Лекция 4

§4. Линейни и векторни пространства

1. Линейни пространства. Едно множество V се нарича ***линейно пространство*** над числовото поле F, когато в него са определение двете линейни операции ***събиране*** и ***умножение с число***. По аналогия с геометричните вектори, е удобно елементите на линейното пространство да наричаме ***вектори***, а числата от полето – ***скалари***. Събирането означава, че за всеки два вектора $\mathbf{a},\mathbf{b}\in V$ е определена тяхната сума $\mathbf{a}+\mathbf{b}\in V$. Умножението със скалар означава, че са всеки вектор $\mathbf{a}\in V$ и всяко число $\lambda\in F$ е определено произведението $\lambda\mathbf{a}\in V$, при което по определение са налице следните естествени и очаквани свойства.

1) За всеки два вектора $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ е изпълнено $\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{b}+\mathbf{a}$ – комутативност на събирането.

2) За всеки три вектора $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ е изпълнено $(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c}=\mathbf{b}+(\mathbf{a}+\mathbf{c})$ – асоциативност на събирането.

3) Съществува нулев вектор $\mathbf{0}\in V$ такъв, че за всеки вектор $\mathbf{a}$ е изпълнено $\mathbf{a}+\mathbf{0}=\mathbf{a}$.

4) За всеки вектор $\mathbf{a}$ съществува противоположен вектор $-\mathbf{a}$, за който $\mathbf{a}+(-\mathbf{a})=\mathbf{0}$.

5) За всеки вектор $\mathbf{a}$ е изпълнено $1.\mathbf{a}=\mathbf{a}$.

6) За всеки две числа λ и μ и всеки вектор $\mathbf{a}$ е изпълнено $(\lambda+\mu)\mathbf{a}=\lambda\mathbf{a}+\mu\mathbf{a}$.

7) За всяко число λ и всеки два вектора $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ е изпълнено $\lambda(\mathbf{a}+\mathbf{b})=\lambda\mathbf{a}+\lambda\mathbf{b}$.

8) За всеки две числа λ и μ и всеки вектор $\mathbf{a}$ е изпълнено $\lambda(\mu\mathbf{a})=(\lambda\mu)\mathbf{a}$.

Пример 4.1. Линейно пространство е множеството на всичките еднотипни $(m\times n)$ матрици $F_{m\times n}$. Тук нулевият елемент е нулевата матрица.

Пример 4.2. Специфичен пример за линейно пространство получаваме ако разгледаме полиномите $\pi_n[x]$ от ред не по-висок от n с коефициенти от полето F.

Пример 4.3. От особена важност е линейното пространство на ***геометричните вектори***, за което ще стане дума по нататък.

Наличието на асоциативност и комутативност при събирането дава основание да разглеждаме следния сбор на повече от две събираеми $\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2+\cdots+\mathbf{a}_n$, при който е без значение редът на извършване на отделните събирания, както и самият ред на събираемите.

Векторът $\lambda_1\mathbf{a}_1+\lambda_2\mathbf{a}_2+\cdots+\lambda_n\mathbf{a}_n$, където λ_1, λ_2, ..., λ_n са числа, се нарича ***линейна комбинация*** на векторите $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, ..., $\mathbf{a}_n$. Едно линейно пространство съдържа всевъзможните линейни комбинации на своите вектори.

Нека V е линейно пространство, а W е някакво линейно пространство, което е подмножество на V. Тогава се казва, че W е ***линейно подпространство*** на V. Например ***линейната обвивка*** $l(\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\ldots,\mathbf{a}_n)$ на векторите $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, ..., $\mathbf{a}_n$, която се състои от всичките техни линейни комбинации е едно линейно подпространство на V,

$$l(\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\ldots,\mathbf{a}_n)=\{\mathbf{a}\in V\mid \mathbf{a}=\lambda_1\mathbf{a}_1+\lambda_2\mathbf{a}_2+\cdots+\lambda_n\mathbf{a}_n\}\subseteq V.$$

Определение 4.1. Казва се, че векторите $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, ..., $\mathbf{a}_n$ са ***линейно независими*** (образуват линейно независима система), ако равенството $\lambda_1\mathbf{a}_1+\lambda_2\mathbf{a}_2+\cdots+\lambda_n\mathbf{a}_n=\mathbf{0}$ е възможно, единствено когато всичките коефициенти на тази линейна комбинация са нули, $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_n$. Казва се, че векторите $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, ..., $\mathbf{a}_n$ са ***линейно зависими***, когато не са линейно независими.

От горното определение следва, че векторите $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, ..., $\mathbf{a}_n$ са линейно зависими тогава и само тогава, когато може да се намерят числа λ_1, λ_2, ..., λ_n, поне едно от които различно от нула, за които съответната линейна комбинация дава нулевия вектор,

$\lambda_1\mathbf{a}_1+\lambda_2\mathbf{a}_2+\cdots+\lambda_n\mathbf{a}_n=\mathbf{0}$. Един вектор $\mathbf{a}$ е линейно независими (зависим) тогава и само тогава, когато е различен (равен) на нулевия вектор.

Твърдение 4.1. Нека системата вектори $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, ..., $\mathbf{a}_n$ е линейно независима. Тогава всяка нейна подсистема $\mathbf{a}_{i_1}$, $\mathbf{a}_{i_2}$, ..., $\mathbf{a}_{i_k}$ също е линейно независима. Следователно, ако една система от вектори притежава линейно зависима подсистема, то тя също е линейно зависима.

Доказателство. Без ограничение на общността можем да предположим, че подсистемата се състои от първите k вектора $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, ..., $\mathbf{a}_k$ $(k<n)$ и да разгледаме една тяхна линейна комбинация, която дава нулевия вектор, $\lambda_1\mathbf{a}_1+\lambda_2\mathbf{a}_2+\cdots+\lambda_k\mathbf{a}_k=\mathbf{0}$. Тогава, ако добавим и останалите вектори с множители нула, получаваме линейната комбинация

$$\lambda_1\mathbf{a}_1+\lambda_2\mathbf{a}_2+\cdots+\lambda_k\mathbf{a}_k+0.\mathbf{a}_{k+1}+\cdots+0.\mathbf{a}_n=\mathbf{0}.$$

Системата $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, ..., $\mathbf{a}_n$ е линейно независима и следователно последното равенство е възможно, единствено когато $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_k=0$. Направеното разсъждение показва, че подсистемата също е линейно независима. ■

От твърдение 4.1 следва, че една линейно независима система не може да съдържа нулевия вектор и обратно, ако един от векторите на системата е нулевият, то системата е линейно зависима.

Твърдение 4.2. Системата вектори $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, ..., $\mathbf{a}_n$ е линейно зависима тогава и само тогава, когато някой от векторите може да се изрази като линейна комбинация на останалите.

Доказателство. **1**) Нека системата е линейно зависима. Тогава съществува линейна комбинация $\lambda_1\mathbf{a}_1+\lambda_2\mathbf{a}_2+\cdots+\lambda_n\mathbf{a}_n=\mathbf{0}$, при което поне един от коефициентите е различен от нула. Без ограничение на общността да предположим, че $\lambda_1\neq 0$. Сега непосредствено се получава, че векторът $\mathbf{a}_1$ е следната линейна комбинация на останалите вектори

$$\mathbf{a}_1=\left(-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)\mathbf{a}_2+\cdots+\left(-\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)\mathbf{a}_n.$$

2) Сега да предположим, че някой от векторите, например $\mathbf{a}_1$, може да се запише като линейна комбинация $\mathbf{a}_1=\mu_2\mathbf{a}_2+\mu_3\mathbf{a}_3+\cdots+\mu_n\mathbf{a}_n$. Тогава линейната комбинация

$$1.\mathbf{a}_1-\mu_2\mathbf{a}_2-\mu_3\mathbf{a}_3-\cdots-\mu_n\mathbf{a}_n=\mathbf{0}$$

има поне един ненулев коефициент, например коефициентът пред $\mathbf{a}_1$ е равен на $-1\neq 0$, което по определение означава, че системата е линейно зависима. ■

Най простият случай на линейно пространство V е когато то съдържа само нулевия вектор, $V=\{\mathbf{0}\}$. Ако $V\neq\{\mathbf{0}\}$, то V съдържа линейно независими системи с някакъв брой вектори. Например всеки ненулев вектор $\mathbf{a}\neq\mathbf{0}$ сам образува линейно независима система.

Определение 4.2. Казва се, че линейното пространство $V\neq\{\mathbf{0}\}$ е ***крайномерно*** и има ***размерност*** $\dim V=n$, когато могат да се намерят някакви n на брой линейно независими вектори и всяка система от $n+1$ на брой вектори е линейно зависима. Ако за всяко n може да се намери линейно независима система от n на брой вектори, то пространството се нарича ***безкрайномерно***, $\dim V=\infty$.

Ако $V=\{\mathbf{0}\}$, то полагаме по целесъобразност $\dim V=0$. Съгласно твърдение 4.1, ако V е крайномерно и $\dim V=n$, то не само всяка система от $n+1$ на брой вектори е линейно зависима, но всяка система от $n+2$ и повече на брой вектори е линейно зависима. От определението непосредствено следва верността на

Твърдение 4.3. Нека в линейното пространство V могат да се намерят n на брой вектори $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, ..., $\mathbf{e}_n$ такива, че всеки вектор $\mathbf{a} \in V$ може да се представи като тяхна линейна комбинация. Тогава $\dim V \le n$. Ако освен това $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, ..., $\mathbf{e}_n$ са линейно независими, то $\dim V = n$. ■

Пример 4.4. Линейното пространство $K_{m\times n}$ на еднотипните $(m \times n)$ матрици е крайномерно и има размерност $\dim K_{m\times n} = m.n$, понеже всяка такава матрица $A = (a_{ij})$ може да се запише като линейна комбинация

$$A = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}E_{ij} ,$$

където E_{ij} е матрица, чийто елемент в ред i и стълб j е равен на 1, а всички останали елементи са нули и освен това тези матрици са линейно независими.

Пример 4.5. Линейното пространство на полиномите $\pi_n[x]$ от ред не по-висок от n с реални или комплексни коефициенти също е крайномерно и има размерност $\dim \pi_n[x] = n+1$, понеже всеки такъв полином

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

може да се схваща като линейна комбинация на елементарните полиноми $p_k(x) = x^k$, $k = 0,1,\ldots,n$, които са $n+1$ на брой и освен това са линейно независими.

Нека $V \ne \{\mathbf{0}\}$ е крайномерно и има размерност $\dim V = n$. Тогава по определение във V може да се намери поне една система от n на брой линейно независими вектори.

Определение 4.3. Всяка система от n на брой линейно независими вектори във крайномерното линейно пространство $V \ne \{\mathbf{0}\}$ с размерност $\dim V = n$ се нарича ***базис*** във V.

