Лекция 6

§6. Непрекъснатост и производна на функции

1. Множество на реалните числа. **Числови редици.** Множеството на естествените числа N се състои от числата 1, 2, 3, ... и т.н. Пишем $\mathsf{N} = \{1,2,3,\ldots\}$. Множеството на целите числа $\mathsf{Z} = \{0,\pm 1,\pm 2,\pm 3,\ldots\}$, а множеството на рационалните числа $\mathsf{Q} = \left\{\frac{p}{q} \mid p \in \mathsf{Z},\ q \in \mathsf{N}\right\}$. Множеството на рационалните числа образува числово поле, което по определение означава, че там са възможни двете операции събиране (изваждане) и умножение (деление), при което са изпълнени обичайните закони за комутативност, асоциативност и дистрибутивност. Делението е възможно за всяко рационално число, различно от нула. Всички тези числови множества се изобразяват върху числовата ос. Числовата ос е права линия, на която са отбелязани нулата и единицата, което еднозначно определя място на всяко друго естествено, цяло и рационално число.

В природата обаче има величини, които не се изразяват чрез рационални числа. Например дължината на хипотенузата на правоъгълен триъгълник с катети равни на 1, е равна на $\sqrt{2}$, която величина не е рационално число. Този факт е бил известен още на древните гърци. От друга страна величината $\sqrt{2}$ има добре определено геометрично място върху числовата ос. Такива числа се наричат ирационални, а съвкупността на всичките рационални и ирационални числа образува множеството на реалните числа R. По този начин множеството на реалните числа се ***идентифицира напълно*** с числовата ос, затова реалните числа понякога ще наричаме точки. Множеството R (както Q) е числово поле – в него са възможни операциите събиране (изваждане) и умножение (деление), при което са изпълнени законите за комутативност, асоциативност и дистрибутивност. Делението е възможно за всяко реално число, различно от нула. Освен това в множеството R (както и в Q) съществува пълна наредба, т.е. за всеки две реални числа x и y е изпълнено точно едно от трите съотношения: $x < y$, $x > y$ или $x = y$. В множеството R е валиден принципът за непрекъснатост (пълнота на R), който ще бъде формулиран по-нататък и който не е в сила за рационалните числа.

Казва се че непразното числово множество A е ***ограничено отгоре (отдолу)***, когато съществува константа M (m), за която $x \le M$ ($x \ge m$) за всяко $x \in A$. Множеството се нарича ограничено, когато е ограничено отгоре и отдолу.

Пример 6.1. Множеството на положителните (отрицателните) числа е ограничено отдолу (отгоре), понеже нулата се явява една долна (горна) граница.

От всичките горни граници, най-голям интерес представлява най-малката, която (когато съществува) се нарича точна горна граница.

Определение 6.6. Числото M' се нарича точна горна граница за A, когато е горна граница за A, но всяко по-малко от него вече не е горна граница, т.е. когато $x \le M'$ за всяко $x \in A$ и за всяко $\varepsilon > 0$ съществува $x_\varepsilon \in A$, такова че $M' - \varepsilon < x_\varepsilon \le M'$. Числото m' се нарича точна долна граница за A, когато е долна граница за A, но всяко по-голямо от него вече не е долна граница, т.е. когато $x \ge m'$ за всяко $x \in A$ и за всяко $\varepsilon > 0$ съществува $x_\varepsilon \in A$, такова че $m' + \varepsilon > x_\varepsilon \ge m'$.

Точната горна граница на A се бележи $\sup A$, а точната долна граница $\inf A$.

Пример 6.2. Нулата е точна долна (горна) граница на множеството на положителните (отрицателните) реални числа.

Да припомним определенията за интервали: $(a,b) = \{x \in \mathsf{R} \mid a < x < b\}$ – ограничен отворен интервал; $[a,b] = \{x \in \mathsf{R} \mid a \le x \le b\}$ – ограничен затворен интервал и т.н.

Всеки отворен интервал съдържа безбройно много рационални и безбройно много ирационални числа.

