

## Лекция 5

### §5. Уравнения на права и равнина

**1. Уравнение на права в равнината.** Тук ще разглеждаме равнина в която е зададена положително ориентирана декартова координатна система  $Oxy$  с ортонормиран базис  $\vec{i}$  и  $\vec{j}$  по осите  $Ox$  и  $Oy$ . Всичките вектори и точки предполагаме зададени чрез техните координати в този базис и в тази координатна система.

Нека е дадена правата  $g$  (рис. 5.1). Тя определя единствена права  $l$  през началото  $O$  на координатната система, която е перпендикулярна на  $g$ ,  $l \perp g$ ,  $O \in l$ . Да означим с  $N$  пресечната точка на  $g$  и  $l$ ,  $N = g \cap l$ , и нека  $\vec{n}$  е единичен вектор по направлението на вектора  $\overrightarrow{ON}$ . Този нормален вектор има координати  $\vec{n} = (\cos \alpha, \sin \alpha)$ , където  $\alpha$  е ъгълът между оста  $Ox$  и вектора  $\vec{n}$ , отчетен в положителна посока (посока обратна на движението на часовниковата стрелка).

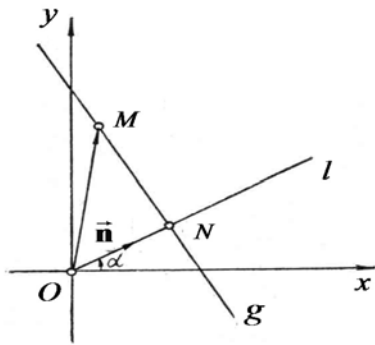


Рис. 5.1.

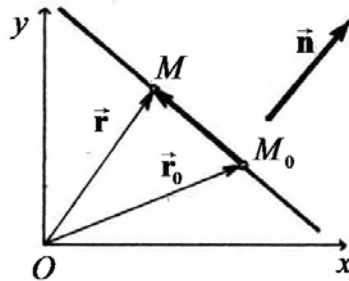


Рис. 5.2.

Нека  $M(x, y)$  е някаква точка от правата  $g$  (текуща точка), с радиус вектор  $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ ,  $\vec{r} = \vec{r}(x, y)$ . Правата  $g$  се състои от точките  $M(x, y)$ , за които алгебричната проекция на радиус вектора  $\vec{r}(x, y)$  върху оста  $l$  е равна на  $p = |\overrightarrow{ON}|$ , което с помощта на скалярно произведение можем да запишем като  $g : \vec{r}\vec{n} - p = 0$ . Сега чрез правилото за пресмятане на скалярно произведение, за правата  $g$  намираме следното координатно уравнение

$$g : x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0,$$

което се нарича **нормално уравнение на права**, а векторът  $\vec{n}$  се нарича **нормален вектор** към правата  $g$ , понеже сключва с правата прав ъгъл.

Една права  $g$  напълно се определя от дадена точка  $M_0(x_0, y_0)$ , която лежи върху  $g$ ,  $M_0 \in g$ , и даден нормален вектор  $\vec{N}(a, b)$ ,  $\vec{N} \neq \vec{0}$ ,  $\vec{N} \perp g$  (рис. 5.2.). Правата  $g$  се състои от точките  $M(x, y)$ , за които векторите  $\overrightarrow{M_0M} = \vec{r} - \vec{r}_0$  и  $\vec{N}$  сключват прав ъгъл. Тук  $\vec{r}$  и  $\vec{r}_0$  са радиус векторите на текущата точка  $M(x, y)$  и на дадената точка  $M_0(x_0, y_0)$ . Това условие с помощта на скалярно произведение записваме като

$$g : (\vec{r} - \vec{r}_0)\vec{N} = 0,$$

откъдето за правата  $g$  намираме следното координатно уравнение

$$(5.1) \quad g : (x - x_0)a + (y - y_0)b = 0.$$

**Пример 5.1.** Правата  $g$  през точката  $M_0(2, -3)$  с даден нормален вектор  $\vec{N}(1, -2)$  има уравнение

$$g: 1 \cdot (x-2) - 2 \cdot (y+3) = 0 \text{ или } g: x - 2y - 5 = 0.$$

Ако в (5.1) положим  $c = -ax_0 - by_0$ , то последното уравнение може да се запише във вида

$$g: ax + by + c = 0,$$

което се нарича **общо уравнение** на права в равнината.

Вече се убедихме, че всяка права в равнината се задава чрез някакво общо уравнение от вида (5.1). Следващата теорема показва, че е вярно и обратното.

**Теорема 5.1.** Нека  $a$ ,  $b$  и  $c$  са числа такива, че  $a \neq 0$  или  $b \neq 0$ . Тогава съвкупността от точки  $M(x, y)$  в равнината, чиито координати удовлетворяват равенството

$$(5.2) \quad ax + by + c = 0,$$

образуват някаква права  $g$ .

*Доказателство.* Ако разгледаме (5.2) като система от едно уравнение с две неизвестни, то тази система съгласно теоремата на Кронекер-Капели е съвместима и неопределена, следователно има безбройно много решения. Нека  $(x_1, y_1)$  и  $(x_2, y_2)$  са някои (кои да е) две различни решения и да разгледаме точките  $M_1(x_1, y_1)$  и  $M_2(x_2, y_2)$ . Тези две точки са различни и по тази причина определят единствена права  $g$ . Сега ще докажем, че всяка точка  $M_3(x_3, y_3)$ , чиито координати удовлетворяват равенството (5.2), лежи на същата права  $g$ . За тази цел е достатъчно да се убедим, че векторите  $\overrightarrow{M_1M_2}$  и  $\overrightarrow{M_1M_3}$  са колинеарни. По условие имаме

$$ax_1 + by_1 + c = 0 (M_1 \in g)$$

$$ax_2 + by_2 + c = 0 (M_2 \in g)$$

$$ax_3 + by_3 + c = 0 (M_3 \in g)$$

Ако извадим почленно първото равенство от другите две получаваме

$$(x_2 - x_1)a + (y_2 - y_1)b = 0$$

$$(x_3 - x_1)a + (y_3 - y_1)b = 0$$

Последното може да се разглежда като хомогенна система от две уравнения с две неизвестни  $a$  и  $b$ , която система по условие има ненулево решение. Съгласно общите свойства на хомогенните системи, последното е възможно единствено когато нейната детерминанта е равна на нула,

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix} = 0,$$

което пък означава, че между редовете на детерминантата има линейна зависимост. Тези редове обаче са точно координатите на векторите  $\overrightarrow{M_1M_2}$  и  $\overrightarrow{M_1M_3}$ , следователно те са линейно зависими, което и трябваше да докажем. ■

В общото уравнение на права (5.1) винаги се изисква поне един от двата коефициента  $a$  или  $b$  да бъде различен от нула, което може да се запише  $|a| + |b| > 0$ . Когато пишем общо уравнение на права винаги ще подразбираме, че това условие е налице.

Нека е дадена права  $g$  с общо уравнение  $g: ax + by + c = 0$ . **Тогава ненулевият вектор  $\vec{N}(a, b)$  е нормален към правата.** Наистина, нека  $M_1(x_1, y_1)$  и  $M_2(x_2, y_2)$  са някакви (кои да е) точки от  $g$ , което означава, че

$$\begin{aligned} ax_1 + by_1 + c &= 0 \\ ax_2 + by_2 + c &= 0 \end{aligned}$$

Като извадим първото уравнение от второто получаваме равенството

$$a(x_2 - x_1) + b(y_2 - y_1) = 0,$$

което показва, че векторите  $\vec{N}(a, b)$  и  $\overrightarrow{M_1M_2}(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$  са ортогонални. По този начин получихме, че така определеният вектор  $\vec{N}$  е ортогонален на всеки вектор с начало и край върху правата, което доказва твърдението.

**Параметрично уравнение.** Да разгледаме задачата за намиране на уравнение на права  $g$  през дадена точка  $M_0(x_0, y_0)$ ,  $M_0 \in g$ , и даден **направляващ вектор**  $\vec{a}(a_1, a_2)$ ,  $\vec{a} \neq \vec{0}$ ,  $\vec{a} \parallel g$  (рис. 5.3).

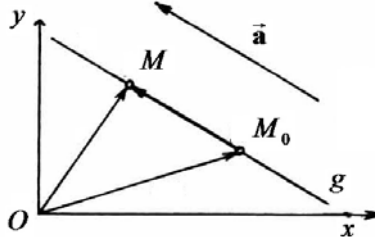


Рис. 5.3.

Тогава векторът  $\vec{N}(-a_2, a_1)$  е нормален към правата, понеже скаларното произведение на  $\vec{N}$  и  $\vec{a}$  е нула,  $\vec{N}\vec{a} = -a_2a_1 + a_1a_2 = 0$ , и следователно търсеното уравнение може да бъде получено като уравнение на права през дадена точка  $M_0$  и даден нормален вектор  $\vec{N}$ ,

$$g: -a_2(x - x_0) + a_1(y - y_0) = 0.$$

Ако е даден един направляващ вектор  $\vec{a}$  за правата  $g$ , то всеки друг вектор  $\lambda\vec{a}$ , който се получава от  $\vec{a}$  след умножение с число  $\lambda \neq 0$ , също се явява направляващ за правата  $g$ .

От друга страна, правата  $g$  се състои от точките  $M(x, y)$ , за които векторът  $\overrightarrow{M_0M} = \vec{r} - \vec{r}_0$  е колинеарен на вектора  $\vec{a}$ , което позволява да представим правата като  $g: \vec{r} - \vec{r}_0 = t\vec{a}$ , където  $t$  е параметър, или

$$g: \vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{a},$$

което се нарича **векторно параметрично уравнение** на правата  $g$ . Записвайки последното в координатен вид намираме

$$g: \begin{cases} x = x_0 + a_1t \\ y = y_0 + a_2t \end{cases},$$

което се нарича **скаларно параметрично уравнение** на  $g$ . Точките от  $g$  се получават при различните стойности на параметъра  $t$ , който може да бъде всяко реално число.