Ползата от понятието базис се показва добре от следната

Теорема 4.1. Нека векторите $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, ..., $\mathbf{e}_n$ образуват базис в крайномерното линейно пространство V, $\dim V = n$. Тогава всеки вектор $\mathbf{a} \in V$ може да се представи при това по единствен начин като линейна комбинация на базисните вектори,

(4.1) $\quad \mathbf{a} = \lambda_1\mathbf{e}_1 + \lambda_2\mathbf{e}_2 + \cdots + \lambda_n\mathbf{e}_n .$

Доказателство. Векторите $\mathbf{a}$, $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, ..., $\mathbf{e}_n$ са $n+1$ на брой, следователно са линейно зависими и съществува тяхна линейна комбинация

$$\mu\mathbf{a} + \mu_1\mathbf{e}_1 + \mu_2\mathbf{e}_2 + \cdots + \mu_n\mathbf{e}_n = \mathbf{0} ,$$

където поне един от коефициентите μ, μ_1, μ_2, ..., μ_n е различен от нула. Ако допуснем, че $\mu = 0$, то получим противоречие с линейната независимост на базисните вектори, следователно $\mu \ne 0$, откъдето намираме

$$\mathbf{a} = \left(-\frac{\mu_1}{\mu}\right)\mathbf{e}_1 + \left(-\frac{\mu_2}{\mu}\right)\mathbf{e}_2 + \cdots + \left(-\frac{\mu_n}{\mu}\right)\mathbf{e}_n = \mathbf{0} .$$

Да предположим сега, че имаме две представяния

$$\mathbf{a} = \lambda_1'\mathbf{e}_1 + \lambda_2''\mathbf{e}_2 + \cdots + \lambda_n'\mathbf{e}_n \text{ и } \mathbf{a} = \lambda_1''\mathbf{e}_1 + \lambda_2''\mathbf{e}_2 + \cdots + \lambda_n''\mathbf{e}_n .$$

Тогава след почленно изваждане на двете равенства намираме

$$\mathbf{0} = (\lambda_1' - \lambda_1'')\mathbf{e}_1 + (\lambda_2' - \lambda_2'')\mathbf{e}_2 + \cdots + (\lambda_n' - \lambda_n'')\mathbf{e}_n ,$$

което отново поради линейната независимост ма базисните вектори е възможно, единствено когато

$$\left(\lambda_1' - \lambda_1''\right) = \left(\lambda_2' - \lambda_2''\right) = \cdots = \left(\lambda_n' - \lambda_n''\right) = 0\,,$$
което означава, че представянето е единствено. ■

Нека векторите $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, ..., $\mathbf{e}_n$ образуват базис. Съгласно теорема 4.1 всеки вектор се идентифицира еднозначно чрез своите коефициенти λ_1 , λ_2, ..., λ_n в линейната комбинация (4.1), които се наричат още координати на вектора $\mathbf{a}$ в дадения базис. Пишем $\mathbf{a}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ или $\mathbf{a} = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$.

Непосредствено се проверява, че линейните операции събиране и умножение със скалар могат да бъдат извършени върху координатите на участващите вектори. Ако

$$\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n), \text{ т.е. } \mathbf{a} = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + \cdots + a_n\mathbf{e}_n$$

и

$$\mathbf{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n), \text{ т.е. } \mathbf{b} = b_1\mathbf{e}_1 + b_2\mathbf{e}_2 + \cdots + b_n\mathbf{e}_n\,,$$

то

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_1 + b_1)\mathbf{e}_1 + (a_2 + b_2)\mathbf{e}_2 + \cdots + (a_n + b_n)\mathbf{e}_n\,,$$

следователно $\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n)$ и

$$\lambda\mathbf{a} = (\lambda a_1)\mathbf{e}_1 + (\lambda a_2)\mathbf{e}_2 + \cdots + (\lambda a_n)\mathbf{e}_n\,,$$

следователно $\lambda\mathbf{a} = (\lambda a_1, \lambda a_2, \ldots, \lambda a_n)$.

Твърдение 4.4. Нека векторите $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, ..., $\mathbf{e}_n$ образуват базис във V и $\mathbf{a}_k(a_{k1}, a_{k2}, \ldots, a_{kn})$, $k = 1,2,\ldots,m$, $(m \le n)$, са някакви вектори, зададени чрез техните координати в този базис и да разгледаме матрицата от техните координати

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Тогава векторите $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, ..., $\mathbf{a}_m$ са линейно независими тогава и само тогава, когато $r(A) = m$, т.е. когато рангът на матрицата A е максимален. Следователно, ако $m = n$, то векторите $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, ..., $\mathbf{a}_m$ образуват базис тогава и само тогава, когато $r(A) = n$, т.е. когато $\det A \ne 0$.

Доказателство. Ще докажем еквивалентното твърдение, че векторите $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, ..., $\mathbf{a}_m$ са линейно зависими тогава и само тогава, когато $r(A) < m$.

1) Нека векторите $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, ..., $\mathbf{a}_m$ са линейно зависими. Тогава някой от тях може да се представи като линейна комбинация на останалите, следователно според основните свойства на детерминантите, в матрицата A всеки минор от ред m е равен на нула и $r(A) < m$. **2**) Да предположим сега, че $r(A) < m$. Тогава съгласно теоремата за базисния минор в матрицата A има редове (небазисни редове), които се представят като линейна комбинация на други (базисни) редове, следователно между редовете на A съществува линейна зависимост, което означава, че същата линейна зависимост има между векторите $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, ..., $\mathbf{a}_m$. ■

Нека V е линейно пространство и $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, ..., $\mathbf{a}_m$ са някакви вектори. Тогава тяхната линейна обвивка $l(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m)$ представлява крайномерно линейно пространство (което е подпространство на V) и неговата размерност се нарича ранг на системата вектори $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, ..., $\mathbf{a}_m$, $r(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m) = \dim[l(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m)]$. Рангът на една система вектори е равен на най-големия брой линейно независими между тях. В частност, $r(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m) = m$ тогава и само тогава, когато $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, ..., $\mathbf{a}_m$ са линейно независими.

2. Геометрични вектори. Тук предполагаме, че читателят е запознат с някои основни геометрични понятия. По целесъобразност различаваме три вида пространства на геометрични вектори, вектори върху права, вектори върху равнина и вектори в пространството. И в трите случая векторът представлява ***насочена отсечка*** $\vec{\mathbf{a}} = \overrightarrow{AB}$ с начало точката A и край в точката B (рис. 4.1).

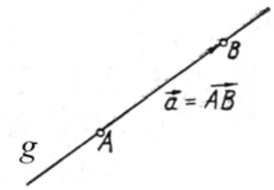

Рис. 4.1.

При нулевият вектор $\vec{\mathbf{0}}$, началната и крайната точка съвпадат. Една насочена отсечка $\vec{\mathbf{a}}$ притежава следните геометрични характеристики.

1) ***Дължина*** (модул на вектор), която се бележи с $|\vec{\mathbf{a}}|$. Дължината е относително понятие. Ако имаме еталон (мащаб) – вектор $\vec{\mathbf{e}}$ с дължина $|\vec{\mathbf{e}}| \neq 0$, то можем да изразим дължината на всеки друг вектор като пропорция от дължината на $\vec{\mathbf{e}}$. Всеки два вектора могат да бъдат сравнявани по дължина. Нулевият вектор и само той има нулева дължина, $|\vec{\mathbf{0}}| = 0$.

2) ***Направление и посока***. За всеки ненулев вектор $\vec{\mathbf{a}} \neq \vec{\mathbf{0}}$, съществува единствена права g, върху която лежи $\vec{\mathbf{a}}$. Тази права се нарича ***директриса*** и задава направлението на вектора $\vec{\mathbf{a}}$. Едно направлението, определено от правата g, задава две посоки, първата съвпада с посоката на вектора $\vec{\mathbf{a}}$, а втората посока е противоположна на $\vec{\mathbf{a}}$. Нулевият вектор няма определено направление и посока.

Ос се нарича права, върху която е избран мащаб за дължина и едната от двете нейни посоки е определена като положителна. По този начин за всеки вектор $\overrightarrow{AB}$ върху дадена ос g се определя ***алгебрична мярка***, равна на неговата дължина в съответствие с мащаба, когато $\overrightarrow{AB}$ и g са еднопосочни и равна на неговата дължина със знак минус, когато $\overrightarrow{AB}$ и g имат противоположни посоки.

Две насочени отсечки, които могат да се получат една от друга с помощта на успоредно пренасяне, по нататък ще разглеждаме като представители на един и същ вектор. По този начин не правим разлика между два вектора, които имат една и съща дължина и едно и също направление и една и съща посока.

Тези вектори можем да разглеждаме като получени от множеството на насочените отсечки след прилагане на описаното ***отношение на еквивалентност*** между тях.

Между геометричните вектори разглеждаме следните линейни операции.

1) ***Умножение с число*** λ. За нулевия вектор определяме $\lambda\vec{\mathbf{0}} = \vec{\mathbf{0}}$. Нека сега $\vec{\mathbf{a}} \neq \vec{\mathbf{0}}$. Ако $\lambda = 0$ то полагаме $0.\vec{\mathbf{a}} = \vec{\mathbf{0}}$. Ако $\lambda \neq 0$, то под произведение $\lambda\vec{\mathbf{a}}$ на вектора $\vec{\mathbf{a}}$ с числото λ се разбира вектор с дължина $|\lambda\vec{\mathbf{a}}| = |\lambda||\vec{\mathbf{a}}|$, който има направление като вектора $\vec{\mathbf{a}}$ и посока, която съвпада с тази на $\vec{\mathbf{a}}$, когато $\lambda > 0$, и посока противоположна на тази на вектора $\vec{\mathbf{a}}$, когато $\lambda < 0$.

2) ***Събиране***. Сборът $\vec{\mathbf{c}} = \vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{b}}$ двата вектора $\vec{\mathbf{a}}$ и $\vec{\mathbf{b}}$ е векторът, който се получава, когато приложим $\vec{\mathbf{b}}$ в крайната точка на $\vec{\mathbf{a}}$ (рис. 4.2), $\vec{\mathbf{a}} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{\mathbf{b}} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{\mathbf{c}} = \overrightarrow{OB}$.

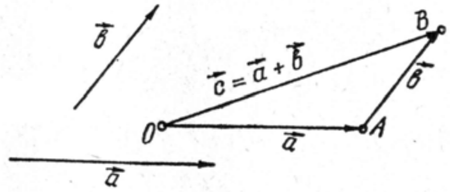

Рис. 4.2.

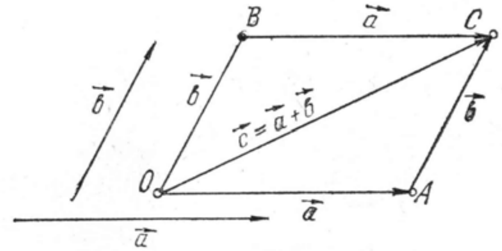

Рис. 4.3.

Събирането може да бъде извършено по ***правилото на успоредника*** (рис. 4.3), при което двата вектора $\vec{\mathbf{a}} = \overrightarrow{OA}$ и $\vec{\mathbf{b}} = \overrightarrow{OB}$ се прилагат в една и съща точка O, след което триъгълникът ΔOAB се допълва до успоредник $OABC$. Тук сборът $\vec{\mathbf{c}} = \vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{b}}$ се явява векторът, който представлява диагонала $\overrightarrow{OC}$.

Разликата $\vec{\mathbf{c}} = \vec{\mathbf{b}} - \vec{\mathbf{a}}$ може да се разгледа като сбора на $\vec{\mathbf{b}}$ с $-\vec{\mathbf{a}}$, $\vec{\mathbf{c}} = \vec{\mathbf{b}} + (-\vec{\mathbf{a}})$ и отново да се определи по правилото на успоредника (рис. 4.4 и рис 4.5).

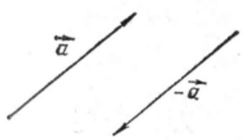

Рис. 4.4.