Околност на точката ξ се нарича всеки отворен интервал, който съдържа ξ. Под ε-околност на ξ ще разбираме симетричния интервал $(\xi-\varepsilon, \xi+\varepsilon)$, $\varepsilon>0$.

Принцип за непрекъснатост на реалните числа. Всяко непразно ограничено отгоре множество от реални числа има точна горна граница и всяко непразно ограничено отдолу множество има точна долна граница.

Принцип на Архимед. Множеството на целите числа не е ограничено отгоре.

Принципът за непрекъснатост не е в сила над множеството на рационалните числа.

Пример 6.3. Ако A е множеството на всичките рационални числа, които са по-малки от $\sqrt{2}$, то A няма точна горна граница, понеже би трябвало $\sup A=\sqrt{2}$, но $\sqrt{2}$ не е рационално число.

Теорема 6.1 (*теорема за отделимост*). Нека A и B са непразни числови множества, за които е изпълнено $x \le y$ при всеки избор на $x\in A$ и $y \in B$. Тогава $\sup A \le \inf B$ и следователно съществува (поне едно) ξ, например всяко ξ от интервала $[\sup A, \inf B]$, за което $x \le \xi \le y$ при всеки избор на $x \in A$ и $y\in B$, т.е. точката ξ разделя множествата A и B. Ако освен това, за всяко $\varepsilon>0$ съществуват $x_\varepsilon \in A$ и $y_\varepsilon \in B$, за които $0 \le y_\varepsilon - x_\varepsilon < \varepsilon$, то $\sup A = \inf B$ и следователно точката ξ е единствена $\xi = \sup A = \inf B$. ■

Теорема 6.1 е по същество еквивалентна на принципа за непрекъснатост.

Теорема 6.2 (***на Кантор за вложените интервали***). Нека е дадена безкрайна система от вложени интервали $[a_n, b_n]$, $n=1,2,3,\dots$,

$$[a_1,b_1]\supseteq[a_2,b_2]\supseteq[a_3,b_3]\supseteq\cdots\supseteq[a_n,b_n]\supseteq\cdots.$$

Тогава тяхното сечение съдържа поне една точка. Освен това, ако дължината на тези интервали клони към нула, то сечението се състои от единствена точка. ■

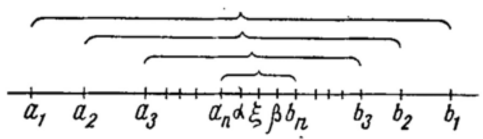

Рис. 6.6.

По-точният изказ на заключението на теоремата на Кантор е, че ако $\alpha=\sup\{a_1,a_2,\dots\}$ и $\beta = \inf\{b_1,b_2,\dots\}$, то $\alpha\le\beta$ и следователно всяко $\xi\in[\alpha,\beta]$ принадлежи на сечението на всичките интервали (Рис. 6.1).

Числови редици. Числова редица се получава, когато на всяко естествено число n (номер) се съпостави реално число a_n – общ член на редицата. Редицата с общ член a_n ще означаваме с $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ или накратко $\{a_n\}$, понеже е ясно че редицата е безкрайна, а откъде започва номерацията е фактически без значение за начина, по който числовите редици се използват.

Пример 6.4. Ако $a_n=\dfrac{1}{n}$, то първите няколко члена имат вида

$$1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\dots$$

а за редицата с общ член $a_n=\dfrac{n+1}{n}$ имаме

$$2,\frac{3}{2},\frac{4}{3},\frac{5}{4},\dots$$

Когато между всичките индекси на една редица

$$a_1,a_2,a_3,\dots,a_n,\dots$$

изберем растяща подредица от индекси (която в частност може да съвпада с изходната)

$$n_1 < n_2 < n_3 < \cdots < n_\nu < \cdots$$
можем да разгледаме подредица на изходната
$$a_{n_1}, a_{n_2}, a_{n_3}, \ldots, a_{n_\nu}, \ldots$$
която бележим с $\{a_{n_\nu}\}_{\nu=1}^{\infty}$.