Като елиминираме от последния запис параметъра  $t$ , получаваме

$$t = \frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2},$$

което обосновава следния запис

$$g: \frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2},$$

който се нарича **канонично уравнение** на правата  $g$ . В този запис знаменателите  $a_1$  или  $a_2$  могат да бъдат нули (но не и двата едновременно), което не е противоречие, понеже това не означава деление на нула.

Ако  $a_1 = 0$ , то правата  $g$  е успоредна на оста  $Ox$ , ако  $a_2 = 0$ , то правата  $g$  е успоредна на оста  $Oy$ . Нека  $g$  не е успоредна на оста  $Oy$ , т.е.  $a_2 \neq 0$ . Тогава каноничното уравнение може да се преобразува във вида

$$g: y = \left(\frac{a_2}{a_1}\right)x + \left(y_0 - x_0 \frac{a_2}{a_1}\right)$$

което се записва по следния начин

$$g: y = kx + n.$$

Числото  $k$  се нарича **ъглов коефициент** на правата  $g$ . Другият параметър  $n$  задава пресечната точка на  $g$  с координатната ос  $Oy$  (пресечната точка има координати  $(0, n)$ ).

Преминването към различните видове уравнения на една права се получава лесно въз основа на дадените определения.

**Пример 5.2.** Ако правата  $g$  е дадена чрез своето канонично уравнение

$$g: \frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{3},$$

то по условие имаме една точка  $M_0(-1, 2)$ , която лежи върху  $g$  и един направляващ вектор  $\vec{a}(2, 3)$ , следователно скаларното параметрично уравнение на  $g$  има вида

$$g: \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 2 + 3t \end{cases}.$$

Един нормален вектор към тази права има координати  $\vec{N}(-3, 2)$ , следователно общото уравнение на  $g$  има вида

$$g: -3(x+1) + 2(y-2) = 0 \text{ или } g: -3x + 2y - 5 = 0.$$

**Уравнение на права през две точки.** Да потърсим уравнение на права  $g$  по две дадени различни точки  $M_1(x_1, y_1)$  и  $M_2(x_2, y_2)$ , които лежат върху нея. В този случай ненулевият вектор  $\vec{a}(x_2 - x_1, y_2 - y_1) = \overline{M_1M_2}$  се явява направляващ за правата, следователно  $g$  има скаларно параметрично уравнение

$$g: \begin{cases} x = x_1 + (x_2 - x_1)t \\ y = y_1 + (y_2 - y_1)t \end{cases}$$

и канонично уравнение

$$g = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}.$$

**Пример 5.3.** Да намерим уравнение на правата  $g$  през двете точки  $M_1(1, 3)$  и  $M_2(-3, 2)$ . Скаларното параметрично и каноничното уравнения имат съответно вида

$$g: \begin{cases} x = 1 - 4t \\ y = 3 - t \end{cases}, \quad g: \frac{x-1}{-4} = \frac{y-3}{-1},$$

откъдето лесно се намира и общото уравнение

$$g: (-1)(x-1) = (-4)(y-3) \text{ или } g: -x + 4y - 3 = 0.$$

Нека правата  $g$  е определена от двете различни точки  $M_1(x_1, y_1)$  и  $M_2(x_2, y_2)$  и не се явява успоредна на координатната ос  $Oy$ . Тогава  $x_1 \neq x_2$  и уравнението на  $g$  може да се запише във вида

$$g : y = y_1 + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) \text{ или } g : y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}x + \left[ y_1 - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}x_1 \right],$$

което показва, че правата  $g$  има ъглов коефициент

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

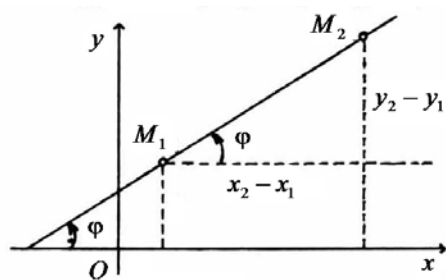


Рис. 5.4.

От друга страна (рис. 5.4.) от правоъгълния триъгълник с хипотенуза  $M_1M_2$  се вижда, че

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1},$$

следователно за ъгловият коефициент имаме  $k = \operatorname{tg} \varphi$ , където  $\varphi$ ,  $-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$ , е ъгълът, който сключва правата  $g$  с оста  $Ox$ .

От горното разсъждение веднага се получава, че съотношението

$$g : y = y_0 + k(x - x_0),$$

задава **уравнение на права  $g$ , минаваща през дадена точка  $M_0(x_0, y_0)$  с даден ъглов коефициент  $k$ .**

**Взаимно разположение на две прави.** Нека са дадени двете прави  $g_1$  и  $g_2$  чрез своите общи уравнения

$$g_1 : a_1x + b_1y + c_1 = 0 \quad (|a_1| + |b_1| > 0) \text{ и } g_2 : a_2x + b_2y + c_2 = 0 \quad (|a_2| + |b_2| > 0).$$

Различаваме следните три основни взаимни разположения.

- 1) Правите  $g_1$  и  $g_2$  се пресичат в единствена точка,  $M_0(x_0, y_0)$ ,  $M_0 = g_1 \cap g_2$ .
- 2) Правите  $g_1$  и  $g_2$  са успоредни но не се сливат,  $g_1 \parallel g_2$ ,  $g_1 \neq g_2$ .
- 3) Правите  $g_1$  и  $g_2$  се сливат,  $g_1 \equiv g_2$ .

Тези разположения можем да установим, разглеждайки уравненията на двете прави като система от две линейни уравнения с две неизвестни

$$a_1x + b_1y = -c_1$$

$$a_2x + b_2y = -c_2$$

с основна и разширена матрици

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \text{ и } \tilde{A} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & -c_1 \\ a_2 & b_2 & -c_2 \end{pmatrix}.$$

По условие за ранговете на тези матрици винаги е изпълнено  $1 \leq r(A) \leq r(\tilde{A}) \leq 2$ .

Първият случай е налице, когато системата е съвместима и определена – има единствено решение  $(x_0, y_0)$ , което задава координатите на единствената пресечна точка  $M_0(x_0, y_0)$ . Според теоремата на Кронекер-Капели, това означава, че  $r(A) = r(\tilde{A}) = 2$ , което е еквивалентно на  $r(A) = 2$ .

Вторият случай е налице, когато системата не е съвместима – няма решение. Според теоремата на Кронекер-Капели, това означава, че  $r(A) < r(\tilde{A})$ , което е възможно, само когато  $r(A) = 1$  и  $r(\tilde{A}) = 2$ .

Третият случай е налице, когато системата е съвместима и неопределена – има безбройно много решения. Според теоремата на Кронекер-Капели, това означава, че  $r(A) = r(\tilde{A}) = 1$ , което е еквивалентно на  $r(\tilde{A}) = 1$ . В този случай става дума за една и съща права, представена (евентуално) чрез две различни уравнения, едното от които се получава от другото след умножение с някакво различно от нула число.

**Пример 5.4.** Правите

$$g_1 : 2x - 3y + 1 = 0 \text{ и } g_2 : 4x - 6y + 3 = 0$$

са успоредни, понеже

$$r \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{bmatrix} = 1 \text{ и } r \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & -6 & 3 \end{bmatrix} = 2.$$

**Ъгъл между две прави.** Под ъгъл  $\varphi$  между двете прави  $g_1 : a_1x + b_1y + c_1 = 0$  и  $g_2 : a_2x + b_2y + c_2 = 0$  се разбира ъгълът между кои да е техни направляващи вектори. По този начин  $\varphi$  се явява ъгълът между техните нормални вектори  $\vec{N}_1(a_1, b_1)$  и  $\vec{N}_2(a_2, b_2)$ , следователно за ъгъла между правите  $g_1$  и  $g_2$  получаваме формулата

$$\cos \varphi = \frac{|\vec{N}_1 \vec{N}_2|}{|\vec{N}_1| |\vec{N}_2|} = \frac{|a_1 a_2 + b_1 b_2|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2} \sqrt{a_2^2 + b_2^2}}.$$

Това определение дава два ъгъла, които се допълват до  $\pi$ . Когато  $\varphi \neq \frac{\pi}{2}$ , единият от тях е остър, а другият е тъп. Ако правите не са перпендикулярни, то за **острия ъгъл** между тях имаме

$$\cos \varphi = \frac{|\vec{N}_1 \vec{N}_2|}{|\vec{N}_1| |\vec{N}_2|} = \frac{|a_1 a_2 + b_1 b_2|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2} \sqrt{a_2^2 + b_2^2}}, \left( 0 \leq \varphi < \frac{\pi}{2} \right).$$

**Пример 5.5.** Правите

$$g_1 : 2x + 3y - 1 = 0 \text{ и } g_2 : -3x + 2y - 2 = 0$$

са перпендикулярни, понеже

$$\cos \varphi = \frac{2 \cdot (-3) + 3 \cdot 2}{\sqrt{2^2 + 3^2} \sqrt{(-3)^2 + 2^2}} = 0.$$

Ъгълът между две прави може да бъде намерен и с помощта на техните ъглови коефициенти (рис. 5.5). Нека са дадени правите  $g_1$  и  $g_2$ , които сключват с координатната ос  $Ox$  съответно ъгли  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  и освен това сключват помежду си различен от прав ъгъл  $\varphi$ . Тогава

$$\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg}(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{\operatorname{tg} \alpha_2 - \operatorname{tg} \alpha_1}{1 + \operatorname{tg} \alpha_1 \operatorname{tg} \alpha_2},$$

откъдето за ъгъла между правите получаваме формулата

$$\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg}(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2},$$

където  $k_1$  и  $k_2$  са ъгловите коефициенти на  $g_1$  и  $g_2$ .