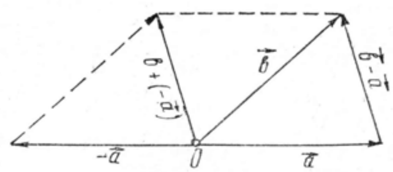

Рис. 4.4.

Непосредствено се проверява, че така определеното множество на геометрични вектори и линейни операции между тях удовлетворяват всички основни изисквания за линейно пространство. Между тези свойства да обърнем внимание на асоциативността на операцията събиране, която е доказана илюстративно на (рис. 4.6).

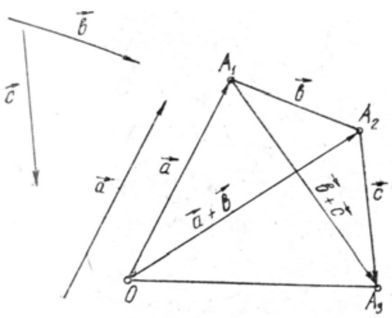

Рис. 4.4.

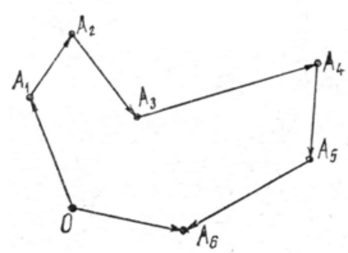

Рис. 4.7.

На рис. 4.7 е илюстриран начинът на събиране на повече от два вектора.

Два вектора $\vec{\mathbf{a}}$ и $\vec{\mathbf{b}}$ в равнината или в пространството се наричат ***колинеарни (успоредни)***, когато са линейно зависими, т.е. когато могат да се намерят две числа λ и μ, поне едното от които различно от нула такива, че $\lambda\vec{\mathbf{a}} + \mu\vec{\mathbf{b}} = \vec{\mathbf{0}}$. По този начин нулевият вектор е колинеарен с всеки друг вектор. Тук е по-интересен случаят когато и двата вектора са ненулеви. Нека за определеност $\mu \neq 0$. Тогава имаме $\vec{\mathbf{b}} = \left(-\dfrac{\lambda}{\mu}\right)\vec{\mathbf{a}}$, което означава, че векторите $\vec{\mathbf{a}}$ и $\vec{\mathbf{b}}$ имат едно и също направление (успоредни директриси), откъдето и произлиза терминът "колинеарни".

Три вектора $\vec{\mathbf{a}}$, $\vec{\mathbf{b}}$ и $\vec{\mathbf{c}}$ в пространството се наричат ***компланарни***, когато са линейно зависими, т.е. когато могат да се намерят три числа λ, μ и ν, поне едното от които различно от нула такива, че $\lambda\vec{\mathbf{a}}+\mu\vec{\mathbf{b}}+\nu\vec{\mathbf{c}}=\vec{\mathbf{0}}$. По този начин нулевият вектор е компланарен с всеки друг вектор и освен това, ако кои да е два от векторите $\vec{\mathbf{a}}$, $\vec{\mathbf{b}}$ и $\vec{\mathbf{c}}$ са колинеарни, то те са компланарни. И тук е по-интересен случаят когато и трите вектора са ненулеви. Нека за определеност $\nu \neq 0$. Тогава имаме $\vec{\mathbf{c}}=\left(-\dfrac{\lambda}{\nu}\right)\vec{\mathbf{a}}+\left(-\dfrac{\mu}{\nu}\right)\vec{\mathbf{b}}$, което означава, че векторът $\vec{\mathbf{c}}$ лежи в равнина, определена от векторите $\vec{\mathbf{a}}$ и $\vec{\mathbf{b}}$, откъдето и произлиза терминът "компланарни". Тази равнина се явява единствена, когато векторите $\vec{\mathbf{a}}$ и $\vec{\mathbf{b}}$ не са колинеарни. Пренебрегвайки някои технически уточнения, даваме следното

Определение 4.4. ***Базис в равнината*** се наричат всеки два линейно независими (неколинеарни) вектори $\vec{\mathbf{e}}_1$ и $\vec{\mathbf{e}}_2$. ***Базис в пространството*** се наричат всеки три линейно независими (некомпланарни) вектори $\vec{\mathbf{e}}_1$, $\vec{\mathbf{e}}_2$ и $\vec{\mathbf{e}}_3$.

По-нататък ще се убедим, че горното определение за базис се съгласува напълно с даденото в предишния раздел общо определение за базис.

Теорема 4.2. Нека векторите $\vec{\mathbf{e}}_1$ и $\vec{\mathbf{e}}_2$ образуват базис в равнината. Тогава всеки вектор $\vec{\mathbf{a}}$ от тази равнина може да се представи при това по единствен начин като линейна комбинация на базисните, $\vec{\mathbf{a}}=a_1\vec{\mathbf{e}}_1+a_2\vec{\mathbf{e}}_2$. Числата a_1 и a_2 се наричат ***координати*** на вектора $\vec{\mathbf{a}}$ в базиса $\vec{\mathbf{e}}_1$, $\vec{\mathbf{e}}_2$. Нека векторите $\vec{\mathbf{e}}_1$, $\vec{\mathbf{e}}_2$ и $\vec{\mathbf{e}}_3$ образуват базис в пространството. Тогава всеки вектор $\vec{\mathbf{a}}$ от пространството може да се представи при това по единствен начин като линейна комбинация на базисните, $\vec{\mathbf{a}}=a_1\vec{\mathbf{e}}_1+a_2\vec{\mathbf{e}}_2+a_3\vec{\mathbf{e}}_3$. Числата a_1, a_2 и a_3 се наричат ***координати*** на вектора $\vec{\mathbf{a}}$ в базиса $\vec{\mathbf{e}}_1$, $\vec{\mathbf{e}}_2$, $\vec{\mathbf{e}}_3$.

Доказателство. **1**) Нека $\vec{\mathbf{e}}_1$ и $\vec{\mathbf{e}}_2$ образуват базис в равнината. Да приложим трите вектора $\vec{\mathbf{e}}_1=\overrightarrow{OE_1}$, $\vec{\mathbf{e}}_2=\overrightarrow{OE_2}$ и $\vec{\mathbf{a}}=\overrightarrow{OM}$ в една и съща точка O и да допълним конструкцията до успоредник, както е показано на рис. 4.8, при което числовите оси по директрисите на $\vec{\mathbf{e}}_1$ и $\vec{\mathbf{e}}_2$ да означим съответно с Ox и Oy. Тогава

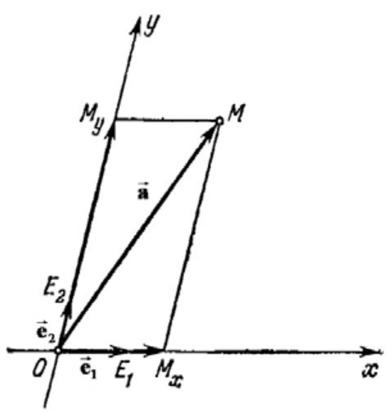

Рис. 4.8.

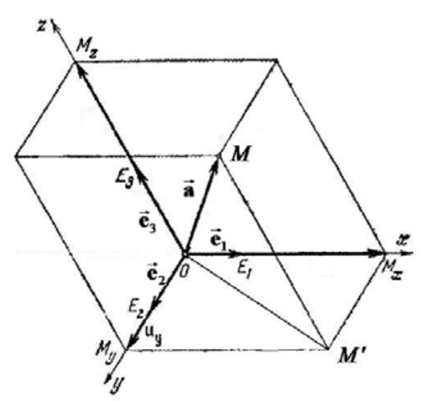

Рис. 4.9.

по правилото на успоредника следва, че $\vec{\mathbf{a}}=\overrightarrow{OM_x}+\overrightarrow{OM_y}$. От друга страна имаме $\overrightarrow{OM_x}=a_1\vec{\mathbf{e}}_1$ и $\overrightarrow{OM_y}=a_2\vec{\mathbf{e}}_2$, за някои числа a_1 и a_2, следователно $\vec{\mathbf{a}}=a_1\vec{\mathbf{e}}_1+a_2\vec{\mathbf{e}}_2$.

2) Нека $\vec{\mathbf{e}}_1$, $\vec{\mathbf{e}}_2$ и $\vec{\mathbf{e}}_3$ образуват базис в пространството. Да приложим четирите вектора $\vec{\mathbf{e}}_1 = \overrightarrow{OE_1}$, $\vec{\mathbf{e}}_2 = \overrightarrow{OE_2}$, $\vec{\mathbf{e}}_3 = \overrightarrow{OE_3}$ и $\vec{\mathbf{a}} = \overrightarrow{OM}$ в една и съща точка O и да допълним конструкцията до паралелепипед, както е показано на рис. 4.9, при което числовите оси по директрисите на $\vec{\mathbf{e}}_1$ и $\vec{\mathbf{e}}_2$ да означим съответно с Ox, Oy и Oz. През точката M да прекараме права, успоредна на оста Oz до пресичане с равнината Oxy в точка M'. Тогава, $\vec{\mathbf{a}} = \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM'} + \overrightarrow{M'M}$. От друга страна, $\overrightarrow{OM'} = a_1\vec{\mathbf{e}}_1 + a_2\vec{\mathbf{e}}_2$ и $\overrightarrow{M'M} = a_3\vec{\mathbf{e}}_3$, за някои числа a_1, a_2 и a_3 следователно $\vec{\mathbf{a}} = a_1\vec{\mathbf{e}}_1 + a_2\vec{\mathbf{e}}_2 + a_3\vec{\mathbf{e}}_3$. Единствеността и в двата случая се доказва както при теорема 4.1. ■

Последните разсъждения трябва да се схващат по скоро като резултат на геометричната интуиция отколкото като строги дедукции в рамките на апарата на линейната алгебра.

Сега вече лесно можем да установим, че ***всеки три вектора в равнината са линейно зависими и всеки четири вектора в пространството са линейно зависими***. Да разгледаме векторите $\vec{\mathbf{a}}_1$, $\vec{\mathbf{a}}_2$ и $\vec{\mathbf{a}}_3$ от някоя равнина. Ако $\vec{\mathbf{a}}_1$ и $\vec{\mathbf{a}}_2$ са колинеарни, то няма какво да се доказва, ако $\vec{\mathbf{a}}_1$ и $\vec{\mathbf{a}}_2$ не са колинеарни, то те образуват базис и следователно третият вектор $\vec{\mathbf{a}}_3$ се представя като тяхна линейна комбинация. Да разгледаме сега векторите $\vec{\mathbf{a}}_1$, $\vec{\mathbf{a}}_2$, $\vec{\mathbf{a}}_3$ и $\vec{\mathbf{a}}_4$ от пространството. Ако $\vec{\mathbf{a}}_1$, $\vec{\mathbf{a}}_2$ и $\vec{\mathbf{a}}_3$ са компланарни, то няма какво да се доказва, ако $\vec{\mathbf{a}}_1$ и $\vec{\mathbf{a}}_2$ не са компланарни, то те образуват бази и следователно четвъртият вектор $\vec{\mathbf{a}}_4$ се представя като тяхна линейна комбинация.

По този начин се убедихме, че равнината е линейно пространство с размерност 2, а пространството може да бъде разглеждано като линейно пространство с размерност 3. По тази причина понякога равнината се означава с R^2, а пространството чрез R^3.