Пример 6.5. Редицата
$$1,\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{9},\ \frac{1}{16},\ \frac{1}{25},\ \ldots$$
се явява подредица на редицата
$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{5},\ \ldots .$$

Редицата $\{a_n\}$ се нарича ***ограничена*** (отгоре/отдолу), когато нейни членове образуват ограничено (отгоре/отдолу) множество.

Точката ξ се нарича ***точка на сгъстяване*** за редицата $\{a_n\}$ когато всяка околност (ε-околност) на ξ съдържа безбройно много членове на редицата.

Пример 6.6. Точката $\xi = 0$ е точка на сгъстяване за редицата с общ член $a_n = \frac{1}{n}$.

Ограничената редицата $\{a_n\}$ се нарича ***сходяща***, когато има единствена точка на сгъстяване ξ. В този случай числото ξ се нарича граница на редицата и се означава $\lim_{n\to\infty} a_n = \xi$ или $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \xi$.

Това определение за сходяща редица е еквивалентно на следното определение.

Определение 6.6. Казва се, че редицата $\{a_n\}$ е сходяща и клони към границата ξ когато всяка ε-околност на ξ съдържа всичките членове на редицата от известно място нататък, т.е. когато за всяко $\varepsilon > 0$ съществува индекс n_0 такъв, че $|a_n - \xi| < \varepsilon$, за всяко $n > n_0$.

Неравенството $|a_n - \xi| < \varepsilon$ е еквивалентно на $a_n \in (\xi - \varepsilon, \xi + \varepsilon)$, т.е. $\xi - \varepsilon < a_n < \xi + \varepsilon$. Точката ξ е точка на сгъстяване за редицата $\{a_n\}$ тогава и само тогава, когато съществува сходяща подредица $\{a_{n_\nu}\}$ с граница ξ. Нека редицата $\{a_n\}$ е сходяща и клони към границата ξ. Тогава всяка нейна подредица $\{a_{n_\nu}\}$ също е сходяща и клони към същата граница ξ.

Пример 6.7. Редицата с общ член $a_n = \frac{n+1}{n}$ е сходяща и клони към границата $\xi = 1$,
$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1.$$
Да проверим този резултат следвайки определение 6.6. Нека $\varepsilon > 0$. За тази редица имаме $|a_n - \xi| = \frac{1}{n}$. Да фиксираме едно n_0 достатъчно голямо, че $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$. Тогава, за всяко $n > n_0$ имаме $|a_n - \xi| = \frac{1}{n} < \frac{1}{n_0} < \varepsilon$.

Редица, на която общият член не се променя се нарича ***стационарна***. Очевидно всяка стационарна редица е сходяща, при което нейната граница е равна на общата стойност на общия член.

Всяка сходяща редица е ограничена.

Теорема 6.3 (*Болцано-Вайерщрас*). От всяка ограничена редица можем да изберем сходяща подредица. ■

От теоремата на Болцано-Вайерщрас следва, че всяка ограничена редица има поне една точка на сгъстяване, понеже границата на съответната сходяща подредица се явява точка на сгъстяване за редицата. Една ограничената редица обаче е сходяща, когато има точно една точка на сгъстяване.

Следващото твърдение съдържа основните правила за смятане със сходящи редици.

Твърдение 6.6. Нека

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \xi \text{ и } \lim_{n\to\infty} b_n = \eta .$$

Тогава:

1) Редицата с общ член $a_n b_n$ също е сходяща, при което

$$\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \xi\eta .$$

2) Редицата с общ член $a_n \pm b_n$ също е сходяща, при което

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = (\xi \pm \eta).$$

3) Ако $\eta \neq 0$, то редицата с общ член $\dfrac{a_n}{b_n}$ също е сходяща, при което

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \frac{\xi}{\eta}.$$

Доказателство. За илюстрация ще докажем само **2**). Нека $\varepsilon > 0$. По определение можем да намерим индекс n_1, за който

$$|a_n - \xi| < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad n > n_1 .$$

Също така можем да намерим индекс n_2, за който

$$|b_n - \eta| < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad n > n_2 .$$

Да изберем $n_0 > \max(n_1, n_2)$. Тогава при $n > n_0$ имаме

$$|(a_n \pm b_n) - (\xi \pm \eta)| < |a_n - \xi| + |b_n - \eta| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon ,$$

и следователно числото $(\xi \pm \eta)$ изпълнява определението за граница на редицата с общ член $(a_n \pm b_n)$. ■

Както се вижда непосредствено от определенията, свойствата свързани със сходимостта на дадена редица не зависи от поведението на нейните първи няколко члена, т.е. можем да променим (или да премахнем) някакъв фиксиран брой първи членове на редицата, без да се промени нейната сходимост.

