Лекция 2

§2. Матрична алгебра. Формули на Крамер

1. Матрична алгебра. Матриците могат да се събират и умножават по определение правила. Всяка матрица може да се ***умножава с число поелементно***, при което се получава матрица от същия тип. Ако

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \text{ то } \lambda A=\begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{21} & \cdots & \lambda a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Пример 2.1. Ако

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \text{ то } 2A=\begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ -2 & 6 & 2 \end{pmatrix}.$$

Еднотипните матрици могат да се ***събират поелементно***, при което отново се получава матрица от същия тип. Ако

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ и } B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{21} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix},$$

то

$$A\pm B=\begin{pmatrix} a_{11}\pm b_{11} & a_{12}\pm b_{12} & \cdots & a_{1n}\pm b_{1n} \\ a_{21}\pm b_{21} & a_{22}\pm b_{22} & \cdots & a_{2n}\pm b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}\pm b_{m1} & a_{m2}\pm b_{m2} & \cdots & a_{mn}\pm b_{mn} \end{pmatrix}.$$

Пример 2.2. Ако

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \text{ и } B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \text{ то } A+B=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}.$$

Матрицата, от даден тип $(m\times n)$, която се състои само от нули се нарича ***нулева матрица*** и има същото значение като числото нула при операцията събиране.

Въведените по-горе операции в пространството от еднотипните матрици $K_{m\times n}$ (над полето K) го превръщат в ***линейно пространство***, при наличието на следните елементарни свойства.

1) $(A+B)+C=A+(B+C)$ (асоциативност на събирането).

2) $A+B=B+A$ (комутативност на събирането).

3) $A+\mathbf{0}=\mathbf{0}+A=A$.

4) $A+(-A)=(-A)+A=\mathbf{0}$, където $-A=(-1)A$.

5) $(\lambda+\mu)A=\lambda A+\mu A$.

6) $\lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B$.

7) $\lambda(\mu A)=(\lambda\mu)A$.

Две матрици A от тип $(m\times s)$ и B от тип $(s\times n)$ могат да се умножават по правилото "***ред по стълб***", при което се получава матрица C от тип $(m\times n)$. Елементите на матрицата произведение $C=AB$ се дават по формулата

(2.1) $\quad c_{ij} = \sum_{k=1}^{s} a_{ik} b_{kj} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \cdots + a_{is} b_{sj}.$

За да получим елемента c_{ij} трябва да вземем елементите от i-тия ред на левия множител A, да ги умножим със съответните елементи от j-тия стълб на десния множител B и да съберем получените произведения, което оправдава и наименованието на тази операция като умножение "ред по стълб".

Пример 2.3. Ако

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \text{ то } AB = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -3 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

За да бъде възможно умножението трябва да бъде налице следното ***условие за съгласуваност***. Броят на стълбовете на левия множител трябва да бъде равен на броя на редовете на десния множител. В противен случай умножението не може да се извърши. В последния пример произведението BA не съществува понеже броят на стълбовете на B е различен от броя на редовете на A.

Пример 2.4. Нека A е матрица от тип (1×3), а B е матрица от тип (3×1), определени както следва

$$A = (1\ 3\ -1) \text{ и } B = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Тогава произведението AB е матрица от тип (1×1), т.е. число, $AB = -5$, докато произведението BA е матрица от тип (3×3),

$$BA = \begin{pmatrix} 2 & 6 & -2 \\ -2 & -6 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Последният пример показва, че в общия случай двете произведения AB и BA (ако съществуват) са различни. Ако и двата множителя A и B са квадратни матрици от ред n, то можем да образуваме и двете произведения AB и BA, понеже в този случай не възниква проблем със съгласуваността на множителите. И тук в общия случай $AB \neq BA$, т.е. умножението на матрици не е комутативно, което обаче не изключва възможността в отделни случаи да има равенство.

Ако A и B са квадратни матрици от ред n и $AB = BA$, то се казва, че A и B са комутативни.

Непосредствено се проверява, че ако A е матрица от тип $(m \times n)$, то е изпълнено

$$E_m A = A E_n = A,$$

където E_n е единичната матрица от ред n, а E_m е единичната матрица от ред m. В частност, ако A е квадратна матрица от ред n, то $E_n A = A E_n = A$. По този начин в пространството на квадратните матрици $M_n(K)$, единичната матрица има същата роля както числото 1 при умножението на числа.