Афинна координатна система $O\vec{\mathbf{e}}_1\vec{\mathbf{e}}_2$ ***в равнината*** се получава, когато имаме налице някакъв базис $\vec{\mathbf{e}}_1$, $\vec{\mathbf{e}}_2$ и фиксираме една точка O за начало на координатната система. Базисът позволява да адресираме по единствен начин векторите в равнината, посредством техните координати. Координатната система позволява да адресираме всяка точки M в равнината чрез координатите на нейния ***радиус вектор*** $\overrightarrow{OM}$. По същия начин ***афинна координатна система*** $O\vec{\mathbf{e}}_1\vec{\mathbf{e}}_2\vec{\mathbf{e}}_3$ ***в пространството*** се получава, когато имаме налице някакъв базис $\vec{\mathbf{e}}_1$, $\vec{\mathbf{e}}_2$, $\vec{\mathbf{e}}_3$ и фиксираме една точка O за начало на координатната система. Базисът позволява да адресираме по единствен начин векторите в пространството, посредством техните координати. Координатната система позволява да адресираме всяка точки M в пространството чрез координатите на нейния ***радиус вектор*** $\overrightarrow{OM}$.

Ако е зададена една афинна координатна система, то правите през началото O, успоредни на базисните вектори се наричат ***координатни оси***. Координатните оси са оси, за които мащабът е посоката се задават от съответните базисни вектори. Всеки две координатни оси на афинната координатна система $O\vec{\mathbf{e}}_1\vec{\mathbf{e}}_2\vec{\mathbf{e}}_3$ в пространството образуват съответната ***координатна равнина***.

Ако базисните вектори сключват помежду си прави ъгли, то базисът се нарича ***ортогонален***, а когато базисът е ортогонален и базисните вектори имат единична дължина, то базисът се нарича ***ортонормиран***.

Ако базисът е ортонормиран, то съответната афинна координатна система се нарича ***декартова*** (***правоъгълна)***. В декартова координатна система координатните оси могат да бъдат разглеждани като ***числови*** оси.

По нататък в геометричните изследвания ще разглеждаме като правило само декартови координатни системи с базисни вектори, означени с $\vec{\mathbf{i}}$ и $\vec{\mathbf{j}}$ със съответни числови оси Ox и Oy за случай на равнина (рис 4.10) и $\vec{\mathbf{i}}$, $\vec{\mathbf{j}}$ и $\vec{\mathbf{k}}$ със съответни числови оси Ox, Oy и Oz за случай на пространство (рис 4.11).

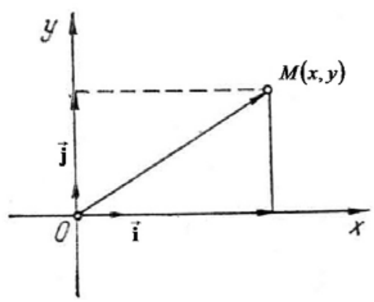

Рис. 4.10.

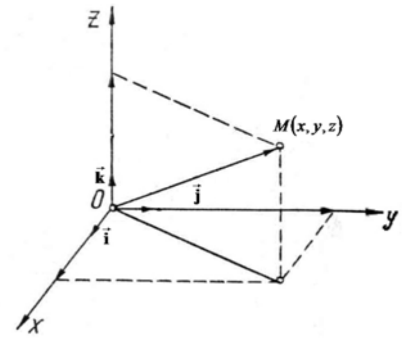

Рис. 4.11.

Когато трябва да означим дадена точка M чрез нейните координати пишем $M(x, y)$ и $M(x, y, z)$ съответно за случая на равнина и пространство.

Декартовата координатна система в равнината Oxy се нарича ***положително ориентирана***, когато по-краткият път на завъртане на първата числова ос Ox до сливане с втората ос Oy е в посока, ***обратна на движението на часовниковата стрелка***, както е в случая, изобразен на рис. 4.10. В противен случай координатната система Oxy се нарича ***отрицателно ориентирана***. Очевидно ако координатната система Oxy е положително ориентирана, то системата Oyx е отрицателно ориентирана.

Декартовата координатна система в пространството $Oxyz$ се нарича ***положително ориентирана***, когато координатната система Oxy в съответната координатна равнина е положително ориентирана, "погледнато от върха" на третата ос Oz, както е в случая, изобразен на рис. 4.11. В противен случай координатната система $Oxyz$ се нарича ***отрицателно ориентирана***.

Аналогични означени за координатните оси както и аналогични определения за ориентация могат да бъдат въведени и за произволна афинна координатната система.

Освен декартови координатни системи могат да бъдат използвани и други координатни системи, които имат същото основно предназначение – да адресират точките в равнината и пространството, например полярна, цилиндрична и сферична координатна система.

3. Евклидовото пространство R^n. Един от най-важните за приложенията примери за линейни пространства е линейното пространство R^n, елементите на което са вектори стълбове (еднотипни $(n \times 1)$ матрици), които за удобство в текста ще изписваме понякога като редове,

$$\vec{\mathbf{a}} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}.$$

Координатите на тези вектори се предполагат ***реални числа***, макар че при доказателството на основните твърдения в много случаи се допуска възможността координатите да приемат и комплексни стойности. Размерността на R^n е равна на n, $\dim \mathsf{R}^n = n$. Тук най-често се използва ***каноничният базис***

$$\vec{\mathbf{e}}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},\ \vec{\mathbf{e}}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots,\ \vec{\mathbf{e}}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix},$$

за който имаме $\vec{\mathbf{a}} = a_1\vec{\mathbf{e}}_1 + a_2\vec{\mathbf{e}}_2 + \cdots + a_n\vec{\mathbf{e}}_n$. Съгласно твърдение 4.4, векторите $\vec{\mathbf{a}}_k\left(a_{k1}, a_{k2}, \ldots, a_{kn}\right)$, $k = 1,2,\ldots,n$, образуват базис тогава и само тогава, когато

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \neq 0 .$$

По аналогия се определя и линейното пространство K^n, където K е някакво друго числово поле, например $K = \mathsf{C}$.

В този раздел ще разгледаме понятия като собствено число, собствен вектор, ортогонална матрица и характеристичен полином, които имат огромно значение за цялата линейна алгебра, при което ще дадем определенията в общия случай, както и ще докажем някои основни свойства.

Преди всичко в R^n се въвежда скаларно произведение и по тази причина то се нарича ***евклидово пространство*** (другата причина е, че координатите на векторите се приемат основно за реални числа). Нека $\vec{\mathbf{a}}(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ и $\vec{\mathbf{b}}(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ са два вектора. Тогава тяхното ***скаларно произведение*** $\left\langle \vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}} \right\rangle$ се определя като сбор от произведенията на съответните координати.

$$\left\langle \vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}} \right\rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n .$$

По нататък ще установим, че горното определение се съгласува правилото на пресмятане на геометричното скаларно произведение, когато геометричните вектори се разглеждат в ортонормирания базис $\vec{\mathbf{i}}$, $\vec{\mathbf{j}}$, $\vec{\mathbf{k}}$.

Лесно се проверява, че са налице следните основни свойства.

1) $\left\langle \vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{a}} \right\rangle \geq 0$, при което равенство има единствено в случая $\vec{\mathbf{a}} = \vec{\mathbf{0}}$.

2) $\left\langle \vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}} \right\rangle = \left\langle \vec{\mathbf{b}}, \vec{\mathbf{a}} \right\rangle$ (***симетричност***).

3) $\left\langle \lambda_1\vec{\mathbf{a}}_1 + \lambda_1\vec{\mathbf{a}}_2 + \cdots + \lambda_p\vec{\mathbf{a}}_p, \vec{\mathbf{b}} \right\rangle = \lambda_1\left\langle \vec{\mathbf{a}}_1, \vec{\mathbf{b}} \right\rangle + \lambda_2\left\langle \vec{\mathbf{a}}_2, \vec{\mathbf{b}} \right\rangle + \cdots + \lambda_p\left\langle \vec{\mathbf{a}}_p, \vec{\mathbf{b}} \right\rangle$ (***линейност***).

Поради симетрията, скаларното произведение е линейно и по двата аргумента, което позволява при работа да се разкриват скобите по обичайния начин.

Строго погледнато даденото определение представлява един частен (макар и най-важния) случай на скаларно произведение. В R^n могат да се въведат различни скаларни произведения, следвайки изискването да са изпълнени изброените по горе три свойства.

Скаларното произведение може да се запише във вида

$$\left\langle \vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}} \right\rangle = \vec{\mathbf{b}}^T \vec{\mathbf{a}} ,$$

в който се използва познатото матрично умножение "ред по стълб".

Векторите $\vec{\mathbf{a}}$ и $\vec{\mathbf{b}}$ се наричат ***ортогонални***, когато тяхното скаларно произведение е равно на нула, $\langle \vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}} \rangle = 0$. В този случай понякога се пише $\vec{\mathbf{a}} \perp \vec{\mathbf{b}}$. ***Дължината*** $|\vec{\mathbf{a}}|$ (модула) на вектора $\vec{\mathbf{a}}$ се определя като $|\vec{\mathbf{a}}| = \sqrt{\langle \vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{a}} \rangle}$ (също както при геометричните вектори).

Следващото твърдение намира различни приложения.

Твърдение 4.5. Собствените вектори, отговарящи на дадено собствено значение λ образуват линейно подпространство.

Доказателство. Нека $\vec{\mathbf{v}}_1$, $\vec{\mathbf{v}}_2$, ..., $\vec{\mathbf{v}}_m$ са собствени вектори, отговарящи на собственото значение λ и да разгледаме една тяхна линейна комбинация

$$\vec{\mathbf{v}} = \mu_1 \vec{\mathbf{v}}_1 + \mu_2 \vec{\mathbf{v}}_2 + \cdots + \mu_m \vec{\mathbf{v}}_m .$$

Тогава

$$A\vec{\mathbf{v}} = A(\mu_1 \vec{\mathbf{v}}_1 + \mu_2 \vec{\mathbf{v}}_2 + \cdots + \mu_m \vec{\mathbf{v}}_m) = \mu_1 A\vec{\mathbf{v}}_1 + \mu_2 A\vec{\mathbf{v}}_2 + \cdots + \mu_m A\vec{\mathbf{v}}_m ,$$

$$A\vec{\mathbf{v}} = \mu_1 \lambda \vec{\mathbf{v}}_1 + \mu_2 \lambda \vec{\mathbf{v}}_2 + \cdots + \mu_m \lambda \vec{\mathbf{v}}_m = \lambda(\mu_1 \vec{\mathbf{v}}_1 + \mu_2 \vec{\mathbf{v}}_2 + \cdots + \mu_m \vec{\mathbf{v}}_m) = \lambda \vec{\mathbf{v}} ,$$

което доказва твърдението. ■

В частност, ако $\vec{\mathbf{v}} \neq \vec{\mathbf{0}}$ е собствен вектор за матрицата A, отговарящ на собствено значение λ, то всеки вектор $\mu\vec{\mathbf{v}}$, $\mu \neq 0$, също е собствен за това число.

Твърдение 4.6. Собствените вектори, отговарящи на различни собствени значения на дадена $(n \times n)$ матрица A са линейно независими.