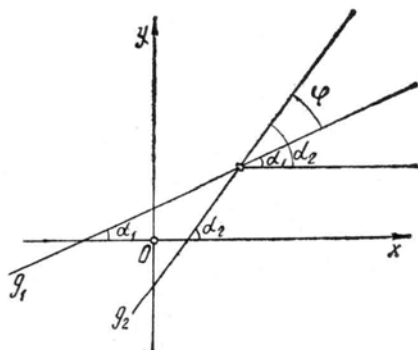


Рис. 5.5.

За да получим формула за **острия ъгъл** между правите, трябва да приложим последната формула по абсолютна стойност,

$$\operatorname{tg} \varphi = \left| \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} \right|.$$

От тук се вижда, че ако  $k_1 = k_2$ , то правите са успоредни, и ако  $k_1 k_2 + 1 = 0$ , то правите са перпендикулярни.

**Разстояние между точка и права.** Да разгледаме правата  $g$ , зададена чрез своето общо уравнение

$$g: ax + by + c = 0$$

и някаква точка от равнината  $M_0(x_0, y_0)$  (рис. 5.6).

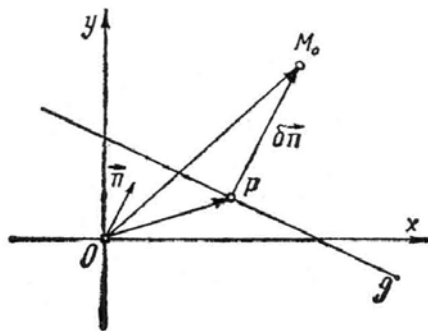


Рис. 5.6.

Тогава векторът  $\vec{N}(a, b)$  е нормален към правата, а векторът

$$\vec{n} = \frac{\vec{N}}{|\vec{N}|} = \left( \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)$$

е единичен нормален вектор към  $g$ . Нека  $P$  е ортогоналната проекция на точката  $M_0$  върху  $g$ . Търсим разстоянието  $d = d(g, M_0)$  между правата  $g$  и точката  $M_0$ . Очевидно  $d = |\overrightarrow{PM_0}|$ . Векторът  $\overrightarrow{PM_0}$  е успореден на  $\vec{n}$ , следователно  $\overrightarrow{PM_0} = \delta \vec{n}$ , за някое число  $\delta$ ,

а за търсеното разстояние получаваме

$$d = |\delta \vec{n}| = |\delta| |\vec{n}| = |\delta|.$$

От друга страна  $\overrightarrow{OM_0} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PM_0} = \overrightarrow{OP} + \delta \vec{n}$ , откъдето за координатите на точката  $P$ , които са същевременно и координати на нейния радиус вектор  $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OM_0} - \delta \vec{n}$  намираме

$$P \left( x_0 - \delta \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, y_0 - \delta \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right).$$

Числото  $\delta$  ще определим от условието, че точката  $P$  лежи върху правата  $g$ , което означава, че нейните координати удовлетворяват уравнението,

$$a \left( x_0 - \delta \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right) + b \left( y_0 - \delta \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right) + c = 0.$$

След преобразуване на последния израз получаваме

$$\delta = \frac{ax_0 + by_0 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

откъдето за търсеното разстояние намираме формулата

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

**Пример 5.6.** За разстоянието между правата  $g: 3x - 4y + 2 = 0$  и точката  $M_0(1,0)$  пресмятаме

$$d = \frac{|3 \cdot 1 - 4 \cdot 0 + 2|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 1.$$

**2. Уравнения на равнина в пространството.** Предполагаме зададена правоъгълна положително ориентирана координатна система  $Oxyz$  с ортонормирани базисни вектори  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ , с помощта на която ще представяме векторите и точките посредством техните координати.

Да разгледаме равнината  $\alpha$ , съдържаща точката  $M_0(x_0, y_0, z_0) \in \alpha$  и успоредна на двата неколинеарни вектора  $\vec{a}(a_1, a_2, a_3) \parallel \alpha$  и  $\vec{b}(b_1, b_2, b_3) \parallel \alpha$  (рис. 5.7).

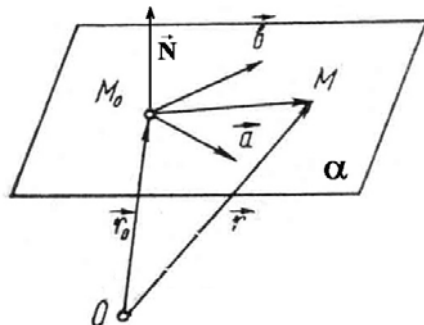


Рис. 5.7.

Тези данни определят по единствен начин равнината  $\alpha$ , за която ще потърсим координатно уравнение. Нека  $\vec{r}_0 = \overrightarrow{OM_0}$  и  $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$  са радиус векторите на дадената точка  $M_0$  и текущата точка  $M$ . Равнината  $\alpha$  се състои от точките  $M(x, y, z)$ , за които векторите  $\overrightarrow{M_0M} = \vec{r} - \vec{r}_0$ ,  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  са компланарни (лежат равнината  $\alpha$ ), което означава, че тяхното смесено произведение е равно на нула. По този начин за равнината  $\alpha$  получихме представянето  $\alpha: (\overrightarrow{MM_0}, \vec{a}, \vec{b}) = 0$ , което обосновава следното координатно уравнение за  $\alpha$



$$(5.3) \quad \alpha: \begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Ако означим с  $A$ ,  $B$  и  $C$  адюнгираните количества на първия ред на тази детерминанта, то уравнението (5.3) приема вида

$$(5.4) \quad \alpha: A(x-x_0) + B(y-y_0) + C(z-z_0) = 0.$$

Сега като положим  $D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$ , получаваме

$$\alpha: Ax + By + Cz + D = 0,$$

което се нарича **общо уравнение** на равнина в пространството. В това общо уравнение поне един от коефициентите  $A$ ,  $B$  или  $C$  е различен от нула, понеже тези адюнгирани количества представляват координатите на векторното произведение

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix},$$

което е различно от нулевия вектор, понеже по условие векторите  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  са линейно независими. Това условие ще предполагаме налице, винаги когато разглеждаме общо уравнение на равнина в пространството.

**Пример 5.7.** Да намерим общото уравнение на равнината  $\alpha$ , която съдържа точката  $M_0(1, -2, 3)$  и успоредна на векторите  $\vec{a}(1, 1, -1)$  и  $\vec{b}(-1, 0, 2)$ . Съгласно (5.3) това уравнение има вида

$$\alpha: \begin{vmatrix} x-1 & y+2 & z-3 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0,$$

откъдето намираме

$$\alpha: 2x - y + z - 7 = 0.$$

**Теорема 5.2.** Нека  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $D$  са числа такива, че  $|A| + |B| + |C| > 0$  (поне едно между  $A$ ,  $B$  и  $C$  е различно от нула). Тогава съвкупността от точки  $M(x, y, z)$  в пространството, чиито координати удовлетворяват равенството

$$(5.5) \quad Ax + By + Cz + D = 0,$$

образуват някаква равнина  $\alpha$ .

**Доказателство.** Ако разгледаме (5.5) като система от едно уравнение с три неизвестни, то тази система съгласно теоремата на Кронекер-Капели е съвместима и определена, следователно има безбройно много решения. По условие  $A \neq 0$  или  $B \neq 0$  или  $C \neq 0$ . За определеност да предположим, че  $A \neq 0$  (другите случаи се разглеждат аналогично), при което за простота можем да предположим  $A = 1$ . Тогава съгласно общата теорема за структурата на решенията на линейна система, решенията на (5.3) се записват във вида

$$(5.6) \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -D \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -B \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -C \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

където  $\lambda$  и  $\mu$  са произволни коефициенти. Да положим

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} -D \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -B \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ и } \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} -C \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Тогава векторите  $\vec{r}_1 = \vec{v}_1$ ,  $\vec{r}_2 = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$ ,  $\vec{r}_3 = \vec{v}_1 + \vec{v}_3$ , които се получават от (5.6) съответно при  $\lambda = \mu = 0$ ,  $\lambda = 1$  и  $\mu = 0$ ,  $\lambda = 0$  и  $\mu = 1$  са решения на системата (5.5), при което очевидно  $\vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \vec{v}_2$  и  $\vec{r}_3 - \vec{r}_1 = \vec{v}_3$  са линейно независими, понеже за техния ранг е изпълнено

$$r(\vec{r}_2, \vec{r}_3) = r \begin{pmatrix} -B & -C \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2.$$

Нека  $\vec{r}_1 = (x_1, y_1, z_1)$ ,  $\vec{r}_2 = (x_2, y_2, z_2)$  и  $\vec{r}_3 = (x_3, y_3, z_3)$ . Координатите на тези вектори удовлетворяват уравнението (5.6). Да разгледаме точките  $M_1(x_1, y_1, z_1)$ ,  $M_2(x_2, y_2, z_2)$  и  $M_3(x_3, y_3, z_3)$ . Тези три точки сигурно **не лежат върху една права**, понеже векторите  $\overrightarrow{M_1M_2} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$  и  $\overrightarrow{M_1M_3} = \vec{r}_3 - \vec{r}_1$  са линейно независими. Следователно  $M_1$ ,  $M_2$  и  $M_3$  определят по единствен начин някаква равнина  $\alpha$  (рис. 5.8).

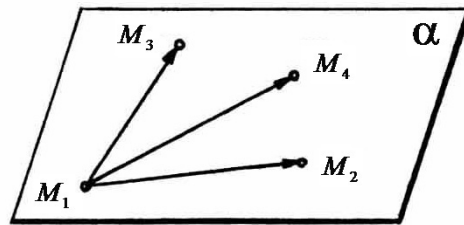


Рис. 5.8.