Твърдение 2.1. ***Умножението на матрици е асоциативно***. Ако A е $(m \times p)$ матрица, B е $(p \times q)$ матрица, а C е $(q \times n)$ матрица, то

$$(AB)C = A(BC).$$

Доказателство. Да положим $D' = (AB)C$ и $D'' = A(BC)$. Тогава прилагайки последователно формулата (2.1), за елементите на D' и D'' получаваме

$$d'_{ij} = \sum_{\alpha=1}^{p}\sum_{\beta=1}^{q} a_{i\alpha} b_{\alpha\beta} c_{\beta j} = d''_{ij}.$$

Елементите на тройното произведение се получават чрез пълно сумиране по вътрешните индекси, независимо последователността на умножение. ■

Асоциативното свойство на умножението се запазва и при повече множители. Ако A, B, C и D са съгласувани за умножение матрици, то произведението $ABCD$ е едно и също независимо от реда на последователните умножения, например

$(AB)(CD) = (A(BC))D = A(B(CD))$ и т.н.

Тук е важно само да не се сменят местата на множителите, даже когато са изпълнени условия за съгласуваност, например ако всичките матрици са квадратни от един и същ ред.

Следните свойства на умножението са практически очевидни, когато алгебричните операции могат да бъдат извършени.

1) $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$.

2) $(A+B)C = AC + BC$.

3) $C(A+B) = CA + CB$.

4) $(AB)^T = B^T A^T$.

Последното свойство се обобщава за повече множители. Например ако A, B и C са съгласувани за умножение матрици, то $(ABC)^T = C^T B^T A^T$, т.е. транспонирането на произведение е еквивалентно на произведението от транспонираните матрици но взети в обратен ред.

Едно от най-важните свойства на матричното произведение се съдържа в

Теорема 2.1. Нека A и B са квадратни матрици от ред n. Тогава

(2.2) $\det(AB) = (\det A)(\det B)$.

Доказателство. Да положим $C = AB$ и да разгледаме следните преобразувания, които са обратими и не променят верността на формулата (2.2), която трябва да докажем.

П1) Смяна местата на два реда в матрицата A, което съответства на смяна местата на същите два реда при C.

П2) Умножаване един ред на матрицата A с число и прибавянето му към друг ред на A, което съответства на същото преобразуваните по редове при матрицата C.

П3) Пренареждане стълбовете на матрицата A и пренареждане по същия начин редовете на B, което не променя матрицата C.

За да докажем теоремата ще прилагаме последователно **П1, П2** и **П3** докато формулата (2.2) стане лесна за непосредствено доказване.

Според твърдение 2.6, прилагайки по подходящ начин **П1, П2** и **П3** върху A (което води до съответните промени в B и C) ще стигнем до един от двата случая.

1) Преобразуваната матрица A съдържа нулев ред, следователно $\det A$=0. Тогава редът със същия номер в матрицата C също ще бъде нулев и $\det C = 0$, което доказва формулата (2.2).

2) Преобразуваната матрица A е диагонална (с различни от нула елементи по главния диагонал)

$$A=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n\end{pmatrix} \text{ и } \det A=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n .$$

В този случай редовете на матрицата произведение $C=AB$ се получават от редовете на матрицата B след умножение със съответните по номера диагонални елементи на A. Сега от основните свойства на детерминантите получаваме

$$\det C=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n \det B=(\det A)(\det B),$$

което доказва теоремата и в този случай. ■

2. Обратна матрица. Квадратната матрица A от ред n се нарича ***обратима***, когато съществува квадратна матрица B от ред n, за която

$$AB=BA=E_n ,$$

където E_n е единичната матрица от ред n. В този случай матрицата B се нарича ***обратна*** на A и се бележи с A^{-1}.

Обратната матрица, когато съществува, е ***единствена***. Ако B_1 и B_2 са две матрици, за които $AB_1=B_1A=AB_2=B_2A=E_n$, то след умножение на равенството $AB_1=E_n$ отляво с B_2 получаваме $B_2AB_1=B_2E_n=B_2$, откъдето отчитайки, че $B_2A=E_n$, намираме $E_nB_1=B_2$, следователно $B_1=B_2$.

Ако матрицата A е обратима, то $AA^{-1}=E_n$ и съгласно теорема 2.1

$$(\det A)(\det A^{-1})=\det(AA^{-1})=\det E_n=1,$$

следователно по необходимост $\det A\neq 0$. По нататък ще се убедим, че това условие е същевременно и достатъчно.