Доказателство. Нека $\vec{\mathbf{v}}_1$, $\vec{\mathbf{v}}_2$, ..., $\vec{\mathbf{v}}_s$ са собствени вектори, отговарящи на различните помежду си собствени значения λ_1, λ_2, ..., λ_s и да образуваме една тяхна нулева линейна комбинация

$$\mu_1 \vec{\mathbf{v}}_1 + \mu_2 \vec{\mathbf{v}}_2 + \cdots + \mu_s \vec{\mathbf{v}}_s = \vec{\mathbf{0}} .$$

Като приложим матрицата A върху горното равенство, намираме

$$\mu_1 A\vec{\mathbf{v}}_1 + \mu_2 A\vec{\mathbf{v}}_2 + \cdots + \mu_s A\vec{\mathbf{v}}_s = \vec{\mathbf{0}} ,$$

$$\mu_1 \lambda_1 \vec{\mathbf{v}}_1 + \mu_2 \lambda_2 \vec{\mathbf{v}}_2 + \cdots + \mu_s \lambda_s \vec{\mathbf{v}}_s = \vec{\mathbf{0}} ,$$

понеже по определение $A\vec{\mathbf{v}}_k = \lambda_k \vec{\mathbf{v}}_k$, за всяко $k = 1,2,\ldots,s$. Прилагайки отново матрицата A намираме

$$\mu_1 \lambda_1 A\vec{\mathbf{v}}_1 + \mu_2 \lambda_2 A\vec{\mathbf{v}}_2 + \cdots + \mu_s \lambda_s A\vec{\mathbf{v}}_s = \vec{\mathbf{0}} ,$$

$$\mu_1 \lambda_1^2 \vec{\mathbf{v}}_1 + \mu_2 \lambda_2^2 \vec{\mathbf{v}}_2 + \cdots + \mu_s \lambda_s^2 \vec{\mathbf{v}}_s = \vec{\mathbf{0}} ,$$

и т.н. намираме, че за всяко цяло положително число m е налице равенството

$$\mu_1 \lambda_1^m \vec{\mathbf{v}}_1 + \mu_2 \lambda_2^m \vec{\mathbf{v}}_2 + \cdots + \mu_s \lambda_s^m \vec{\mathbf{v}}_s = \vec{\mathbf{0}} .$$

Да разгледаме тези равенства за $m = 0,1,2,\ldots,s-1$ и да ги подредим в матричен вид. Получаваме матричното равенство

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_s \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{s-1} & \lambda_2^{s-1} & \cdots & \lambda_s^{s-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_1 \vec{\mathbf{v}}_1^T \\ \mu_2 \vec{\mathbf{v}}_2^T \\ \vdots \\ \mu_s \vec{\mathbf{v}}_s^T \end{pmatrix} = \mathbf{0} , \tag{4.2}$$

в което първата матрица множител отляво има детерминанта от тип на Вандермонд, която е различна от нула по условие, вторият множител отляво е $(n \times n)$ матрица, чиито редове са образувани от собствените вектори на A, умножени с коефициентите на линейната комбинация, а матрицата отдясно е нулевата $(n \times n)$ матрица. Умножавайки (4.2) отляво с обратната матрица на вандермондовия множител, получаваме

$$\begin{pmatrix} \mu_1 \vec{\mathbf{v}}_1^T \\ \mu_2 \vec{\mathbf{v}}_2^T \\ \vdots \\ \mu_s \vec{\mathbf{v}}_s^T \end{pmatrix} = \mathbf{0},$$

което означава, че всичките вектори редове $\mu_k \vec{\mathbf{v}}_k^T$, $k = 1, 2, \ldots, s$, са нулеви, а това е възможно, единствено когато всичките коефициенти μ_1, μ_2, ..., μ_s на линейната комбинация са равни на нула. ■

В общия случай собствените значения на реалните матрици могат да бъдат и комплексни числа. Симетричните матрици обаче имат само реални собствени значения.

Твърдение 4.7. Нека A е реална симетрична матрица от ред n. Тогава всичките нейни собствени значения са реални.

Доказателство. Нека $\lambda = \alpha + i\beta$ е едно собствено значение на A, на което отговаря собствен вектор $\vec{\mathbf{h}} = \vec{\mathbf{u}} + i\vec{\mathbf{v}}$, където α и β са реалната и имагинерната част на λ, а $\vec{\mathbf{u}}$ и $\vec{\mathbf{v}}$ са реални вектори, задаващи реалната и имагинерната част на собствения вектор $\vec{\mathbf{h}}$. Трябва да покажем, че $\beta = 0$. По условие имаме $A\vec{\mathbf{h}} = \lambda\vec{\mathbf{h}}$,

$$A(\vec{\mathbf{u}} + i\vec{\mathbf{v}}) = (\alpha + i\beta)(\vec{\mathbf{u}} + i\vec{\mathbf{v}}),\ A\vec{\mathbf{u}} + iA\vec{\mathbf{v}} = (\alpha\vec{\mathbf{u}} - \beta\vec{\mathbf{v}}) + i(\alpha\vec{\mathbf{v}} + \beta\vec{\mathbf{u}}),$$

откъдето отделяйки реална и имагинерна част получаваме

$$A\vec{\mathbf{u}} = \alpha\vec{\mathbf{u}} - \beta\vec{\mathbf{v}} \text{ и } A\vec{\mathbf{v}} = \alpha\vec{\mathbf{v}} + \beta\vec{\mathbf{u}}.$$

Умножавайки скаларно първото с $\vec{\mathbf{v}}$, а второто с $\vec{\mathbf{u}}$, получаваме

(4.3) $\langle A\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}} \rangle = \alpha\langle \vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}} \rangle - \beta\langle \vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{v}} \rangle$ и $\langle A\vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{u}} \rangle = \alpha\langle \vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{u}} \rangle + \beta\langle \vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{u}} \rangle$.

От друга страна матрицата A е симетрична, следователно

$$\langle A\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}} \rangle = \vec{\mathbf{v}}^T A\vec{\mathbf{u}} = \left(\vec{\mathbf{v}}^T A\vec{\mathbf{u}}\right)^T = \vec{\mathbf{u}}^T A^T \vec{\mathbf{v}}^{TT} = \vec{\mathbf{u}}^T A\vec{\mathbf{v}} = \langle A\vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{u}} \rangle.$$

Сега изваждайки почленно двете равенства в (4.3) получаваме

$$\beta\left(\langle \vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{u}} \rangle + \langle \vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{v}} \rangle\right) = 0,$$

което показва, че $\beta = 0$, понеже ако $\langle \vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{u}} \rangle + \langle \vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{v}} \rangle = 0$, то ще следва, че $\vec{\mathbf{u}} = \vec{\mathbf{0}}$ и $\vec{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{0}}$, а това противоречи на изискването, че собственият вектор не е нулев. От факта, че $\beta = 0$ веднага се получава, че $A\vec{\mathbf{u}} = \alpha\vec{\mathbf{u}}$ и $A\vec{\mathbf{v}} = \alpha\vec{\mathbf{v}}$, при което поне един от двата вектора $\vec{\mathbf{u}}$ и $\vec{\mathbf{v}}$ е различен от нулевия. ■

Един базис $\vec{\mathbf{h}}_1$, $\vec{\mathbf{h}}_2$, ..., $\vec{\mathbf{h}}_n$ се нарича ***ортонормиран***, когато е ***ортогонален***, т.е. базисните вектори са взаимно ортогонални,

$$\langle \vec{\mathbf{h}}_i, \vec{\mathbf{h}}_j \rangle = 0 \text{ за } i \neq j,\ i, j = 1, 2, \ldots, n,$$

и ***нормиран***, т.е. когато всичките базисни вектори имат единична дължина,

$$|\vec{\mathbf{h}}_1| = |\vec{\mathbf{h}}_2| = \cdots = |\vec{\mathbf{h}}_n|.$$

В R^n може да се определи ортонормиран базис, състоящ се само от собствени вектори на дадена симетрична матрица A. Това важно твърдение ще докажем за случая, когато собствените числа на матрицата са различни.

Твърдение 4.8. Нека A е реална симетрична матрица от ред n и нека нейните собствени значения са различни помежду си. Тогава в R^n може да се намери ортонормиран базис от собствени вектори на A.

Доказателство. Нека реалната симетрична $(n \times n)$ матрица A има различни помежду си собствени значения λ_1, λ_2, ..., λ_n, за които вече знаем че всичките са реални, и нека $\vec{\mathbf{h}}_1$, $\vec{\mathbf{h}}_2$, ..., $\vec{\mathbf{h}}_n$ са съответни собствени вектори. Съгласно твърдение 4.7 те са линейно независими, следователно образуват базис в R^n понеже $\dim \mathsf{R}^n = n$. Сега ще покажем, че те са взаимно ортогонални помежду си. Да изберем два индекса $i \neq j$, $1 \leq i, j \leq n$. Тогава

$$\lambda_i \left\langle \vec{\mathbf{h}}_i, \vec{\mathbf{h}}_j \right\rangle = \left\langle A\vec{\mathbf{h}}_i, \vec{\mathbf{h}}_j \right\rangle = \left\langle \vec{\mathbf{h}}_i, A\vec{\mathbf{h}}_j \right\rangle = \lambda_j \left\langle \vec{\mathbf{h}}_i, \vec{\mathbf{h}}_j \right\rangle, \ (\lambda_i - \lambda_j)\left\langle \vec{\mathbf{h}}_i, \vec{\mathbf{h}}_j \right\rangle = 0,$$

следователно $\left\langle \vec{\mathbf{h}}_i, \vec{\mathbf{h}}_j \right\rangle = 0$, понеже $\lambda_i \neq \lambda_j$. По този начин установихме, че те образуват ортогонален базис. Сега веднага се проверява, че векторите

$$\frac{\vec{\mathbf{h}}_1}{\left|\vec{\mathbf{h}}_1\right|}, \frac{\vec{\mathbf{h}}_2}{\left|\vec{\mathbf{h}}_2\right|}, \dots, \frac{\vec{\mathbf{h}}_n}{\left|\vec{\mathbf{h}}_n\right|},$$

образуват ортонормиран базис. ■

Да подредим този ортонормиан базис в стълбове и да разгледаме така получената матрица $U = \left[\vec{\mathbf{h}}_1 \vec{\mathbf{h}}_2 \dots \vec{\mathbf{h}}_n\right]$. Тогава непосредствено се проверява, че $UU^T = E_n$, което означава, че матрицата U е ортогонална.

Нека $\vec{\mathbf{h}}_1$, $\vec{\mathbf{h}}_2$, ..., $\vec{\mathbf{h}}_n$ е ортонормираният базис от собствени вектори за симетричната матрица A и нека $U = \left[\vec{\mathbf{h}}_1 \vec{\mathbf{h}}_2 \dots \vec{\mathbf{h}}_n\right]$. По условие имаме $U\vec{\mathbf{h}}_k = \lambda_k \vec{\mathbf{h}}_k$, за всяко $k = 1,2,\dots,n$, следователно

$$AU = U\Lambda, \text{ където } \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

По този начин доказахме частен случай на следната основна

Теорема 4.3 *(спектрална теорема).* Нека A е реална симетрична матрица от ред n. Тогава съществува ортогонална матрица U, за която $U^T AU = \Lambda$, където Λ е диагонална матрица, по главния диагонал на която стоят собствените числа на матрицата A. ■

Теорема 4.3 е доказана строго по-горе за случая, когато собствените значение на A са различни помежду си.