Остава да докажем, че всяка точка  $M_4(x_4, y_4, z_4)$ , чиито координати удовлетворяват уравнението (5.5), лежи в същата равнина  $\alpha$ . По условие имаме

$$Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0$$

$$Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D = 0$$

$$Ax_3 + By_3 + Cz_3 + D = 0$$

$$Ax_4 + By_4 + Cz_4 + D = 0$$

Ако извадим почленно първото равенство от другите три получаваме

$$(x_2 - x_1)A + (y_2 - y_1)B + (z_2 - z_1)C = 0$$

$$(x_3 - x_1)A + (y_3 - y_1)B + (z_3 - z_1)C = 0.$$

$$(x_4 - x_1)A + (y_4 - y_1)B + (z_4 - z_1)C = 0$$

Последното може да се разглежда като хомогенна система от три уравнения с три неизвестни  $A$ ,  $B$  и  $C$ , която по условие има ненулево решение. Съгласно общите свойства на хомогенните системи, последното е възможно единствено когато нейната детерминанта е равна на нула,

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & z_4 - z_1 \end{vmatrix} = 0,$$

което означава, че между редовете на детерминантата има линейна зависимост. От друга страна тези редове са точно координатите на векторите  $\overrightarrow{M_1M_2}$ ,  $\overrightarrow{M_1M_3}$  и  $\overrightarrow{M_1M_4}$ , което показва, че те са линейно зависими и следователно векторът  $\overrightarrow{M_1M_4}$  лежи в равнината  $\alpha$ . ■

Един ненулев вектор  $\vec{N}$  се нарича нормален към равнината  $\alpha$ , когато е перпендикулярен на  $\alpha$ ,  $\vec{N} \perp \alpha$ . Според това определение, векторът  $\vec{N}$  е нормален към  $\alpha$  когато е ортогонален на всеки вектор от равнината  $\alpha$ .

**Твърдение 5.1.** Векторът  $\vec{N}$  е нормален към равнината  $\alpha$  тогава и само тогава, когато е ортогонален на някои (кои да е) два линейно независими (неколинеарни) вектори  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  от тази равнина.

*Доказателство.* Нека вектори  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  лежат в равнината  $\alpha$  и са линейно независими, при което  $\vec{N} \perp \vec{a}$  и  $\vec{N} \perp \vec{b}$ . На езика на скалярното произведение последното означава  $\vec{N}\vec{a} = \vec{N}\vec{b} = 0$ . Да разгледаме кой да е вектор  $\vec{c}$  от тази равнина. По условие  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  са линейно независими, следователно образуват базис в  $\alpha$  и  $\vec{c}$  може да се изрази като линейна комбинация на  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ ,  $\vec{c} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b}$ . Тогава

$$\vec{N}\vec{c} = \vec{N}(\lambda\vec{a} + \mu\vec{b}) = \lambda\vec{N}\vec{a} + \mu\vec{N}\vec{b} = 0,$$

следователно  $\vec{N} \perp \vec{c}$ . Последното е валидно за всеки вектор от  $\alpha$ , което по определение означава, че  $\vec{N}$  е нормален към  $\alpha$ . Ако пък е известно, че  $\vec{N}$  е нормален към  $\alpha$ , то  $\vec{N}$  е ортогонален на всеки вектор от  $\alpha$ , в частност и на векторите  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ . ■

Нека е дадена равнина  $\alpha$  с общо уравнение  $\alpha: Ax + By + Cz + D = 0$ . **Тогава ненулеви вектор  $\vec{N}(A, B, C)$  е нормален към равнината  $\alpha$ .** Наистина, нека  $M_1(x_1, y_1, z_1)$ ,  $M_2(x_2, y_2, z_2)$  са някакви точки от  $\alpha$ , което означава, че

$$Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0$$

$$Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D = 0$$

Като извадим първото уравнение от второто получаваме равенството

$$A(x_2 - x_1) + B(y_2 - y_1) + C(z_2 - z_1) = 0,$$

което показва, че векторите  $\vec{N}(A, B, C)$  и  $\overrightarrow{M_1M_2}(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$  са ортогонални, следователно така определеният вектор  $\vec{N}$  е ортогонален на всеки вектор с начало и край върху равнината, което доказва твърдението.

Една равнина  $\alpha$  напълно се определя по дадена точка  $M_0(x_0, y_0, z_0) \in \alpha$  и даден нормален вектор  $\vec{N}(A, B, C) \perp \alpha$ ,  $\vec{N} \neq \vec{0}$  (рис. 5.9).

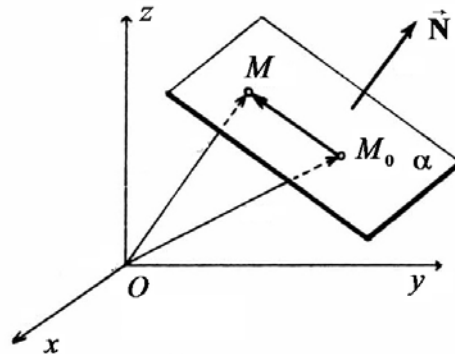


Рис. 5.9.

Нека  $\vec{r}_0(x_0, y_0, z_0)$  и  $\vec{r}(x, y, z)$  са радиус векторите на дадената точка  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  и текущата точка от равнината  $M(x, y, z)$ . Равнината  $\alpha$  се състои от точките  $M(x, y, z)$ , за които  $\vec{r} - \vec{r}_0 = \overline{M_0M} \perp \vec{N}$ , което означава, че скаларното произведение на векторите  $\vec{r} - \vec{r}_0$  и  $\vec{N}$  е равно на нула. Следователно точките от  $\alpha$  се описват от съотношението  $\alpha: (\vec{r} - \vec{r}_0) \cdot \vec{N} = 0$ , което в координатна форма има вида

$$(5.7) \quad \alpha: A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0,$$

и се нарича **уравнение на равнина през дадена точка и известен нормален вектор**.

**Пример 5.8.** Уравнението на равнината  $\alpha$ , която съдържа точката  $M_0(2, -1, 3)$  и има нормален вектор  $\vec{N}(2, 1, 1)$  има вида

$$\alpha: 2(x - 2) + 1(y + 1) + 1(z - 3) = 0.$$

Уравнението (5.7) предлага алтернативен начин за решаване на задачата за намиране уравнение на равнина през дадена  $M_0(x_0, y_0, z_0) \in \alpha$  и съдържаща два линейно независими вектора  $\vec{a}(a_1, a_2, a_3) \parallel \alpha$  и  $\vec{b}(b_1, b_2, b_3) \parallel \alpha$ . В този случай, съгласно твърдение 5.1, векторът  $\vec{N} = \vec{a} \times \vec{b}$  е нормален към равнината  $\alpha$ , следователно поставената задача може да бъде решена посредством уравнението (5.7). Между записа на уравненията (5.4) и (5.7) няма формална разлика, понеже при уравнението (5.4) коефициентите  $A$ ,  $B$  и  $C$  се оказаха координатите на вектора  $\vec{a} \times \vec{b}$ , които се явяват и координати на вектора  $\vec{N}$  при уравнението (5.7).

От друга страна, както вече споменахме при извода на уравнението (5.3), равнината  $\alpha$  може да бъде характеризирана като съвкупността от точки в пространството, за които векторите  $\overline{M_0M} = \vec{r} - \vec{r}_0$ ,  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  са линейно зависими, което означава, че  $\vec{r} - \vec{r}_0$  може да се запише като линейна комбинация на векторите  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ , понеже те образуват базис в  $\alpha$ . По този начин за  $\alpha$  намерихме представянето  $\alpha: \vec{r} - \vec{r}_0 = \lambda \vec{a} + \mu \vec{b}$ , което записваме във вида

$$(5.8) \quad \alpha: \vec{r} = \vec{r}_0 + \lambda \vec{a} + \mu \vec{b},$$

където параметрите  $\lambda$  и  $\mu$  могат да приемат произволни константи. Последното се нарича **векторно параметрично уравнение** на равнина в пространството. За разлика от параметричното уравнение на права, което съдържа само един параметър, (5.8) съдържа два параметъра, понеже геометричната размерност на равнината е равна на 2.

Записвайки (5.8) в координатен вид, получаваме

$$\alpha: \begin{cases} x = x_0 + \lambda a_1 + \mu b_1 \\ y = y_0 + \lambda a_2 + \mu b_2 \\ z = z_0 + \lambda a_3 + \mu b_3 \end{cases}$$

което се нарича **скаларно параметрично уравнение** на равнина в пространството.