Твърдение 6.6. Граничният преход запазва неравенствата, т.е. ако

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \xi \text{ и } \lim_{n\to\infty} b_n = \eta$$

и освен това, ако $a_n \le b_n$ за всяко n (или за всяко n от известно място нататък), то за границите ξ и η е изпълнено аналогично неравенство $\xi \le \eta$. ■

От строгото неравенство между членовете на редиците $a_n < b_n$ не следва строго неравенство между границите, т.е не следва, че $\xi < \eta$.

Твърдение 6.3 (***лема за двамата полицаи***). Нека $a_n \le c_n \le b_n$ за всяка стойност на n (или за n от известно място нататък) и освен това редиците $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ са сходящи и имат обща граница ξ. Тогава редицата с общ член $\{c_n\}$ също е сходяща и клони към същата граница ξ. ■

Следващото понятие за ***фундаментална редица*** има основно значение.

Определение 6.3. Редицата $\{a_n\}$ се нарича фундаментална, когато $|a_n - b_m| \to 0$ при $n, m \to \infty$, т.е. когато за всяко $\varepsilon > 0$ съществува n_0 такова, че $|a_n - a_m| < \varepsilon$ при $n, m > n_0$.

Всяка сходяща редица е фундаментална. Обратното твърдение се нарича

Принцип за пълнота на $\mathbb{R}$. Всяка фундаментална редица от реални числа е сходяща.

Да отбележим, че този принцип не е валиден за множеството на рационалните числа. Принципът за пълнота е еквивалентен на принципа за непрекъснатост.

Определение 6.3 може да се изкаже по следния начин: редицата $\{a_n\}$ е фундаментална, когато за всяко $\varepsilon > 0$ може да се намери n_0 такова, че $\left|a_{n+p} - a_n\right| < \varepsilon$, за всяко $n > n_0$ и всяко $p \in \mathbb{N}$. Сега от принципа за пълнота се получава следния критерий за сходимост.

Теорема 6.4 ***(Коши).*** Редицата е сходяща тогава и само тогава , когато за всяко $\varepsilon > 0$ може да се намери n_0 такова, че $\left|a_{n+p} - a_n\right| < \varepsilon$, за всяко $n > n_0$ и всяко $p \in \mathbb{N}$.

Ако една редица е фундаментална, то всяка нейна подредица също е фундаментална.

При известни уговорки, ролята на граници могат да изпълняват и символите ∞ или $-\infty$. В този случай за да правим разлика между крайни и безкрайни граници ще казваме, че редицата дивергира към ∞ или $-\infty$.

Казва се, че редицата $\{a_n\}$ ***дивергира към*** ∞ ***($-\infty$)***, когато всеки интервал от вида (E, ∞) ($(-\infty, E)$) съдържа всичките членове на редицата от известно място нататък, т.е. когато за всяко E съществува индекс n_0, за който $a_n > E$ ($a_n < E$) при $n > n_0$. Означението за дивегриращи редици е същото като за сходящи редици, пишем

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty(-\infty)$ или $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty(-\infty)$.

Пример 6.8. Редицата с общ член $a_n = \dfrac{n^2}{n+1}$ дивергира към ∞.

Определение 6.4. Казва се, че редицата е ***монотонно растяща (намаляваща)***, когато $a_{n+1} \ge a_n$ ($a_{n+1} \le a_n$). Редицата се нарича строго монотонно растяща (намаляваща), когато $a_{n+1} > a_n$ ($a_{n+1} < a_n$).

Монотонните редици имат благоприятни свойства относно сходимостта.