Нека A е $(n \times n)$ матрица и $\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}} \in \mathsf{R}^n$ са вектори, зададени чрез техните координати в каноничния базис. Тогава

$$\left\langle A\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}} \right\rangle = \vec{\mathbf{b}}^T A\vec{\mathbf{a}} \text{ и } \left\langle \vec{\mathbf{a}}, A\vec{\mathbf{b}} \right\rangle = \left(A\vec{\mathbf{b}}\right)^T \vec{\mathbf{a}} = \vec{\mathbf{b}}^T A^T \vec{\mathbf{a}},$$

следователно винаги е налице равенството $\left\langle A\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}} \right\rangle = \left\langle \vec{\mathbf{a}}, A^T\vec{\mathbf{b}} \right\rangle$. В частност, ако A е симетрична, то $\left\langle A\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}} \right\rangle = \left\langle \vec{\mathbf{a}}, A\vec{\mathbf{b}} \right\rangle$.

Нека сега U е $(n \times n)$ ортогонална матрица. Тогава

$$\left\langle U\vec{\mathbf{a}}, U\vec{\mathbf{b}} \right\rangle = \left\langle \vec{\mathbf{a}}, U^T U\vec{\mathbf{b}} \right\rangle = \left\langle \vec{\mathbf{a}}, E_n\vec{\mathbf{b}} \right\rangle = \left\langle \vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}} \right\rangle,$$

следователно преобразуването на векторите посредством ортогонална матрица запазва скаларното произведение, което е най-важното свойство на ортогоналните матрици. В частност се запазват и дължините на векторите, понеже

$|U\vec{\mathbf{a}}| = \sqrt{\langle U\vec{\mathbf{a}}, U\vec{\mathbf{a}}\rangle} = \sqrt{\langle \vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{a}}\rangle} = |\vec{\mathbf{a}}|$.

4. Геометрично скаларно произведение. ***Скаларното произведение*** $\vec{\mathbf{a}}\vec{\mathbf{b}}$ на геометричните вектори $\vec{\mathbf{a}}$ и $\vec{\mathbf{b}}$ се определя като число, равно на произведението от техните дължини и косинуса от ъгъла между тях

(4.4) $\quad \vec{\mathbf{a}}\vec{\mathbf{b}} = |\vec{\mathbf{a}}||\vec{\mathbf{b}}|\cos\varphi,\ 0 \le \varphi \le \pi$.

Скаларното произведение може да се определи и посредством ***алгебричната проекция*** $\mathrm{pr}_l\,\vec{\mathbf{a}}$ на вектора $\vec{\mathbf{a}}$ върху оста l на вектора $\vec{\mathbf{b}}$ (рис. 4.11).

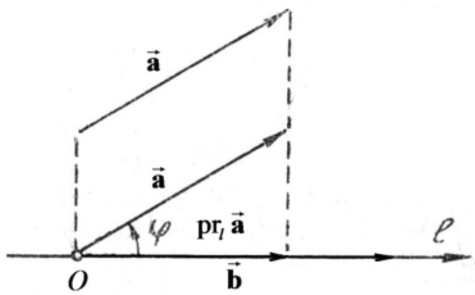

Рис. 4.11.

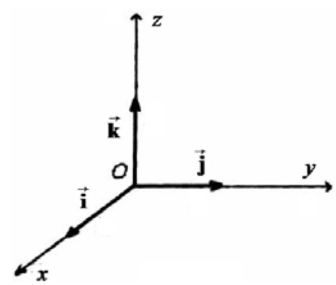

Рис. 4.12.

По определение имаме $\mathrm{pr}_l\,\vec{\mathbf{a}} = |\vec{\mathbf{a}}|\cos\varphi$, следователно $\vec{\mathbf{a}}\vec{\mathbf{b}} = (\mathrm{pr}_l\,\vec{\mathbf{a}})|\vec{\mathbf{b}}|$. По същия начин се установява, че $\vec{\mathbf{a}}\vec{\mathbf{b}} = (\mathrm{pr}_l\,\vec{\mathbf{b}})|\vec{\mathbf{a}}|$ (където l е оста на вектора $\vec{\mathbf{a}}$).

Непосредствено от определението на скаларно произведение чрез формулата (4.4), произтичат следните основни свойства.

1) $\vec{\mathbf{a}}\vec{\mathbf{b}} = \vec{\mathbf{b}}\vec{\mathbf{a}}$.

2) $(\vec{\mathbf{a}}_1 + \vec{\mathbf{a}}_2)\vec{\mathbf{b}} = \vec{\mathbf{a}}_1\vec{\mathbf{b}} + \vec{\mathbf{a}}_2\vec{\mathbf{b}}$ и $\vec{\mathbf{a}}(\vec{\mathbf{b}}_1 + \vec{\mathbf{b}}_2) = \vec{\mathbf{a}}\vec{\mathbf{b}}_1 + \vec{\mathbf{a}}\vec{\mathbf{b}}_2$.

3) Ако λ е число, то $(\lambda\vec{\mathbf{a}})\vec{\mathbf{b}} = \vec{\mathbf{a}}(\lambda\vec{\mathbf{b}}) = \lambda\vec{\mathbf{a}}\vec{\mathbf{b}}$.

4) $\vec{\mathbf{a}}\vec{\mathbf{a}} \ge 0$ и $\vec{\mathbf{a}}\vec{\mathbf{a}} = 0$, единствено когато $\vec{\mathbf{a}} = \vec{\mathbf{0}}$.

Два ненулеви геометрични вектора се наричат ***ортогонални***, когато сключват прав ъгъл. По определение нулевият вектор е ортогонален на всеки друг.

5) $\vec{\mathbf{a}}\vec{\mathbf{b}} = 0$ тогава и само тогава, когато векторите $\vec{\mathbf{a}}$ и $\vec{\mathbf{b}}$ са ортогонални.

6) $|\vec{\mathbf{a}}| = \sqrt{\vec{\mathbf{a}}\vec{\mathbf{a}}}$, дължината на всеки вектор е равна на квадратния корен от скаларното произведение на вектора със себе си.

По нататък навсякъде ще предполагаме, че е зададена декартова координатна система $Oxyz$ с ортонормиран базис от единичните вектори $\vec{\mathbf{i}}$, $\vec{\mathbf{j}}$, $\vec{\mathbf{k}}$. По определение $|\vec{\mathbf{i}}| = |\vec{\mathbf{j}}| = |\vec{\mathbf{k}}| = 1$, $\vec{\mathbf{i}} \perp \vec{\mathbf{j}}$, $\vec{\mathbf{i}} \perp \vec{\mathbf{k}}$, $\vec{\mathbf{j}} \perp \vec{\mathbf{k}}$ (рис. 4.12). Да разгледаме векторите $\vec{\mathbf{a}}(a_1, a_2, a_3)$ и $\vec{\mathbf{b}}(b_1, b_2, b_3)$, зададени чрез техните координати в базиса $\vec{\mathbf{i}}$, $\vec{\mathbf{j}}$, $\vec{\mathbf{k}}$, $\vec{\mathbf{a}} = a_1\vec{\mathbf{i}} + a_2\vec{\mathbf{j}} + a_3\vec{\mathbf{k}}$ и $\vec{\mathbf{b}} = b_1\vec{\mathbf{i}} + b_2\vec{\mathbf{j}} + b_3\vec{\mathbf{k}}$. Съгласно формулата (4.5) за взаимните скаларни произведения на базисните вектори намираме $\vec{\mathbf{i}}\vec{\mathbf{i}} = \vec{\mathbf{j}}\vec{\mathbf{j}} = \vec{\mathbf{k}}\vec{\mathbf{k}} = 1$ и $\vec{\mathbf{i}}\vec{\mathbf{j}} = \vec{\mathbf{i}}\vec{\mathbf{k}} = \vec{\mathbf{j}}\vec{\mathbf{k}} = 0$, следователно

$$\vec{\mathbf{a}}\vec{\mathbf{b}} = (a_1\vec{\mathbf{i}} + a_2\vec{\mathbf{j}} + a_3\vec{\mathbf{k}})(b_1\vec{\mathbf{i}} + b_2\vec{\mathbf{j}} + b_3\vec{\mathbf{k}}) =$$

$$(4.5) \quad = a_1b_1\vec{\mathbf{i}}\vec{\mathbf{i}} + a_1b_2\vec{\mathbf{i}}\vec{\mathbf{j}} + a_1b_3\vec{\mathbf{i}}\vec{\mathbf{k}} + a_2b_1\vec{\mathbf{j}}\vec{\mathbf{i}} + a_2b_2\vec{\mathbf{j}}\vec{\mathbf{j}} + a_2b_3\vec{\mathbf{j}}\vec{\mathbf{k}} + a_3b_1\vec{\mathbf{i}}\vec{\mathbf{k}} + a_3b_2\vec{\mathbf{k}}\vec{\mathbf{j}} + a_3b_3\vec{\mathbf{k}}\vec{\mathbf{k}} =$$

$$= a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

Последната формула показва, че скаларното произведение се изразява по твърде лесен начин като сума от произведенията на съответните координати в даден ортонормиран базис и по този начин обосновава предимството на такива базиси. Ако базисът не беше ортонормиран, то формулата (4.5) щеше в общия случай да съдържа девет събираеми. Например ако са дадени векторите $\vec{\mathbf{a}}(1,-2,3)$ и $\vec{\mathbf{b}}(2,3,1)$, то за тяхното скаларно произведение намираме $\vec{\mathbf{a}}\vec{\mathbf{b}} = 1.2 + (-2).3 + 3.1 = -1$.

Дължина на вектор. Съгласно формулата (4.5), за дължината на вектора $\vec{\mathbf{a}}(a_1, a_2, a_3)$ намираме

(4.6) $\quad |\vec{\mathbf{a}}| = \sqrt{\vec{\mathbf{a}}\vec{\mathbf{a}}} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 +{}_3^2}$.

Да разгледаме точките $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$ са зададени чрез техните координати. Тогава за дължината на вектора $\overrightarrow{M_1M_2}(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$ получаваме

(4.7) $\quad \left|\overrightarrow{M_1M_2}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$.

Ъгъл между вектори. Ако $\vec{\mathbf{a}}(a_1, a_2, a_3)$ и $\vec{\mathbf{b}}(b_1, b_2, b_3)$ са два ненулеви вектора, то за ъгъла φ между тях получаваме формулата

(4.8) $\quad \cos\varphi = \dfrac{\vec{\mathbf{a}}\vec{\mathbf{b}}}{|\vec{\mathbf{a}}||\vec{\mathbf{b}}|} = \dfrac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$.

В частност векторите са ортогонални тогава и само тогава, когато $a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 0$.

Направляващи косинуси. Да разгледаме ненулевия вектор $\vec{\mathbf{a}}(a_1, a_2, a_3)$. По определение базисните вектори имат следните координати, $\vec{\mathbf{i}} = (1,0,0)$, $\vec{\mathbf{j}} = (0,1,0)$ и $\vec{\mathbf{k}} = (0,0,1)$. Нека α, β и γ са ъглите, които сключва $\vec{\mathbf{a}}$ със съответните базисни вектори (рис. 4.13).

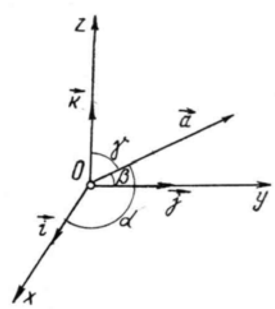

Рис. 4.13.