**Уравнение на равнина през три точки.** Да разгледаме три точки в пространството  $M_1(x_1, y_1, z_1)$ ,  $M_2(x_2, y_2, z_2)$  и  $M_3(x_3, y_3, z_3)$ , които не лежат върху една права. Тогава те определят единствена равнина  $\alpha$ . Ако положим

$$\vec{a} = \overline{M_1M_2}(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1) \text{ и } \vec{b} = \overline{M_1M_3}(x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1),$$

то координатното уравнение на  $\alpha$  може да се намери по формулата (5.3)

$$\alpha : \begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Тази равнина има нормален вектор

$$\vec{N} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}.$$

**Пример 5.9.** Общото уравнение на равнината  $\alpha$  през трите точки  $M_1(1,2,3)$ ,  $M_2(3,4,5)$  и  $M_3(3,2,1)$  има вида

$$\alpha : \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ 3-1 & 4-2 & 5-3 \\ 3-1 & 2-2 & 1-3 \end{vmatrix} = -4x + 8y - 4z = 0.$$

Преминването от един вид уравнение към друг ще покажем върху пример. Нека равнината  $\alpha$  е зададена чрез своето общо уравнение  $\alpha : x - 3y + 2z - 5 = 0$ . Тогава, разсъждавайки както при доказателството на теорема 5.2 (разглеждайки общото уравнение на равнината като система от едно линейно уравнение с три неизвестни), за точките от равнината получаваме следното представяне

$$(5.9) \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

от което веднага получаваме, че точката  $M_0(-5,0,0)$  лежи в равнината  $\alpha$ , а векторите  $\vec{a}(3,1,0)$  и  $\vec{b}(-2,0,1)$  са успоредни на  $\alpha$ . Векторното равенство (5.9) е всъщност параметричното уравнение на  $\alpha$ , понеже може да бъде преписано във вида

$$\alpha : \begin{cases} x = 5 + 3\lambda - 2\mu \\ y = \lambda \\ z = \mu \end{cases}.$$

**Пример 5.10.** Нека равнината  $\alpha$  е зададена посредством параметричното уравнение

$$\alpha : \begin{cases} x = 1 + 2\lambda + 5\mu \\ y = -2 - \lambda + 2\mu \\ z = 3 + 5\lambda - 2\mu \end{cases}.$$

Тогава точката  $M_0(1,-2,3)$  лежи в  $\alpha$ , а векторите  $\vec{a}(2,-1,5)$  и  $\vec{b}(5,2,-2)$  са успоредни на  $\alpha$ , следователно векторът

$$\vec{N} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 5 \\ 5 & 2 & -2 \end{vmatrix} = -7\vec{i} + 29\vec{j} + 9\vec{k}$$

е нормален към  $\alpha$ . Сега общото уравнение на  $\alpha$  може да бъде намерено по два (еквивалентни) начина. По формулата (5.7) имаме

$$\alpha : -7(x-1) + 29(x+2) + 9(z-3) = 0.$$

**Взаимно разположение на две равнини.** Нека са дадени двете равнини  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  чрез своите общи уравнения  
 (5.10)  $\alpha_1: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$  и  $\alpha_2: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ ,  
 където  $|A_1| + |B_1| + |C_1| > 0$  и  $|A_2| + |B_2| + |C_2| > 0$ . Различаваме следните три основни взаимни разположения.

- 1) Равнините  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  се пресичат в една права  $g$ ,  $g = \alpha_1 \cap \alpha_2$ .
- 2) Равнините  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  са успоредни но не се сливат,  $\alpha_1 \parallel \alpha_2$ ,  $\alpha_1 \neq \alpha_2$ .
- 3) Равнините  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  се сливат,  $\alpha_1 \equiv \alpha_2$ .

Тези разположения можем да установим, разглеждайки уравненията на двете равнини като система от две линейни уравнения с три неизвестни

$$A_1x + B_1y + C_1z = -D_1$$

$$A_2x + B_2y + C_2z = -D_2$$

с основна и разширена матрици

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix} \text{ и } \tilde{A} = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & -D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & -D_2 \end{pmatrix}.$$

По условие за ранговете на тези матрици винаги е изпълнено  $1 \leq r(A) \leq r(\tilde{A}) \leq 2$ .

Вторият случай е налице, когато системата не е съвместима – няма решение. Според теоремата на Кронекер-Капели, това означава, че  $r(A) < r(\tilde{A})$ , което е възможно, само когато  $r(A) = 1$  и  $r(\tilde{A}) = 2$ .

При първия и третия случай системата е съвместима, което означава  $r(A) = r(\tilde{A}) = 2$  или  $r(A) = r(\tilde{A}) = 1$

Нека е налице равенството  $r(A) = r(\tilde{A}) = 1$ , което е еквивалентно на  $r(\tilde{A}) = 1$ . Тогава, съгласно теоремата за базисния минор, всеки от редовете на разширената матрица  $\tilde{A}$  се получава от другия след умножение с някакво различно от нула число, следователно уравненията на  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  задават едно и също множество в пространството, което съответства на третия случай на сливащи се равнини.

Поради липса на друга възможност, за първия случай на равнини пресичащи се в една права остава случая  $r(A) = r(\tilde{A}) = 2$ .

Взаимното разположение на двете равнини  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  може да бъде характеризирано и с помощта на техните нормални вектори  $\vec{N}_1(A_1, B_1, C_1)$  и  $\vec{N}_2(A_2, B_2, C_2)$ , понеже две равнини са успоредни (колинеарни, линейно зависими) тогава и само тогава, когато са успоредни техните нормални вектори, а двата вектора  $\vec{N}_1$  и  $\vec{N}_2$  са успоредни тогава и само тогава, когато  $\vec{N}_1 \times \vec{N}_2 = \vec{0}$ .

По този начин доказахме следното

**Твърдение 5.2.** Нека са дадени двете равнини  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  чрез своите общи уравнения (5.10). Тогава

- 1) Равнините  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  се пресичат в една права тогава и само тогава, когато  $r(A) = 2$ , което е еквивалентно на  $\vec{N}_1 \times \vec{N}_2 \neq \vec{0}$ .
- 2) Равнините  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  са успоредни но не се сливат тогава и само тогава, когато  $r(A) = 1$  и  $r(\tilde{A}) = 2$ . Последното е налице, точно когато  $\vec{N}_1 \times \vec{N}_2 = \vec{0}$  и всяка точка от едната равнина не лежи върху другата равнина.

3) Равнините  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  са успоредни но не се сливат тогава и само тогава, когато  $r(\vec{A})=1$ . Последното е налице, точно когато  $\vec{N}_1 \times \vec{N}_2 = \vec{0}$  и всяка точка от едната равнина лежи върху другата равнина. ■

Една примерна точка  $M_\alpha$ , която лежи в равнината  $\alpha: Ax + By + Cz + D = 0$  има координати

$$M_\alpha \left( \frac{-AD}{A^2 + B^2 + C^2}, \frac{-BD}{A^2 + B^2 + C^2}, \frac{-CD}{A^2 + B^2 + C^2} \right).$$

Тази точка се явява проекцията на началото на координатната система върху равнината.

**Пример 5.11.** Равнините

$$\alpha_1: 2x - 3y + z + 1 = 0 \text{ и } \alpha_2: 3x - 2y - 5z + 3 = 0$$

се пресичат в една права, понеже за ранга на основната матрица имаме

$$r \left[ \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & -2 & 5 \end{pmatrix} \right] = 2$$

и разбира се

$$\vec{N}_1 \times \vec{N}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -2 & -5 \end{vmatrix} = 17\vec{i} + 13\vec{j} + 5\vec{k} \neq \vec{0}.$$

**Ъгъл между две равнини.** Ъгълът между двете равнини (5.10) се определя като ъгълът  $\varphi$ , който сключват кои да е два нормални вектора, например  $\vec{N}_1(A_1, B_1, C_1)$  и  $\vec{N}_2(A_2, B_2, C_2)$ , следователно за ъгъла  $\varphi$  между равнините  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  е в сила формулата

$$\cos \varphi = \frac{|\vec{N}_1 \cdot \vec{N}_2|}{|\vec{N}_1| |\vec{N}_2|} = \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

Това определение дава два ъгъла, които се допълват до  $\pi$ . Когато  $\varphi \neq \frac{\pi}{2}$ , единият от тях е остър, а другият е тъп.

**Пример 5.12.** За ъгъла между равнините

$$\alpha_1: x + 2y + 3z - 5 = 0 \text{ и } \alpha_2: 3x - y + 2z + 1 = 0$$

намираме

$$\cos \varphi = \frac{1 \cdot 3 + 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 2}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} \sqrt{3^2 + (-1)^2 + 2^2}} = \frac{1}{2},$$

следователно в този пример равнините  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  сключват **остър ъгъл**  $\varphi = \frac{\pi}{3}$ .

**Разстояние между точка и равнина.** Да разгледаме равнината  $\alpha$ , зададена чрез своето общо уравнение  $\alpha: Ax + By + Cz + D = 0$  и някаква точка от пространството  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  (рис. 5.10). През точката  $M_0$  да прекараме права  $g$  до пресичане с равнината  $\alpha$  в точката  $M_1(x_1, y_1, z_1)$ .

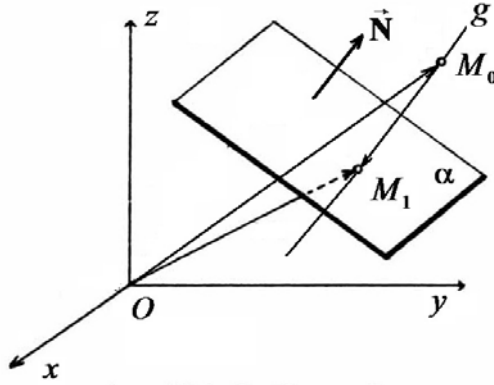


Рис. 5.10.

