1^{(n-1)}+a_ny_1^{(n)}\right]+\\
&\quad+C_2\left[a_0y_2+a_1y_2'+a_2y_2''+\cdots+a_{n-1}y_2^{(n-1)}+a_ny_2^{(n)}\right]+\\
&\quad+\cdots+\\
&\quad+C_{n-1}\left[a_0y_{n-1}+a_1y_{n-1}'+a_2y_{n-1}''+\cdots+a_{n-1}y_{n-1}^{(n-1)}+a_ny_{n-1}^{(n)}\right]+\\
&\quad+C_n\left[a_0y_n+a_1y_n'+a_2y_n''+\cdots+a_{n-1}y_n^{(n-1)}+a_ny_n^{(n)}\right]+a_n\frac{f}{a_n}
\end{aligned}$$
откъдето отчитайки, че всичките y_1, y_2, ..., y_n са решения на хомогенното уравнение получаваме
$$a_0(x)y_0(x)+a_1(x)y_0'(x)+a_2(x)y_0''(x)+\cdots+a_{n-1}(x)y_0^{(n-1)}(x)+a_n(x)y_0^{(n)}(x)=f(x),$$
което трябваше да докажем. ■

Пример 14.14. Да намерим общото решение на уравнението
(14.48) $y''+y=\dfrac{1}{\cos x}$.

Решаването на такива задачи се оформя в последователни стъпки. Отначало търсим общото решение на съответното хомогенно уравнение $y''+y=0$. Тук имаме двойка комплексно спрегнати корени $z_{1,2}=\pm i$ и както вече знаем това общо решение има вида $Y_{\mathrm{hom}}=C_1\cos x+C_2\sin x$. При следващата стъпка търсим едно частно решение по метода на Лагранж във вида
$$y_0=C_1(x)\cos x+C_2(x)\sin x,$$
където функциите $C_1(x)$ и $C_2(x)$ удовлетворяват системата на Лагранж

$$\begin{cases} C_1' \cos x + C_2' \sin x = 0 \\ -C_1' \sin x + C_2' \cos x = \dfrac{1}{\cos x} \end{cases}$$

Като умножим първото уравнение със $\sin x$, второто с $\cos x$ и съберем получаваме $C_2' = 1$, откъдето намираме $C_2 = \int C_2' dx = \int dx = x$. Като умножим първото уравнение с $\cos x$, второто със $\sin x$ и от първото извадим второто получаваме $C_1' = -\dfrac{\sin x}{\cos x}$, откъдето намираме $C_1 = \int C_1' dx = -\int \dfrac{\sin x}{\cos x} dx = \ln|\cos x|$. По този начин едно частно решение се получава във вида

$$y_0 = \ln|\cos x| \cos x + x \sin x .$$

Сега като се позовем на формулата за общото решение на нехомогенно уравнение $Y = y_0 + Y_{\text{hom}}$, за общото решение на (14.48) получаваме

$$Y = \ln|\cos x| \cos x + x \sin x + C_1 \cos x + C_2 \sin x .$$