Тогава съгласно (4.8) намираме

$$\cos\alpha = \frac{\vec{\mathbf{i}}\vec{\mathbf{a}}}{|\vec{\mathbf{i}}||\vec{\mathbf{a}}|} = \frac{a_1}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}},$$

$$\cos\beta = \frac{\vec{\mathbf{j}}\vec{\mathbf{a}}}{|\vec{\mathbf{j}}||\vec{\mathbf{a}}|} = \frac{a_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}},$$

$$\cos\alpha = \frac{\vec{\mathbf{k}}\vec{\mathbf{a}}}{|\vec{\mathbf{k}}||\vec{\mathbf{a}}|} = \frac{a_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}},$$

откъдето веднага може да се провери, че

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

Единичен вектор. Нека $\vec{\mathbf{a}}(a_1, a_2, a_3)$ е ненулев вектор. Тогава векторът $\vec{\mathbf{n}}$, който се получава от вектора $\vec{\mathbf{a}}$, след като го разделим на неговата дължина $|\vec{\mathbf{a}}|$, представлява вектор, който има посоката на $\vec{\mathbf{a}}$ и има дължина $|\vec{\mathbf{n}}| = 1$,

$$\vec{\mathbf{n}} = \frac{\vec{\mathbf{a}}}{|\vec{\mathbf{a}}|} = \frac{a_1\vec{\mathbf{i}} + a_2\vec{\mathbf{j}} + a_3\vec{\mathbf{k}}}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}} = \frac{a_1}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}\vec{\mathbf{i}} + \frac{a_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}\vec{\mathbf{j}} + \frac{a_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}\vec{\mathbf{k}},$$

$$\text{(4.9)} \qquad \vec{\mathbf{n}} = \left(\frac{a_1}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}, \frac{a_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}, \frac{a_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}} \right)$$

Формулите (4.5), (4.6), (4.7), (4.8), (4.9) както и формулите за направляващите косинуси се променят по очевиден начин, когато разсъжденията се провеждат в равнината. За да получим техния равнинен еквивалент е достатъчно да отстраним събираемите, които съдържат третия индекс.

5. Векторно произведение. Нека $\vec{\mathbf{a}}$ и $\vec{\mathbf{b}}$ са два вектора в пространството. Тяхното ***векторно произведение*** $\vec{\mathbf{c}} = \vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}}$ винаги се определя като вектор с дължина $|\vec{\mathbf{c}}| = |\vec{\mathbf{a}}||\vec{\mathbf{b}}|\sin\varphi$, където φ е ъгълът между тях, $0 \le \varphi \le \pi$. От това определение се вижда, че $\vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}}$ е нулевият вектор тогава и само тогава, когато $|\vec{\mathbf{a}}| = 0$ или $|\vec{\mathbf{b}}| = 0$ или $\sin\varphi = 0$, което означава, че $\vec{\mathbf{a}}$ и $\vec{\mathbf{b}}$ са колинеарни. Нека $\vec{\mathbf{a}}$ и $\vec{\mathbf{b}}$ са неколинеарни (всеки от тях е ненулев и не са успоредни). Тогава тяхното векторно произведение се определя като единственият вектор в пространството, който притежава следните свойства (рис. 4.14).

1) $|\vec{\mathbf{c}}| = |\vec{\mathbf{a}}||\vec{\mathbf{b}}|\sin\varphi$.

2) Векторът $\vec{\mathbf{c}}$ е ортогонален на $\vec{\mathbf{a}}$ и $\vec{\mathbf{b}}$.

3) Векторите $\vec{\mathbf{a}}$, $\vec{\mathbf{b}}$ и $\vec{\mathbf{c}}$ в този ред образуват ***дясна тройка***.

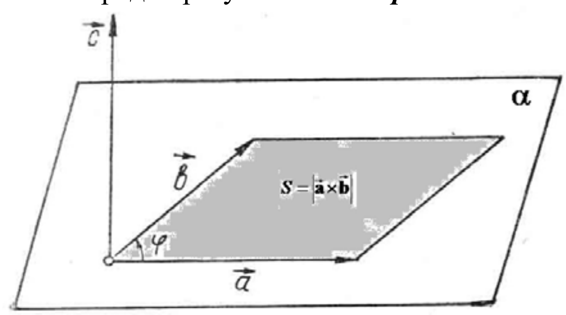

Рис. 4.14.

Ако приложим векторите $\vec{\mathbf{a}}$ и $\vec{\mathbf{b}}$ в една точка, то те определят единствена равнина α. Дължината на векторното произведение по определение е лицето на пространствения успоредник от равнината α, породен от $\vec{\mathbf{a}}$ и $\vec{\mathbf{b}}$, освен това векторът $\vec{\mathbf{c}}$ е перпендикулярен на равнината α. Условията дотук определят точно два вектора, със зададена дължина и перпендикулярни на дадена равнина. Третото условие, векторите $\vec{\mathbf{a}}$, $\vec{\mathbf{b}}$ и $\vec{\mathbf{c}}$ в този ред да образуват дясна тройка, определя вече $\vec{\mathbf{c}}$ еднозначно.

Векторното произведение притежава следните основни свойства, които лесно се проверяват непосредствено от дадените определения.

1) $\vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}} = -\vec{\mathbf{b}} \times \vec{\mathbf{a}}$.

2) $(\vec{\mathbf{a}}_1 + \vec{\mathbf{a}}_2) \times \vec{\mathbf{b}} = \vec{\mathbf{a}}_1 \times \vec{\mathbf{b}} + \vec{\mathbf{a}}_2 \times \vec{\mathbf{b}}$ и $\vec{\mathbf{a}} \times (\vec{\mathbf{b}}_1 + \vec{\mathbf{b}}_2) = \vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}}_1 + \vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}}_2$.

3) Ако λ е число, то $(\lambda\vec{\mathbf{a}}) \times \vec{\mathbf{b}} = \vec{\mathbf{a}} \times (\lambda\vec{\mathbf{b}}) = \lambda\vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}}$.

4) $\vec{\mathbf{a}}\times\vec{\mathbf{b}}=\vec{\mathbf{0}}$, единствено когато $\vec{\mathbf{a}}$ и $\vec{\mathbf{b}}$ са колинеарни.

Да разгледаме векторите $\vec{\mathbf{a}}(a_1,a_2,a_3)$ и $\vec{\mathbf{b}}(b_1,b_2,b_3)$, зададени чрез техните координати в базиса $\vec{\mathbf{i}}$, $\vec{\mathbf{j}}$, $\vec{\mathbf{k}}$, при което допълнително предполагаме, че координатната система е положително ориентирана, което означава, че базисните вектори $\vec{\mathbf{i}}$, $\vec{\mathbf{j}}$, $\vec{\mathbf{k}}$, взети в този ред, образуват дясна тройка. Да намерим векторното произведение $\vec{\mathbf{i}}\times\vec{\mathbf{j}}$. По определение $\vec{\mathbf{i}}\times\vec{\mathbf{j}}$ е единственият вектор с дължина $|\vec{\mathbf{i}}||\vec{\mathbf{j}}|\sin\frac{\pi}{2}=1$, който е ортогонален едновременно на $\vec{\mathbf{i}}$ и $\vec{\mathbf{j}}$, следователно $\vec{\mathbf{i}}\times\vec{\mathbf{j}}=\vec{\mathbf{k}}$. Аналогично се установява, че взаимните векторни произведения на тези вектори имат вида

$$\vec{\mathbf{i}}\times\vec{\mathbf{i}}=\vec{\mathbf{0}},\ \vec{\mathbf{i}}\times\vec{\mathbf{j}}=\vec{\mathbf{k}},\ \vec{\mathbf{i}}\times\vec{\mathbf{k}}=-\vec{\mathbf{j}},$$
$$\vec{\mathbf{j}}\times\vec{\mathbf{i}}=-\vec{\mathbf{k}},\ \vec{\mathbf{j}}\times\vec{\mathbf{j}}=\vec{\mathbf{0}},\ \vec{\mathbf{j}}\times\vec{\mathbf{k}}=\vec{\mathbf{i}},$$
$$\vec{\mathbf{k}}\times\vec{\mathbf{i}}=\vec{\mathbf{j}},\ \vec{\mathbf{k}}\times\vec{\mathbf{j}}=-\vec{\mathbf{i}},\ \vec{\mathbf{k}}\times\vec{\mathbf{k}}=\vec{\mathbf{0}}.$$

Горната таблица може да се запомни по следния начин. Във редицата $\vec{\mathbf{i}}$, $\vec{\mathbf{j}}$, $\vec{\mathbf{k}}$, $\vec{\mathbf{i}}$, $\vec{\mathbf{j}}$, векторното произведение на всеки два поредни вектора е равно на вектора след тях и освен това векторното произведение на всеки вектор със себе си дава нулевият вектор, а смяната местата на векторните множители променя единствено знака на произведението. Пресмятаме

$$\begin{aligned}
\vec{\mathbf{a}}\times\vec{\mathbf{b}}&=\left(a_1\vec{\mathbf{i}}+a_2\vec{\mathbf{j}}+a_3\vec{\mathbf{k}}\right)\times\left(b_1\vec{\mathbf{i}}+b_2\vec{\mathbf{j}}+b_3\vec{\mathbf{k}}\right)=\\
&=a_1b_1\vec{\mathbf{i}}\times\vec{\mathbf{i}}+a_1b_2\vec{\mathbf{i}}\times\vec{\mathbf{j}}+a_1b_3\vec{\mathbf{i}}\times\vec{\mathbf{k}}+\\
&+a_2b_1\vec{\mathbf{j}}\times\vec{\mathbf{i}}+a_2b_2\vec{\mathbf{j}}\times\vec{\mathbf{j}}+a_2b_3\vec{\mathbf{j}}\times\vec{\mathbf{k}}+\\
&+a_3b_1\vec{\mathbf{k}}\times\vec{\mathbf{i}}+a_3b_2\vec{\mathbf{k}}\times\vec{\mathbf{j}}+a_3b_3\vec{\mathbf{k}}\times\vec{\mathbf{k}}=\\
&=a_1b_2\vec{\mathbf{k}}-a_1b_3\vec{\mathbf{j}}+\\
&-a_2b_1\vec{\mathbf{k}}+a_2b_3\vec{\mathbf{i}}+\\
&+a_3b_1\vec{\mathbf{j}}-a_3b_2\vec{\mathbf{i}}=\\
&=\left(a_2b_3-a_3b_2\right)\vec{\mathbf{i}}+\left(a_3b_1-a_1b_3\right)\vec{\mathbf{j}}+\left(a_1b_2-a_2b_1\right)\vec{\mathbf{k}}
\end{aligned}$$

По този начин векторното произведение може да се разглежда като стойността на формалната детерминанта

$$\text{(4.10)}\quad \vec{\mathbf{a}}\times\vec{\mathbf{b}}=\begin{vmatrix}\vec{\mathbf{i}} & \vec{\mathbf{j}} & \vec{\mathbf{k}}\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix}\vec{\mathbf{i}}+(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}a_1 & a_3\\ b_1 & b_3\end{vmatrix}\vec{\mathbf{j}}+(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}\vec{\mathbf{k}},$$

в първия ред на която стоят базисните вектори, във втория ред стоят координатите на левия векторен множител, а в третия ред стоят координатите на десния векторен множител, която детерминанта пресмятаме по адюнгираните количества на първия ред.