Тогава векторът  $\vec{N}(A, B, C)$  е нормален към равнината, а векторът

$$\vec{n} = \frac{\vec{N}}{|\vec{N}|} = \left( \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \right)$$

е **единичен нормален вектор** към  $\alpha$ . Точката  $M_1$  се явява ортогоналната проекция на  $M_0$  върху равнината  $\alpha$ . Търсим разстоянието  $d = d(\alpha, M_0)$  между равнината  $\alpha$  и точката  $M_0$ . Очевидно  $d = |\overrightarrow{M_0M_1}|$ . Векторът  $\overrightarrow{M_0M_1}$  е успореден на  $\vec{n}$ , следователно  $\overrightarrow{M_0M_1} = \delta \vec{n}$ , за някое число  $\delta$ , а за търсеното разстояние получаваме

$$d = |\delta \vec{n}| = |\delta| |\vec{n}| = |\delta|.$$

От друга страна  $\overrightarrow{OM_1} = \overrightarrow{OM_0} + \overrightarrow{M_0M_1} = \overrightarrow{OM_0} + \delta \vec{n}$ , откъдето за координатите на точката  $M_1$ , които са същевременно и координати на нейния радиус вектор  $\overrightarrow{OM_1} = \overrightarrow{OM_0} + \delta \vec{n}$  намираме

$$M_1 \left( x_0 + \delta \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, y_0 + \delta \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, z_0 + \delta \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \right).$$

Числото  $\delta$  ще определим от условието, че точката  $M_1$  лежи върху равнината  $\alpha$ , което означава, че нейните координати удовлетворяват уравнението,

$$A \left( x_0 + \delta \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \right) + B \left( x_0 + \delta \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \right) + C \left( x_0 + \delta \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \right) + D = 0$$

След преобразуване на последния израз получаваме

$$\delta = \frac{Ax_0 + Bx_0 + Cz_0}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

откъдето за търсеното разстояние намираме формулата

$$d = \frac{|Ax_0 + Bx_0 + Cz_0|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

**Пример 5.13.** За разстоянието между равнината  $\alpha: 2x + y - 2z + 5 = 0$  и точката  $M_0(2, 1, -4)$  пресмятаме



$$d = \frac{|3 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + (-2)(-4) + 5|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-2)^2}} = 6.$$

**3. Уравнения на права в пространството.** Предполагаме зададена правоъгълна положително ориентирана координатна система  $Oxyz$  при ортонормирани базисни вектори  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ , с помощта на която ще представяме векторите и точките посредством техните координати.

Да разгледаме правата  $g$ , определена от точката  $M_0(x_0, y_0, z_0)$ , която лежи върху  $g$ ,  $M_0 \in g$ , и даден направляващ вектор  $\vec{a}(a_1, a_2, a_3) \neq \vec{0}$ ,  $\vec{a} \parallel g$  (рис. 5.11).

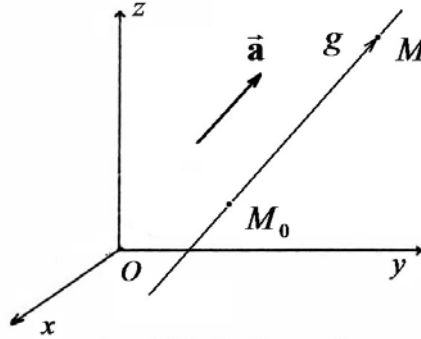


Рис. 5.11.

Правата  $g$  се състои от точките  $M$ , за които векторът  $\overline{M_0M}$  е успореден на  $\vec{a}$ , следователно  $g$  се характеризира чрез равенството  $\overline{M_0M} = \lambda \vec{a}$ , което можем да запишем като  $\vec{r} - \vec{r}_0 = \lambda \vec{a}$ , където  $\vec{r}$  и  $\vec{r}_0$  са радиус векторите на текущата точка  $M(x, y, z)$  и дадената точка  $M_0$ . По този начин получихме **векторно параметричното уравнение** на правата  $g$ ,

$$g: \vec{r} = \vec{r}_0 + \lambda \vec{a}.$$

Последното в координатна форма има вида

$$g: \begin{cases} x = x_0 + \lambda a_1 \\ y = y_0 + \lambda a_2 \\ z = z_0 + \lambda a_3 \end{cases}$$

което се нарича **скалярно параметрично уравнение** на правата  $g$ .

**Пример 5.14.** Правата  $g$  през точката  $M_0(1, 2, 3)$  с направляващ вектор  $\vec{a}(2, -1, 1)$  има уравнение

$$(5.11) \quad g: \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 2 - \lambda \\ z = 3 + \lambda \end{cases},$$

където  $\lambda$  е параметър, който може да приема произволни стойности. Сега като изключим параметъра  $\lambda$  от уравненията на (5.11), за правата  $g$  получаваме следното представяне

$$g: \frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2} = \frac{z - z_0}{a_3},$$

което се нарича **канонично уравнение** на правата. И тук, както при каноничното уравнение на права в равнината, някои от числата  $a_1, a_2$  или  $a_3$  може да бъде нула, но

не и трите едновременно, понеже представляват координатите на ненулевия направляващ вектор  $\vec{a}$ .

**Пример 5.15.** Нека правата  $g$  е зададена чрез своето канонично уравнение

$$g: \frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{-1}.$$

От последния запис веднага заключаваме, че точката  $M_0(-1,2,3)$  лежи върху правата  $g$  и векторът  $\vec{a}(2,3,-1)$  е направляващ за  $g$ , следователно правата  $g$  има следното параметрично уравнение

$$g: \begin{cases} x = -1 + 2\lambda \\ y = 2 + 3\lambda \\ z = 3 - \lambda \end{cases}.$$

Нека правата  $g$  е определена като **пресечница** на двете пресичащи се равнини

$$\alpha_1: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \text{ и } \alpha_2: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$$

Да разгледаме общите уравнения на  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  заедно като система от две линейни уравнения с три неизвестни  $x$ ,  $y$  и  $z$

$$(5.12) \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z = -D_1 \\ A_2x + B_2y + C_2z = -D_2 \end{cases}.$$

По условие равнините  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  се пресичат, което означава, че техните нормални вектори  $\vec{N}_1(A_1, B_1, C_1)$  и  $\vec{N}_2(A_2, B_2, C_2)$  не са успоредни и следователно техният ранг е равен на 2,  $r(\vec{N}_1, \vec{N}_2) = 2$  и съответно за ранга на основната матрица на (5.12) намираме

$$r \left[ \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix} \right] = r(\vec{N}_1, \vec{N}_2) = 2.$$

Последният факт показва, че системата (5.12) е съвместима и неопределена, при което има точно едно свободно неизвестно. Поне един от минорите

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}$$

е различен от нула, например нека

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Тогава системата (5.12) може да се преобразува по метода на Гаус-Жордан с базисни неизвестни  $x$  и  $y$  и свободно неизвестно  $z$ , при което ще приеме вида

$$\begin{cases} x + C'_1z = D'_1 \\ y + C'_2z = D'_2 \end{cases},$$

която има общо решение

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D'_1 \\ D'_2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -C'_1 \\ -C'_2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

от което веднага получаваме параметричното уравнение на пресечната права  $g$ .

От друга страна пресечницата  $g = \alpha_1 \cap \alpha_2$  лежи едновременно в двете равнини и следователно е перпендикулярна едновременно на двата нормални вектора  $\vec{N}_1$  и  $\vec{N}_2$ ,

откъдето веднага следва, че векторът  $\vec{a} = \vec{N}_1 \times \vec{N}_2$  се явява направляващ за  $g$ . Сега за да намерим уравнение за правата  $g$  е достатъчно да имаме на разположение една (коя да е) точка от нея, което означава да намерим някакво (кое да е) частно решение на линейната система (5.12).

**Пример 5.16.** Да намерим уравнение за правата  $g$ , получена от пресичането на равнините  $\alpha_1: x + y + 2z - 1 = 0$  и  $\alpha_2: 2x - y + 3z - 5 = 0$ . Тази права има направляващ вектор

$$\vec{a} = \vec{N}_1 \times \vec{N}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 5\vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k}.$$

За да намерим една точка от правата, търсим едно решение на системата

$$\begin{cases} x + y + 2z = 1 \\ 2x - y + 3z = 5 \end{cases}$$

Като положим  $z = 0$ , получаваме  $x = 2$  и  $y = -1$ , следователно точката  $M_0(2, -1, 0)$  лежи върху правата  $g$ , за която намираме следното канонично уравнение

$$g: \frac{x-2}{5} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{-3}$$

и съответно следното параметрично уравнение

$$g: \begin{cases} x = 2 + 5\lambda \\ y = -1 + \lambda \\ z = -3\lambda \end{cases}$$

Нека  $M_1(x_1, y_1, z_1)$  и  $M_2(x_2, y_2, z_2)$  са две различни точки от пространството. Тогава съществува единствена права  $g$ , която минава и през двете точки. Тази права има направляващ вектор  $\vec{a} = \overrightarrow{M_1M_2}(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$ , следователно правата  $g$  има уравнение

$$g: \frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1},$$

което се нарича **канонично уравнение** на права в пространството през две дадени точки.

**Пример 5.17.** Правата  $g$  минаваща през точките  $M_1(1, 2, 3)$  и  $M_2(3, 1, -2)$  има уравнение

$$g: \frac{x-1}{-2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{5}.$$

**Взаимно разположение на права и равнина.** Да разгледаме правата

$$(5.13) \quad g: \frac{x-x_0}{a_1} = \frac{y-y_0}{a_2} = \frac{z-z_0}{a_3}$$

с дадена точка от нея  $M_0(x_0, y_0, z_0) \in g$  и даден направляващ вектор  $\vec{a}(a_1, a_2, a_3) \neq \vec{0}$  и равнината  $\alpha$

$$(5.14) \quad \alpha: Ax + By + Cz + D = 0$$

с нормален вектор  $\vec{N}(A, B, C) \neq \vec{0}$ . Различаваме следните три основни взаимни разположения.

1) Правата  $g$  пробжда равнината  $\alpha$  в една точка  $M_1(x_1, y_1, z_1) = g \cap \alpha$ .

2) Правата  $g$  е успоредна на равнината  $\alpha$  и не лежи в нея,  $g \parallel \alpha$ ,  $g \notin \alpha$ .

3) Правата  $g$  лежи в равнината  $\alpha$ ,  $g \in \alpha$ .

Първият случай е налице, когато векторите  $\vec{a}$  и  $\vec{N}$  не сключват прав ъгъл, т.е. когато  $\vec{a}\vec{N} = a_1A + a_2B + a_3C \neq 0$ . Пресечната точка  $M_1(x_1, y_1, z_1)$  лежи върху  $g$ , следователно за нейните координати имаме

$$\begin{cases} x_1 = x_0 + \tau a_1 \\ y_1 = y_0 + \tau a_2 \\ z_1 = y_0 + \tau a_3 \end{cases}$$

при някоя конкретна стойност на параметъра  $\tau$ . За да намерим тази стойност заместваем координатите на  $M_1$  в уравнението на равнината  $\alpha$  и получаваме

$$\tau(a_1A + a_2B + a_3C) + (Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D) = 0$$

или по друг начин

$$(5.15) \quad \tau(\vec{a}\vec{N}) + (Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D) = 0,$$

което винаги има единствено решение, понеже коефициентът пред  $\tau$  в този случай сигурно е различен от нула.