Да разгледаме ***присъединената матрица*** A^*, която се образува от адюнгираните количества на матрицата A по следния начин

$$A^*=\begin{pmatrix}A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1}\\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn}\end{pmatrix}.$$

Адюнгираните количества на елементите на първия ред на A образуват първия стълб на A^*, адюнгираните количества на елементите на втория ред на A образуват втория стълб на A^* и т.н.

Според теорема 2.1, ако елементите на един ред умножим по техните адюнгирани количества и съберем получените произведения, ще получим стойността на детерминантата, а съгласно свойство 7, ако елементите на един ред умножим по адюнгираните количества на елементите на друг ред и съберем получените произведения, ще получим нула. Сега непосредствено се проверява, че за всяка квадратна матрица е изпълнено

$$AA^*=\begin{pmatrix}\det A & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \det A & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \det A\end{pmatrix}=A^*A. \tag{2.3}$$

Нека $\det A\neq 0$ и да положим

$$B = \frac{1}{\det A} A^*.$$

Тогава отчитайки (2.3) получаваме

$$AB = BA = \frac{1}{\det A} AA^* = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} \det A & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \det A & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \det A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = E_n,$$

което показва, че в този случай матрицата A е обратима с обратна B. По този начин доказахме

Теорема 2.2. Квадратната матрица A от ред n е обратима тогава и само тогава, когато $\det A \neq 0$. В този случай

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^* = \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{\det A} & \frac{A_{21}}{\det A} & \cdots & \frac{A_{n1}}{\det A} \\ \frac{A_{12}}{\det A} & \frac{A_{22}}{\det A} & \cdots & \frac{A_{n2}}{\det A} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{A_{1n}}{\det A} & \frac{A_{2n}}{\det A} & \cdots & \frac{A_{nn}}{\det A} \end{pmatrix}. \blacksquare$$

Пример 2.5. Да намерим обратната на матрицата

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тук $\det A = -4 \neq 0$, следователно матрицата е обратима. За да намерим нейната обратна първо пресмятаме адюнгираните количества. Имаме

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3, \ A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -1, \ A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -1,$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -4, \ A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 0, \ A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -4,$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1, \ A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1, \ A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1.$$

Сега по теорема 2.2 получаваме

$$A^{-1} = \frac{1}{-4} \begin{pmatrix} -3 & -4 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & 1 & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & 1 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

Обратимостта на една матрица изцяло зависи от стойността на нейната детерминанта. По тази причина, ако детерминантата на една квадратна матрица е равна на нула, то матрицата се нарича ***особена***.

Твърдение 2.2. Нека A и B са обратими квадратни матрици. Тогава тяхното произведение AB също е обратима матрица, при което $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Доказателство. Матриците A и B са обратими, което означава, че $\det A \neq 0$ и $\det B \neq 0$. Съгласно теорема 2.1, $\det(AB) = (\det A)(\det B) \neq 0$, следователно матрицата AB също е обратима. Да положим $C = B^{-1}A^{-1}$. Тогава

$$(AB)C = (AB)(B^{-1}A^{-1}) = ABB^{-1}A^{-1} = A(BB^{-1})A^{-1} = AEA^{-1} = AA^{-1} = E,$$

следователно $(AB)^{-1} = C = B^{-1}A^{-1}$. ■

Горното твърдение се обобщава и за повече множители. Например, ако A, B и C са обратими матрици, то произведението ABC също е обратима матрица, при което $(ABC)^{-1} = C^{-1}B^{-1}A^{-1}$ и т.н.

Следващото твърдение дава връзка между операциите транспониране и обръщане на матрица.

Твърдение 2.2. Нека A е обратима квадратна матрица. Тогава нейната транспонирана A^T също е обратима матрица, при което $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

Доказателство. Матрицата A е обратима, което означава, че $\det A \neq 0$. Съгласно твърдение 2.3, $\det A^T = \det A \neq 0$, следователно матрицата A^T също е обратима. Да положим $C = (A^{-1})^T$. Тогава

$$A^T C = A^T (A^{-1})^T = (A^{-1}A)^T = E^T = E,$$

следователно $(A^T)^{-1} = C = (A^{-1})^T$. ■

2. Формули на Крамер. Да разгледаме ***линейната система*** от n уравнения със също толкова на брой неизвестни x_1, x_2, ..., x_n

$$\begin{aligned} &a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ &a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ &\text{...} \\ &a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{aligned} \tag{2.4}$$