Теорема 6.5. Нека редицата $\{a_n\}$ е монотонно растяща и ограничена отгоре. Тогава тя е сходяща и освен това клони към точната си горна граница $\sup\{a_n\}$. Аналогично, ако редицата $\{a_n\}$ е монотонно намаляваща и ограничена отдолу, то тя е сходяща, при което клони към точната си долна граница $\inf\{a_n\}$. ■

Ако една монотонно растяща редица не е ограничена отгоре, то тя по определение дивергира към ∞, следователно монотонно растящите редици "винаги" клонят към някаква граница, крайна или безкрайна. Аналогично свойство имат и монотонно намаляващите редици.

Да докажем следното

Твърдение 6.4 (*неравенство на Бернули*). За всяко $x > -1$ и всяко естествено число n е изпълнено неравенството

$$(1+x)^n \ge 1 + nx.$$

Доказателство. Доказателството ще проведем по индукция. При $n = 1$ неравенството става очевидно понеже се свежда до $1 + x \ge 1 + x$. Да допуснем, че е вярно за някое $n \ge 1$. Ще докажем, че от това следва верността му за стойност на степента $n+1$. Наистина

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)(1+x)^n \ge (1+x)(1+nx) = 1 + (n+1)x + nx^2 \ge 1 + (n+1)x.$$

От доказателството се вижда, че неравенството е строго, когато $x \ne 0$. ■

Сега да разгледаме редиците

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \text{ и } b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Твърдение 6.5. Редиците $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ имат следните свойства:
1) За всеки индекс n имаме $a_n < b_n$.
2) Редицата $\{a_n\}$ е строго монотонно растяща и ограничена отгоре, а редицата $\{b_n\}$ е строго монотонно намаляваща и ограничена отдолу.
3) За всички индекси p и q е изпълнено неравенството $a_p < b_q$.

Доказателство. **1)** Очевидно

$$b_n - a_n = \frac{1}{n} a_n > 0.$$

2) Да докажем първо монотонността. Ще докажем, че $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, като за тази цел ще използваме неравенството на Бернули. Имаме

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)\left(\frac{1+\frac{1}{n+1}}{1+\frac{1}{n}}\right)^n = \left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{1}{n^2+2n+1}\right)^n$$

$$\geq \left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{n}{n^2+2n+1}\right) = \frac{n^3+3n^2+3n+2}{n^3+3n^2+3n+1} > 1$$

Аналогично се доказва, че $\frac{b_n}{b_{n+1}} > 1$. Сега можем да напишем

$$2 = a_1 \leq a_n < b_n \leq b_1 = 4,$$

т.е. и двете редици са ограничени.
3) Нека $n > \max(p,q)$. Тогава, според точка **2**) имаме

$$a_p < a_n < b_n < b_q. \blacksquare$$

Твърдение 6.6. Редицата $\{a_n\}$ и редицата $\{b_n\}$ са сходящи, при което клонят към една и съща граница, чиято стойност се нарича ***неперово число***.

Доказателство. Редицата $\{a_n\}$ е сходяща и клони към точната си горна граница $\sup\{a_n\}$, понеже е монотонно растяща и ограничена отгоре, а редицата $\{b_n\}$ е сходяща и клони към точната си долна граница $\inf\{b_n\}$, понеже е строго монотонно намаляваща и ограничена отдолу. От друга страна ако положим $A = \{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$ и $B = \{b_1, b_2, b_3, \ldots\}$, то за тези две множества, съгласно твърдение 6.5, **2**), можем да приложим теоремата за отделимост, която заедно с факта

$$b_n - a_n = \frac{1}{n} a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

ни дава $\sup A = \inf B$, т.е. $\sup\{a_n\} = \inf\{b_n\}$, което доказва твърдението. ■

Общата граница на тези редици (числото на Непер) се бележи с e

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n,$$

което е ирационално число $e = 6.7182818284590452354...$ и представлява една от най-важните константи в математиката.

Числото e не само е ирационално, но и не се явява корен на нито един полином с цели коефициенти. Такива числа се наричат трансцедентни. Другата най-известна константа в математиката π =3.14159265358979323846... също е трансцедентно число. В десетична (и във всяка друга) бройна система, рационалните числа и само те се записват чрез крайна или периодична дробна част, т.е. в техния запис има проста закономерност. При ирационалните числа отсъства такава закономерност.