Уравнението, което представлява частен случай на система от едно линейно уравнение с едно неизвестно  $\tau$ , (5.15) определя всичките общи точки между правата  $g$  и равнината  $\alpha$ , следователно тяхното взаимно разположение изцяло зависи от вида на (5.15). Когато това уравнение има единствено решение (съвместима и определена система), то правата пробоща равнината.

Ако (5.15) няма решения (несъвместима система), то правата и равнината са успоредни, което е вторият случай. Това е налице, когато  $\vec{a}\vec{N} = a_1A + a_2B + a_3C = 0$ , т.е. когато векторите  $\vec{a}$  и  $\vec{N}$  са ортогонални, но другият коефициент е различен от нула,  $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \neq 0$ .

Последната възможност за (5.15) е да има безбройно много решения (съвместима и неопределена система), което определя третия случай, когато правата лежи в равнината. Това е налице, когато  $\vec{a}\vec{N} = a_1A + a_2B + a_3C = 0$  и другият коефициент е равен на нула,  $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$ .

**Пример 5.18.** Да определим взаимното разположение на правата

$$g: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z}{-1}$$

и равнината  $\alpha: x + y - 2z - 3 = 0$ . Тук  $M_0(1, 2, 0)$  е точка от  $g$ , а векторът  $\vec{a}(1, -2, -1)$  е направляващ за  $g$ . Равнината  $\alpha$  има нормален вектор  $\vec{N}(1, 1, -2)$ . За да определим взаимното разположение на  $g$  и  $\alpha$  съставяме уравнението (5.15), което в дадения конкретен случай има вида  $\tau + 3 = 0$ , което има единственото решение  $\tau = -3$  и следователно правата пробоща равнината. За да намерим координатите на прободната точка  $M_1(x_1, y_1, z_1)$ , в параметричното уравнение на  $g$

$$\begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 2 - 2\lambda \\ z = -\lambda \end{cases}$$

заместваем параметъра  $\lambda$  със стойността  $\lambda = \tau = -3$ , при която стойност се получава точката  $M_1$  и намираме, че  $M_1$  има координати  $M_1(2, 0, -1)$ .

**Ъгъл**  $\varphi$  между правата  $g$ , зададена с каноничното уравнение (5.13) и равнината  $\alpha$ , зададена с общото уравнение (5.14), когато  $g$  не е перпендикулярна на  $\alpha$ , се нарича ъгълът между правата  $g$  и нейната ортогонална проекция в равнината (рис. 5.12).

Когато  $g \perp \alpha$ , по определение  $\varphi = \frac{\pi}{2}$  (в този случай ортогоналната проекция на  $g$  върху  $\alpha$  се свежда до прободната точка на  $g$  с  $\alpha$ ).

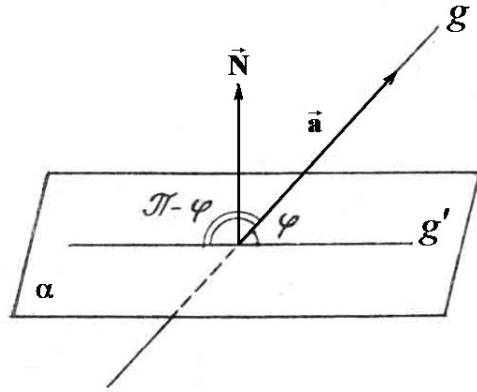


Рис. 5.12.

Горното определение задава два ъгъла, които се допълват до  $\pi$ . Нека  $\psi$  е ъгълът между направляващият вектор  $\vec{a}$  и нормалният вектор  $\vec{N}$ . Тогава при всяко взаимно разположение на  $\vec{a}$  и  $\vec{N}$  е изпълнено  $\sin \varphi = |\cos \psi|$ , следователно за ъгъла  $\varphi$  между правата  $g$  и равнината  $\alpha$  имаме

$$\sin \varphi = \frac{|a_1 A + a_2 B + a_3 C|}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

**Разстояние от точка до права.** Да разгледаме правата  $g$  през точката  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  с направляващ вектор  $\vec{a}(a_1, a_2, a_3) \neq \vec{0}$ , която има канонично уравнение

$$g: \frac{x-x_0}{a_1} = \frac{y-y_0}{a_2} = \frac{z-z_0}{a_3}$$

и нека  $M_1(x_1, y_1, z_1)$  е дадена точка от пространството. Под **перпендикуляр**, спуснат от точката  $M_1$  към правата  $g$  се разбира правата  $g'$ , която минава през  $M_1$  и пресича дадената права  $g$  под прав ъгъл в някаква точка  $M_2(x_2, y_2, z_2)$  (рис. 5.13).

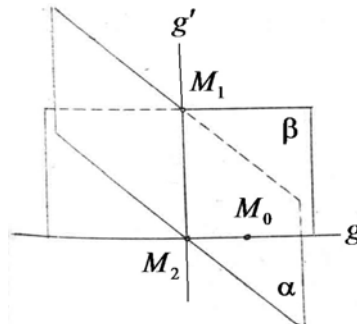


Рис. 5.13.

Нека  $\alpha$  е равнината през точката  $M_1$  и перпендикулярна на правата  $g$ . Тази равнина има нормален вектор  $\vec{N} = \vec{a}$ , следователно има уравнение

$$\alpha: a_1(x-x_1)+a_2(y-y_1)+a_3(z-z_1)=0.$$

Нека  $\beta$  е равнина през точката  $M_1$ , която съдържа правата  $g$ . За тази равнина познаваме два успоредни вектора  $\vec{a}$  и  $\vec{b} = \overrightarrow{M_0M_1}(x_1-x_0, y_1-y_0, z_1-z_0)$ , следователно за нейното уравнение имаме

$$\beta: \begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Правата  $g'$ , която минава през точката  $M_1$  и е перпендикулярна на дадената права  $g$  се получава от пресичането на равнините  $\alpha$  и  $\beta$ ,  $g' = \alpha \cap \beta$ .

Дължината на отсечката  $d = M_1M_2$  се нарича **разстояние** от точката  $M_1$  до правата  $g$ . За да намерим това разстояние да разгледаме успоредника, построен върху векторите  $\vec{a}$  и  $\overrightarrow{M_0M_1}$  (рис. 5.14).

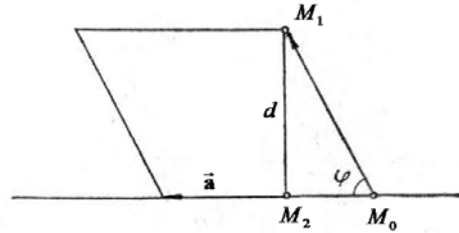


Рис. 5.14.

За неговото лице  $S$  имаме на разположение два израза

$$S = \left| \overrightarrow{M_0M_1} \times \vec{a} \right| = |\vec{a}|d,$$

откъдето за търсеното разстояние намираме формулата

$$d = \frac{\left| \overrightarrow{M_0M_1} \times \vec{a} \right|}{|\vec{a}|} = \frac{\sqrt{\begin{vmatrix} y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ a_2 & a_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z_1-z_0 & x_1-x_0 \\ a_3 & a_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1-x_0 & y_1-y_0 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix}^2}}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}.$$

**Пример 5.19.** да намерим разстоянието между правата

$$g: \frac{x-3}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+2}{1}$$

и точката  $M_1(-1,4,3)$ . Имаме  $\overrightarrow{M_0M_1} = (-4,3,5)$ . Пресмятаме

$$\overrightarrow{M_0M_1} \times \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -4 & 3 & 5 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 8\vec{i} + 14\vec{j} - 2\vec{k},$$

откъдето намираме

$$d = \frac{\left| \overrightarrow{M_0M_1} \times \vec{a} \right|}{|\vec{a}|} = \frac{\sqrt{8^2 + 14^2 + (-2)^2}}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 1^2}} = 2\sqrt{11}.$$

**Взаимно разположение на две прави в пространството.** Да разгледаме правите  $g_1$  и  $g_2$ , дадени чрез своите канонични уравнения

$$g_1: \frac{x-x_1}{a_1} = \frac{y-y_1}{a_2} = \frac{z-z_1}{a_3}, M_1(x_1, y_1, z_1) \in g_1, \vec{a}(a_1, a_2, a_3) \parallel g_1,$$

$$g_2: \frac{x-x_2}{b_1} = \frac{y-y_2}{b_2} = \frac{z-z_2}{b_3}, M_2(x_2, y_2, z_2) \in g_2, \vec{b}(b_1, b_2, b_3) \parallel g_2.$$

Да разгледаме вектора  $\overrightarrow{M_1M_2}(x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1)$  (рис. 5.15)

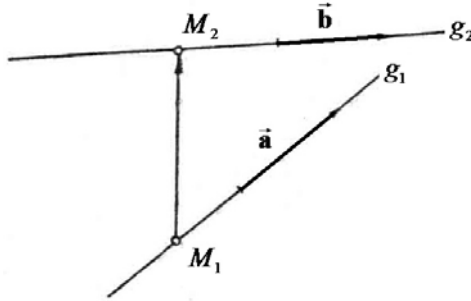


Рис. 5.15.

и да образуваме смесеното произведение

$$\Delta = (\overrightarrow{M_1M_2}, \vec{a}, \vec{b}) = \begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}.$$

Очевидно правите  $g_1$  и  $g_2$  лежат в една равнина тогава и само тогава, когато  $\Delta = 0$ .