Под решене на тази система се разбира всяка наредена съвкупност от n на брой числа, които след заместване в неизвестните удовлетворяват всичките уравнения на системата. Константите a_{ij}, $1 \leq i, j \leq n$, се наричат ***коефициенти*** на системата, а b_i, $1 \leq i \leq n$, се наричат ***свободни коефициенти***. Коефициентите на системата (2.4), нейните свободни коефициенти и съвкупността на неизвестните величини могат да се представят съответно като квадратна матрица A от ред n и два вектор-стълба с n елемента по следния начин

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

с помощта на които системата линейни уравнения (2.4) може да се запише в матрично-векторен вид

$$Ax = b. \tag{2.5}$$

Ако $n = 1$, то равенството (2.5) се превръща в просто линейно уравнение $ax = b$, където a и b са някакви числа, а x е търсеното неизвестно, което уравнение има решение когато коефициентът a е различен от нула. В този случай решението се записва във вида $x = a^{-1}b$. В общия случай системата (2.5) също се решава лесно, ако $\det A \neq 0$. Тогава матрицата A е обратима и като умножим (2.5) отляво с обратната A^{-1}, получаваме $A^{-1}Ax = A^{-1}b$, откъдето отчитайки равенството $A^{-1}A = E_n$, за решението на системата (2.5) по необходимост намираме формулата

(2.6) $\quad x = A^{-1}b$,

за която веднага се проверява, че наистина определя решение на системата (2.4), понеже $A\left(A^{-1}b\right) = \left(AA^{-1}\right)b = E_n b = b$. Съгласно теорема 2.2, в разгърнат вид, това матрично равенство има следната форма

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix},$$

следователно

$$x_1 = \frac{b_1A_{11} + b_2A_{21} + \cdots + b_nA_{n1}}{\det A} = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\det A} = \frac{\Delta_1}{\Delta},$$

$$x_2 = \frac{b_1A_{12} + b_2A_{22} + \cdots + b_nA_{n2}}{\det A} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & b_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\det A} = \frac{\Delta_2}{\Delta},$$

...

$$x_n = \frac{b_1A_{1n} + b_2A_{2n} + \cdots + b_nA_{nn}}{\det A} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b_n \end{vmatrix}}{\det A} = \frac{\Delta_n}{\Delta}.$$

По този начин доказахме следната

Теорема 2.2. Нека матрицата на коефициентите на линейната система (2.4) е обратима, $\det A \neq 0$. Тогава тази система има (при това единствено) решение, което се задава по формулите ***(формули на Крамер)***

$$x_k = \frac{\Delta_k}{\Delta},\ k = 1,2,\ldots,n,$$

където $\Delta = \det A$, а детерминантата Δ_k се получава като k-тия стълб на Δ заменим със стълба на свободните коефициенти. ■

Пример 2.6. Да решим следната система

$$\begin{aligned} x + y + z &= 6 \\ 2x - y + z &= 3 \\ x - y + 2z &= 5 \end{aligned}$$

Поради малкия брой на неизвестните, те са означени с x, y и z, вместо x_1, x_2 и x_3. Изобщо индексирането е целесъобразно означение само при голям брой употребени еднотипни величини в съответния запис. За детерминантата на системата пресмятаме

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -5 \neq 0,$$

следователно решението, което е единствено, може да се намери по формулите на Крамер, съгласно които

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 5 & -1 & 2 \end{vmatrix}}{-5} = \frac{-5}{-5} = 1, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & 2 \end{vmatrix}}{-5} = \frac{-10}{-5} = 2, \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 5 \end{vmatrix}}{-5} = \frac{-15}{-5} = 3.$$

Ако всичките свободни коефициенти са нули, то системата се нарича ***хомогенна***. Очевидно, една хомогенна система винаги има решение, което се състои само от нули. Ако обаче детерминантата на една хомогенна система е различна от нула, то тази система няма друго решение.

Твърдение 2.4. Нека матрицата на коефициентите на хомогенната система линейни уравнения

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= 0 \\ &\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= 0 \end{aligned} \tag{2.7}$$

е обратима, т.е. $\det A \neq 0$. Тогава тази система има само нулевото решение.

Доказателство. Понеже $\det A \neq 0$, за решенията на (2.7) можем да приложим формулите на Крамер. В този случай обаче всяка от детерминантите Δ_k има нулев стълб, следователно $\Delta_k = 0$, $k = 1,2,\ldots,n$, и съответно $x_k = 0$, $k = 1,2,\ldots,n$. ■

От основната теорема на алгебрата следва, че един полином от степен n не може да има повече от n на брой различни корени. Сега ще докажем този факт като следствие от твърдение 2.4.