6. Граница и непрекъснатост на функция. Следващите определения касаят взаимното разположение на точка и множество. Нека $x \in \mathsf{R}$ и $E \subset \mathsf{R}$, $E \neq \varnothing$. Точката $x \in E$ се нарича ***вътрешна*** за E, когато се съдържа в E заедно с някоя своя ε-околност $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$. Точката x се нарича ***външна*** за E, когато е вътрешна за допълнението $E^c = \mathsf{R} \setminus E$. Точката x се нарича ***гранична*** (***контурна***) за E, когато не е нито вътрешна нито външна за E. Точката x се нарича ***точка на сгъстяване*** за E, когато всяка нейна ε-околност $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ съдържа точки от E, различни от x. Точката $x \in E$ се нарича ***изолирана***, когато съществува някаква нейна ε-околност, която не съдържа други точки от A освен x.

Една гранична точка може да принадлежи или да не принадлежи на множеството. Точката x е външна за E, когато съществува някаква нейна ε-околност $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$, за която $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \bigcap E = \varnothing$. Очевидно всяка изолирана точка е и гранична. От последното определение следва, че всяка точка е или вътрешна или външна или гранична относно дадено множество. Точката x е точка на сгъстяване за E тогава и само тогава, когато може да се намери редица $\{x_n \in E, x_n \neq x\}$, за която $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$.

Едно множество се нарича ***крайно***, когато неговите елементи са краен брой и ***безкрайно***, когато неговите елементи са безбройно много. Множеството $U \subset \mathsf{R}, U \neq \varnothing$, се нарича ***отворено***, когато се състои само от вътрешни точки. Празното множество $\varnothing$ също определяме като отворено. Множеството $F \subset \mathsf{R}$ се нарича ***затворено***, когато неговото допълнение $F^c = \mathsf{R} \setminus F$ е отворено. Множеството $K \subset \mathsf{R}$, $K \neq \varnothing$, се нарича ***компактно***, когато е затворено и ограничено. От горните определения следва, че множеството $U \neq \varnothing$ е отворено, точно когато за всяка негова точка $x \in U$ съществува някаква нейна ε-околност $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$, за която $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subset U$. Единствените множества, които са едновременно отворени и затворени са цялото R и празното множество $\varnothing$.

Пример 6.9. Всеки отворен интервал е отворено множество и всеки затворен интервал е затворено множество. Най-полезните примери за компактни множества са ограничените и затворени интервали.

Следващото твърдение характеризира затворените множества.

Твърдение 6.7. Едно множество $F \subset \mathsf{R}$, $F \neq \varnothing$, е затворено тогава и само тогава, когато съдържа всичките си точки на сгъстяване. Освен това, F е затворено тогава и само тогава, когато съдържа границите на всички свои сходящи редици, т.е. когато от $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \xi$ и $x_n \in F$ следва, че $\xi \in F$. ■

Произволно обединение на отворени множества е отворено множество. Произволно сечение на затворени множества също е затворено. В общия случай произволно сечение на отворени множества може да не бъде отворено, както и произволно обединение на затворени множества може да не бъде затворено. Сечението на краен брой отворени множества е отворено и обединението на краен брой затворени множества е затворено.

Да припомним, че множеството $K \subset \mathsf{R}$ е компактно, когато е едновременно ограничено и затворено. Следващата теорема има особено важна роля в анализа.

Теорема 6.6. Множеството $K \subset \mathsf{R}$ е компактно тогава и само тогава, когато от всяка негова редица може да се избере сходяща подредица, чиято граница принадлежи на K. ■

Тук ще разглеждаме функции $f : E \to \mathsf{R}$, $(f(x) : E \to \mathsf{R})$, определени в някакво подмножество E на R и приемащи реални стойности. Нека е дадена функцията $y = f(x)$, определена в множеството $E \subset \mathsf{R}$. Тогава множеството от точки $\Gamma(f)$ в декартовата равнина R^2_{xy} от вида (x, y), където $x \in E$ и $y = f(x)$ се нарича ***графика*** на функцията $f(x)$.