Пример 4.6. За векторно произведение на векторите $\vec{\mathbf{a}}(1,-2,3)$ и $\vec{\mathbf{b}}(2,3,1)$ имаме

$$\vec{\mathbf{a}}\times\vec{\mathbf{b}}=\begin{vmatrix}\vec{\mathbf{i}} & \vec{\mathbf{j}} & \vec{\mathbf{k}}\\ 1 & -2 & 3\\ 2 & 3 & 1\end{vmatrix}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}-2 & 3\\ 3 & 1\end{vmatrix}\vec{\mathbf{i}}+(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}1 & 3\\ 2 & 1\end{vmatrix}\vec{\mathbf{j}}+(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}1 & -2\\ 2 & 3\end{vmatrix}\vec{\mathbf{k}},$$

$$\vec{\mathbf{a}}\times\vec{\mathbf{b}}=(-11)\vec{\mathbf{i}}+5\vec{\mathbf{j}}+7\vec{\mathbf{k}}.$$

Векторното произведение може да се използва за намиране лицето на пространствен успоредник, ако са известни векторите на две негови съседни страни.

Лице на триъгълник. Нека е даден пространственият триъгълник $\Delta M_1M_2M_3$ с върхове точките $M_1(x_1,y_1,z_1)$, $M_2(x_2,y_2,z_2)$ и $M_3(x_3,y_3,z_3)$. Тогава неговото лице е половината от лицето на успоредника, определен от двата вектора $\vec{\mathbf{a}}=\overrightarrow{M_1M_2}$ и $\vec{\mathbf{b}}=\overrightarrow{M_1M_3}$. За координатите на $\vec{\mathbf{a}}$ и $\vec{\mathbf{b}}$ имаме

$\vec{\mathbf{a}}=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)$ и $\vec{\mathbf{b}}=(x_3-x_1,y_3-y_1,z_3-z_1)$,

следователно

$$S_{\Delta M_1M_2M_3}=\frac{1}{2}\left|\vec{\mathbf{a}}\times\vec{\mathbf{b}}\right|=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}\vec{\mathbf{i}} & \vec{\mathbf{j}} & \vec{\mathbf{k}}\\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1\\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1\end{vmatrix}\right|,$$

откъдето за търсеното лице намираме формулата

$$(4.11)\quad S_{\Delta M_1M_2M_3}=\frac{1}{2}\sqrt{\begin{vmatrix}y_2-y_1 & z_2-z_1\\ y_3-y_1 & z_3-z_1\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}x_2-x_1 & z_2-z_1\\ x_3-x_1 & z_3-z_1\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}x_2-x_1 & y_2-y_1\\ x_3-x_1 & y_3-y_1\end{vmatrix}^2}\,.$$

Да разгледаме сега равнинния триъгълник $\Delta M_1M_2M_3$ с върхове точките $M_1(x_1,y_1)$, $M_2(x_2,y_2)$ и $M_3(x_3,y_3)$, зададени чрез своите координати в декартовата координатна система Oxy с ортонормиран базис $\vec{\mathbf{i}}$ и $\vec{\mathbf{j}}$. Тази равнина можем да разглеждаме като координатна равнина Oxy в пространствената декартова координатна система $Oxyz$ с ортонормиран базис $\vec{\mathbf{i}}$, $\vec{\mathbf{j}}$ и $\vec{\mathbf{k}}$, при което върховете на триъгълника ще имат координати $M_1(x_1,y_1,0)$, $M_2(x_2,y_2,0)$ и $M_3(x_3,y_3,0)$. Сега от (4.11), за лицето на триъгълника получаваме формулата

$$(4.12)\quad S_{\Delta M_1M_2M_3}=\frac{1}{2}\sqrt{\begin{vmatrix}x_2-x_1 & y_2-y_1\\ x_3-x_1 & y_3-y_1\end{vmatrix}^2}=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}x_2-x_1 & y_2-y_1\\ x_3-x_1 & y_3-y_1\end{vmatrix}\right|.$$

6. Смесено произведение. ***Смесено произведение*** $(\vec{\mathbf{a}},\vec{\mathbf{b}},\vec{\mathbf{c}})$ на трите пространствени вектора $\vec{\mathbf{a}}$, $\vec{\mathbf{b}}$ и $\vec{\mathbf{c}}$ се нарича числото, което се получава от скаларното произведение на вектора $\vec{\mathbf{a}}\times\vec{\mathbf{b}}$ с вектора $\vec{\mathbf{c}}$

$$(\vec{\mathbf{a}},\vec{\mathbf{b}},\vec{\mathbf{c}})=(\vec{\mathbf{a}}\times\vec{\mathbf{b}})\vec{\mathbf{c}}\,.$$

Да разгледаме векторите $\vec{\mathbf{a}}(a_1,a_2,a_3)$, $\vec{\mathbf{b}}(b_1,b_2,b_3)$ и $\vec{\mathbf{c}}(c_1,c_2,c_3)$, зададени чрез техните координати в базиса $\vec{\mathbf{i}}$, $\vec{\mathbf{j}}$, $\vec{\mathbf{k}}$ (координатната система се предполага положително ориентирана. Съгласно формулата (4.10) и правилото за пресмятане на скаларно произведение на вектори с известни координати (в ортонормиран базис), за смесеното произведение намираме

$$(\vec{\mathbf{a}},\vec{\mathbf{b}},\vec{\mathbf{c}})=\begin{vmatrix}\vec{\mathbf{i}} & \vec{\mathbf{j}} & \vec{\mathbf{k}}\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}\vec{\mathbf{c}}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix}c_1+(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}a_1 & a_3\\ b_1 & b_3\end{vmatrix}c_2+(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}c_3,$$

следователно смесеното произведение се изчислява като сбор на произведенията на адюнгираните количества на първия ред с координатите на вектора $\vec{\mathbf{c}}$, от което веднага следва, че смесеното произведение е стойността на детерминантата

$$\left(\vec{\mathbf{a}},\vec{\mathbf{b}},\vec{\mathbf{c}}\right)=\begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix},$$

което може да се запише по естествен начин като

$$(4.13)\quad \left(\vec{\mathbf{a}},\vec{\mathbf{b}},\vec{\mathbf{c}}\right)=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

От (4.13) следват всичките основни свойства на смесеното произведение.

1) Ако сменим местата на два вектора в смесеното произведение, то се променя единствено знака. Например $\left(\vec{\mathbf{a}},\vec{\mathbf{b}},\vec{\mathbf{c}}\right)=-\left(\vec{\mathbf{b}},\vec{\mathbf{a}},\vec{\mathbf{c}}\right)$ и т.н.

2) $\left(\lambda\vec{\mathbf{a}},\vec{\mathbf{b}},\vec{\mathbf{c}}\right)=\left(\vec{\mathbf{a}},\lambda\vec{\mathbf{b}},\vec{\mathbf{c}}\right)=\left(\vec{\mathbf{a}},\vec{\mathbf{b}},\lambda\vec{\mathbf{c}}\right)=\lambda\left(\vec{\mathbf{a}},\vec{\mathbf{b}},\vec{\mathbf{c}}\right)$.

3) $\left(\vec{\mathbf{a}}_1+\vec{\mathbf{a}}_2,\vec{\mathbf{b}},\vec{\mathbf{c}}\right)=\left(\vec{\mathbf{a}}_1,\vec{\mathbf{b}},\vec{\mathbf{c}}\right)+\left(\vec{\mathbf{a}}_2,\vec{\mathbf{b}},\vec{\mathbf{c}}\right)$.

Твърдение 4.9. Стойността на смесеното произведение $\left(\vec{\mathbf{a}},\vec{\mathbf{b}},\vec{\mathbf{c}}\right)$ е нула тогава и само тогава, когато векторите $\vec{\mathbf{a}}$, $\vec{\mathbf{b}}$ и $\vec{\mathbf{c}}$ са компланарни (линейно зависими).

Доказателство. От формулата (4.13) следва, че $\left(\vec{\mathbf{a}},\vec{\mathbf{b}},\vec{\mathbf{c}}\right)=0$ тогава и само тогава, когато детерминантата

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}=0,$$

което от своя страна е налице тогава и само тогава, когато между редовете на тази детерминанта има линейна зависимост. Но всяка линейна зависимост между редовете на детерминантата задава същата линейна зависимост между векторите $\vec{\mathbf{a}}$, $\vec{\mathbf{b}}$ и $\vec{\mathbf{c}}$. ■

Геометрична интерпретация на смесено произведение. Да приложим векторите $\vec{\mathbf{a}}$, $\vec{\mathbf{b}}$ и $\vec{\mathbf{c}}$ в една точка O, както е показано на рисунка 4.15 и да разгледаме паралелепипеда, построен върху тези вектори.

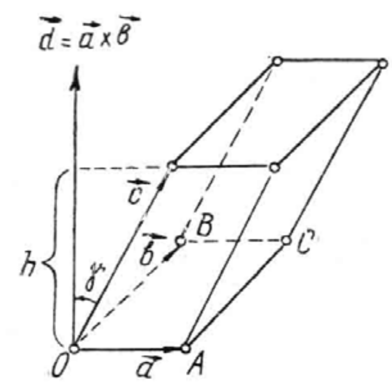

Рис. 4.15.

Да положим $\vec{\mathbf{d}}=\vec{\mathbf{a}}\times\vec{\mathbf{b}}$. Тогава за обема на паралелепипеда знаем формулата $V=S_{OABC}h$, където h е неговата височина, която е равна на абсолютната стойност на алгебричната проекция на вектора $\vec{\mathbf{c}}$ върху оста на вектора $\vec{\mathbf{d}}$. По тази причина $h=\left|\left|\vec{\mathbf{c}}\right|\cos\gamma\right|$, където γ е ъгълът между векторите $\vec{\mathbf{c}}$ и $\vec{\mathbf{d}}$, $0\le\gamma\le\pi$. Следователно за обема на паралелепипеда получаваме $V = \left|\vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}}\right|\left|\vec{\mathbf{c}}\right|\left|\cos\gamma\right|$, което според геометричното определение за скаларно произведение представлява абсолютната стойност на скаларното произведение на векторите $\vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}}$ и $\vec{\mathbf{c}}$, откъдето, въз основа на геометричното определение за смесено произведение намираме, че търсеният обем се изразява посредством формулата

(4.14) $V = \left|\left(\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}}, \vec{\mathbf{c}}\right)\right|$.

Понякога е удобно да се говори за ***ориентиран обем*** на паралелепипед, построен върху векторите $\vec{\mathbf{a}}$, $\vec{\mathbf{b}}$ и $\vec{\mathbf{c}}$, който се определя като стойността на смесеното произведение $\left(\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}}, \vec{\mathbf{c}}\right)$.

Обем на тетраедър. Да разгледаме тетраедъра с върхове $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$ и $M_4(x_4, y_4, z_4)$. Неговият обем е една шеста част от обема на съответния паралелепипед, построен върху векторите

$$\vec{\mathbf{a}} = \overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1),$$
$$\vec{\mathbf{b}} = \overrightarrow{M_1M_3} = (x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1),$$
$$\vec{\mathbf{c}} = \overrightarrow{M_1M_4} = (x_4 - x_1, y_4 - y_1, z_4 - z_1).$$

Сега от формулата (4.14) за обем на паралелепипед намираме

$$V_{M_1M_2M_3M_4} = \frac{1}{6}\left|\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & z_4 - z_1 \end{vmatrix}\right|.$$