Твърдение 2.5. Нека

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

е полином, за който съществуват $n+1$ на брой числа x_0, x_1, ..., x_n такива, че $f(x_k) = 0$, за всяко $k = 0,1,\ldots,n$. Тогава $f(x)$ е тъждествено равен на нула.

Доказателство. По условие имаме

$$\begin{aligned} a_0 + a_1x_0 + \cdots + a_{n-1}x_0^{n-1} + a_n x_0^n &= 0 \\ a_0 + a_1x_1 + \cdots + a_{n-1}x_1^{n-1} + a_n x_1^n &= 0 \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots& \\ a_0 + a_1x_n + \cdots + a_{n-1}x_n^{n-1} + a_n x_n^n &= 0 \end{aligned}$$

което можем да разглеждаме като хомогенна система от $n+1$ на брой линейни уравнения относно неизвестните a_0, a_1, ..., a_{n-1}, a_n с детерминанта, чиято транспонирана представлява детерминанта на Вандермонд $VDM(x_0, x_1, \ldots, x_n)$. Тази детерминанта е различна от нула, понеже числата x_0, x_1, ..., x_n се предполагат различни по между си. Сега от твърдение 2.4 следва, че въпросната система има само нулевото решение, $a_0 = a_1 = \cdots = a_{n-1} = a_n = 0$, т.е. всичките коефициенти на дадения полином $f(x)$ са равни на нула. ■

3. Собствени значения и собствени вектори. Нека A е квадратна матрица от ред n (с реални или комплексни елементи). Ако λ е някакво число (реални или комплексно), а $\vec{\mathbf{v}} \neq \vec{\mathbf{0}}$ е някакъв вектор (с реални или комплексни координати), при което е налице равенството $A\vec{\mathbf{v}} = \lambda\vec{\mathbf{v}}$,

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}, \tag{2.8}$$

то се казва, че λ е ***собствено значение*** за матрицата A със ***собствен вектор*** $\vec{\mathbf{v}}$.

Равенството (2.8) може да се схваща като хомогенна система линейни уравнения

$$\begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (A - \lambda E_n)\vec{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{0}}, \tag{2.9}$$

която по определение има ненулево решение. Сега от общите свойства на такива системи се вижда, че ако λ е собствено число, то $\det(A - \lambda E_n) = 0$, т.е. λ е корен на ***характеристичния полином*** $\chi(z) = \det(A - zE_n)$ на матрицата A, което означава, че λ удовлетворява ***характеристичното уравнение*** $\chi(z) = 0$. Обратното също е вярно и също следва от основните свойства на хомогенните системи. Ако λ е корен на характеристичното уравнение, то $\det(A - \lambda E_n) = 0$ и следователно хомогенната система (2.9) има ненулево решение, което се явява собствен вектор за матрицата A, отговарящ на собственото значение λ.

Характеристичният полином има степен точно n, следователно има n на брой корена, отчитайки тяхната кратност. Според основаната теорема на алгебрата можем да запишем

$$\chi(z) = (-1)^n (z - \lambda_1)(z - \lambda_2)\cdots(z - \lambda_n),$$

където λ_1, λ_2, ..., λ_n са корените на полинома, които както вече установихме се явяват собствените числа на матрицата A. В това представяне е отчетен фактът, че старшият коефициент на характеристичния полином е равен на $(-1)^n$. Полагайки $z = 0$, намираме

$$\chi(0) = (-1)^n (-\lambda_1)(-\lambda_2)\cdots(-\lambda_n) = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n .$$

От друга страна $\chi(0) = \det(A - 0E_n) = \det A$. По този начин доказахме

Твърдение 2.6. Произведението на всичките собствени значения на дадена матрица е равно на стойността на нейната детерминанта. ■

Нека U е $(n \times n)$ матрица с реални елементи, за която

$$UU^T = E_n,$$

т.е. $U^{-1} = U^T$. Такива матрици се наричат ***ортогонални***. В частност, ако U е ортогонална, то $\det U = \pm 1$, понеже

$$1 = \det E_n = \det(UU^T) = (\det U)(\det U^T) = (\det U)^2 .$$

Пример 2.7. Матрицата

$$U = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

е ортогонална.