Освен това  $g_1$  и  $g_2$  са успоредни тогава и само тогава, когато  $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$ .

Различаваме следните основни взаимни разположения на правите  $g_1$  и  $g_2$ .

1) Правите  $g_1$  и  $g_2$  са **кръстосани**, което означава, че те **не лежат в една равнина**.

Това е случаят, когато векторите  $\overrightarrow{M_1M_2}$ ,  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  не лежат в една равнина, т.е. когато тяхното смесено произведение е различно от нула,  $\Delta \neq 0$ .

2) Правите  $g_1$  и  $g_2$  лежат в една равнина  $\alpha$ , където се пресичат в една точка. Това съответства на случая, когато  $\Delta = 0$  (лежат в една равнина) и  $\vec{a} \times \vec{b} \neq \vec{0}$  (правите не са успоредни).

3) Правите  $g_1$  и  $g_2$  лежат в една равнина  $\alpha$ , където са успоредни и не се сливат. Това съответства на случая, когато  $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$  (правите  $g_1$  и  $g_2$  са успоредни, при което по необходимост имаме  $\Delta = 0$ , понеже в този случай детерминантата съдържа два пропорционални реда) и точката  $M_1$  не принадлежи на правата  $g_2$ , както и точката  $M_2$  не принадлежи на правата  $g_1$  (правите не се сливат).

4) Правите  $g_1$  и  $g_2$  се сливат. Това съответства на случая, когато  $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$ , при което точката  $M_1$  принадлежи на правата  $g_2$ , както и точката  $M_2$  принадлежи на правата  $g_1$ .

От изброените случаи най-голям интерес представлява случаят, когато правите  $g_1$  и  $g_2$  са кръстосани, понеже се явява типичен за взаимното разположение на две прави в пространството.

**Пример 5.20.** Да определим взаимното разположение на двете прави

$$g_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-1}{3} \text{ и } g_2: \frac{x-3}{-1} = \frac{y-2}{5} = \frac{z+2}{1}.$$

Тук имаме  $M_1(1, -1, 1) \in g_1$ ,  $\vec{a}(2, 1, 3) \parallel g_1$  и  $M_2(3, 2, -2) \in g_2$ ,  $\vec{b}(-1, 5, 1) \parallel g_2$ . Пресмятаме

$$\Delta = (\overrightarrow{M_1 M_2}, \vec{a}, \vec{b}) = \begin{vmatrix} 3-1 & 2+1 & -2-1 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 5 & 1 \end{vmatrix} = -76 \neq 0,$$

следователно двете прави са кръстосани.

**Ос на две кръстосани прави.** За всеки две кръстосани прави  $g_1$  и  $g_2$  съществува единствена трета права  $g$ , която ги пресича под прав ъгъл.

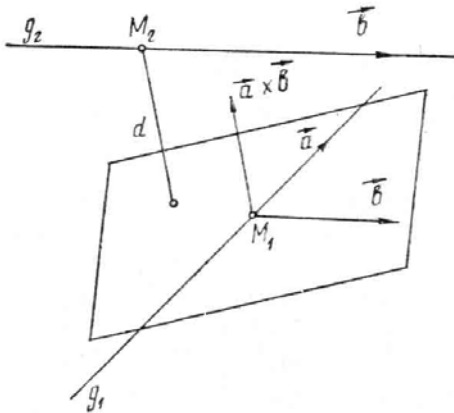


Рис. 5.16.

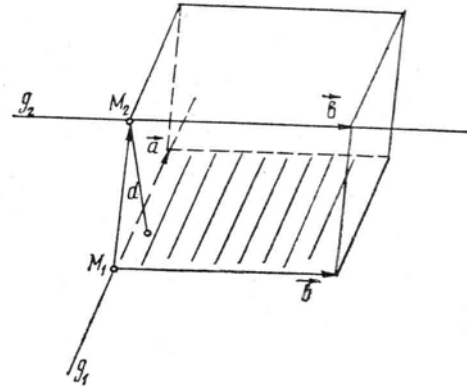


Рис. 5.17.

За направляващ вектор на оста  $g$  можем да изберем вектора  $\vec{c}(c_1, c_2, c_3) = \vec{a} \times \vec{b}$ ,

$$\vec{c} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}.$$

По условие  $\vec{c} \neq \vec{0}$  иначе правите биха били успоредни. Нека  $\alpha_1$  е равнина, която съдържа правата  $g_1$  и е успоредна на вектора  $\vec{c}$  и нека  $\alpha_2$  е равнина, която съдържа правата  $g_2$  и също е успоредна на вектора  $\vec{c}$ . Тогава тези равнини имат уравнения

$$\alpha_1: \begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0 \text{ и } \alpha_2: \begin{vmatrix} x-x_2 & y-y_2 & z-z_2 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

и нормални вектори  $\vec{N}_1 = \vec{a} \times \vec{c}$  и  $\vec{N}_2 = \vec{b} \times \vec{c}$ .

Да допуснем, че векторите  $\vec{N}_1$  и  $\vec{N}_2$  са успоредни. Тогава съществува тяхна нулева линейна комбинация  $\lambda \vec{N}_1 + \mu \vec{N}_2 = \vec{0}$ , при което поне един от коефициентите  $\lambda$  или  $\mu$  не е равен на нула. Имаме

$$\vec{0} = \lambda \vec{N}_1 + \mu \vec{N}_2 = \lambda \vec{a} \times \vec{c} + \mu \vec{b} \times \vec{c} = (\lambda \vec{a} + \mu \vec{b}) \times \vec{c},$$

следователно векторът  $\vec{c} \neq \vec{0}$  е успореден с вектора  $\lambda \vec{a} + \mu \vec{b}$ , с който от друга страна са взаимно перпендикулярни, понеже

$$(\lambda \vec{a} + \mu \vec{b}) \cdot \vec{c} = \lambda \vec{a} \cdot \vec{c} + \mu \vec{b} \cdot \vec{c} = 0 + 0 = 0.$$

Получихме, че векторът  $\lambda \vec{a} + \mu \vec{b}$  е едновременно колинеарен и ортогонален с даден ненулев вектор, което е възможно, единствено когато  $\lambda \vec{a} + \mu \vec{b} = \vec{0}$ , което пък означава, е  $\lambda = \mu = 0$ , понеже  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  не са успоредни по условие.



По този начин установихме, че равнините  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  не са успоредни и следователно се пресичат в една права, която права очевидно се явява оста  $g$  на двете кръстосани прави  $g_1$  и  $g_2$ .

**Пример 5.21.** Да намерим оста  $g$  на двете кръстосани прави

$$g_1: \frac{x-2}{8} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-7}{1} \text{ и } g_2: \frac{x}{2} = \frac{y}{-2} = \frac{z}{1}.$$

За правата  $g_1$  имаме направляващ вектор  $\vec{a}(8,4,1)$ , а за правата  $g_2$  имаме направляващ вектор  $\vec{b}(2,-2,1)$ . За вектора  $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$  пресмятаме

$$\vec{c} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 8 & 4 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i} - \vec{j} - 4\vec{k}.$$

Равнините  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  имат уравнения

$$\alpha_1: \begin{vmatrix} x-2 & y-2 & z-7 \\ 8 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & -4 \end{vmatrix} = 0 \text{ и } \alpha_2: \begin{vmatrix} x & y & z \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & -4 \end{vmatrix} = 0,$$

откъдето намираме общите уравнения

$$\alpha_1: 5x - 11y + 4z + 48 = 0 \text{ и } \alpha_2: x + y = 0.$$

Понеже за оста  $g$  вече разполагаме с направляващ вектор  $\vec{c}(1,-1,-4)$ , за да получим уравнението на тази ос остава да намерим една (коя да е) точка от  $g$ . За тази цел търсим някакво частно решение на системата

$$\begin{cases} 5x - 11y + 4z + 48 = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$$

Полагайки  $z=0$  намираме  $x=-3$  и  $y=3$ , следователно точката  $M_0(-3,3,0)$  лежи върху оста  $g$ , за която вече ос получаваме каноничното уравнение

$$g: \frac{x+3}{1} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z}{-4}.$$

**Разстояние между две кръстосани прави.** Ако правите  $g_1$  и  $g_2$  са кръстосани, то под разстояние  $d = d(g_1, g_2)$  между тези оправи се разбира дължината на отсечката между пресечните точки на оста с двете прави. Нека  $\beta$  е равнина през правата  $g_1$ , която е успоредна на направляващия вектор  $\vec{b}$  на другата права  $g_2$ . Тогава правата  $g_2$  е успоредна на равнината  $\beta$  и следователно разстоянието между коя да е точка от  $g_2$  и равнината  $\beta$  е едно и също, равно на търсеното разстояние  $d$  (рис. 5.6). Да разгледаме паралелепипеда, построен върху векторите  $\overline{M_1M_2}$ ,  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ , за който  $d$  се явява височина (рис. 5.7). За обема  $V$  на този успоредник разполагаме с два израза, единият чрез абсолютната стойност на смесеното произведение  $(\overline{M_1M_2}, \vec{a}, \vec{b})$ , а другият по известната формула за обем на паралелепипед – лице на основа по височина,

$$V = \left| (\overline{M_1M_2}, \vec{a}, \vec{b}) \right| = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}| d,$$

откъдето за търсеното разстояние между кръстосаните прави  $g_1$  и  $g_2$  намираме формулата

$$d = \frac{\left| \left( \overrightarrow{M_1 M_2}, \vec{a}, \vec{b} \right) \right|}{\left| \vec{a} \times \vec{b} \right|} = \frac{\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}}{\sqrt{\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}^2}}.$$

Това разстояние представлява най-малката дължина на отсечка, единият край на която лежи върху правата  $g_1$ , а другият край лежи върху правата  $g_2$ .