Определение 6.5. Нека функцията f е определена в някакво множество $E \subset \mathrm{R}$ и x_0 се явява точка на сгъстяване за E. Числото A се нарича граница на функцията $f(x)$ при x клонящо към x_0 $(x \to x_0)$ (или още граница на функцията $f(x)$ в точката x_0), когато за всяка редица от точки $\{x_n \in E, x_n \neq x_0\}$, за която $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, редицата $\{f(x_n)\}$ клони към числото A. Пишем $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$.

В горното определение x_0 е точка на сгъстяване за E, следователно съществуват редици $\{x_n \in E\}$, такива, че всяко $x_n \neq x_0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$. Да отбележим специално, че функцията $f(x)$ не се предполага определена в самата точка x_0.

Съществуването на граница на функция може да се определи в термините на околности на x_0 и A.

Твърдение 6.8. Числото A е граница на функцията $f(x)$ при $x \to x_0$ тогава и само тогава, когато за всяко $\varepsilon > 0$ съществува δ такова, че $|f(x) - A| < \varepsilon$, винаги когато $|x - x_0| < \delta$ и $x \neq x_0$. ■

Твърдение 6.8 дава еквивалентно определение за граница на функция в точка и затова самото то може да се разглежда и като определение.

Пример 6.10. Да разгледаме функцията

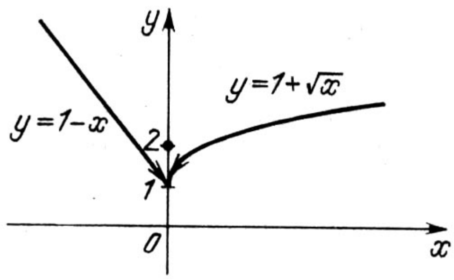

Рис. 6.6.

определена по следния начин (рис. 6.2)

$$y = f(x) = \begin{cases} 1 - x, & x < 0 \\ 2, & x = 0 \\ 1 + \sqrt{x}, & x > 0 \end{cases}$$

Да разгледаме точката $x_0 = 0$. Тук имаме $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 1$, което добре се вижда от рисунката, при което тази граница е различна от стойността на $f(x_0) = f(0) = 2$. Както и да се приближаваме към точката x_0, със стойности по-малки от x_0 или със стойности по-големи от x_0, се получава една и съща граница 1.

Пример 6.11. Да разгледаме функцията знак

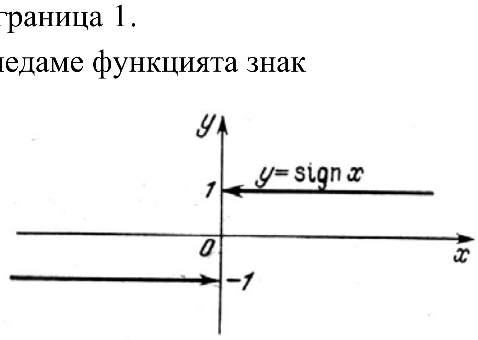

Рис. 6.3.

$\operatorname{sign} x$, определена по следния начин (Рис. 6.3)

$$y = f(x) = \operatorname{sign} x = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$

и нека отново $x_0 = 0$. В този пример, ако приближаваме x_0 със стойности по-големи от x_0, се получава граница 1, а ако приближаваме x_0 със стойности по-малки от x_0 се получава граница -1, което показва, че границата на функцията при $x \to x_0$ не съществува.

Примерите обаче показват, че е целесъобразно понятието граница на функция да се уточни чрез въвеждане на лява и дясна граница. Числото A се нарича ***лява (дясна)*** граница на функцията $f(x): E \to \mathrm{R}$ при x клонящо към x_0, когато за всяка редица от точки $\{x_n \in E, x_n < x_0\}$ $(\{x_n \in E, x_n > x_0\})$, за която $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, редицата $\{f(x_n)\}$ клони към числото A. Лявата (дясната) граница, когато съществува, се означава с $f(x_0 - 0)$, $(f(x_0 + 0))$. Пишем

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x) = f(x_0 - 0) \ \left(\lim_{x\to x_0+0} f(x) = f(x_0 + 0)\right).$$

Тук означението $x \to x_0 - 0$ показва, че x клони към x_0 със стойности по-малки от x_0, а означението $x \to x_0 + 0$ показва, че x клони към x_0 със стойности по-големи от x_0. В последния пример имаме $f(x_0 - 0) = -1$ и $f(x_0 + 0) = 1$.

Пример 6.12. За примера от рис. 6.2 имаме $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = 1$.

Верността на следното твърдение произтича непосредствено от определенията.

Твърдение 6.9. Нека x_0 е точка на сгъстяване за дефиниционното множество на функциите $f(x)$ и $g(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$ и $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = b$. Тогава:

1) Функцията $f(x) + g(x)$ също има граница в x_0, при което $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x) + g(x)] = a + b$.

2) Функцията $f(x)g(x)$ също има граница в x_0, при което $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)g(x)] = a\,b$.

3) Ако $b \neq 0$, то функцията $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ също има граница в x_0, при което

$$\lim_{x\to x_0}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{a}{b}. \ \blacksquare$$

Аналогично твърдение е валидно за случая на лява (дясна) граница.

Пример 6.13. Функцията $y = f(x) = \sin\dfrac{1}{x}$, $x \neq 0$, ***няма*** граница в точката $x_0 = 0$, което добре се вижда от рисунката

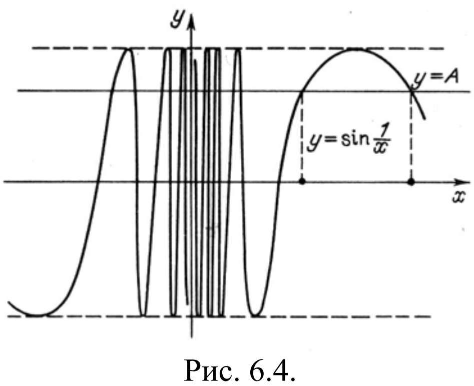

Рис. 6.4.

В този пример всяко $A \in [-1,1]$ се явява точка на сгъстяване за стойностите на $f(x)$, когато x се мени във всеки интервал $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, $\delta > 0$.

Сега сме готови да дадем важното определение за непрекъснатост на функция.

Определение 6.6. Нека функцията $f(x)$ е определена в някакво множество $E \subset \mathrm{R}$ и $x_0 \in E$ се явява точка на сгъстяване за E. Казва се, че $f(x)$ е ***непрекъсната*** в точката x_0, когато $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ (Рис. 6.5). По дефиниция приемаме, че ако x_0 е изолирана точка за E, то $f(x)$ е непрекъсната в x_0.

Ако една функция $f(x)$ е непрекъсната във всяка точка от дефиниционното си множество E, то тя се нарича ***непрекъсната в*** E.

Функцията $f(x)$ се нарича непрекъсната отляво в точката x_0, когато $f(x_0 - 0) = f(x_0)$ и непрекъсната отдясно, когато $f(x_0 + 0) = f(x_0)$. Ако една функция е непрекъсната в x_0, то тя е непрекъсната както отляво, така и отдясно. Когато се казва, че $f(x)$ е непрекъсната в интервала $[a,b]$ се има предвид, че $f(x)$ е непрекъсната във всяка вътрешна точка $x_0 \in (a,b)$, непрекъсната отдясно в точката a и непрекъсната отляво в точката b.

При определението за непрекъснатост в точка се иска функцията да бъде дефинирана в тази точка и по този начин определението за непрекъснатост може да се изкаже в следния вид.

Твърдение 6.10. Функцията $f(x)$, определена в множеството E, е непрекъсната в точката x_0 (Рис. 6.5) тогава и само тогава, когато:

1) За всяка редица от точки $\{x_n \in E\}$, за която $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$, редицата $\{f(x_n)\}$ е сходяща и клони към $f(x_0)$.

2) За всяко $\varepsilon > 0$ може да се намери δ такова, че $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, когато $|x - x_0| < \delta$. ■

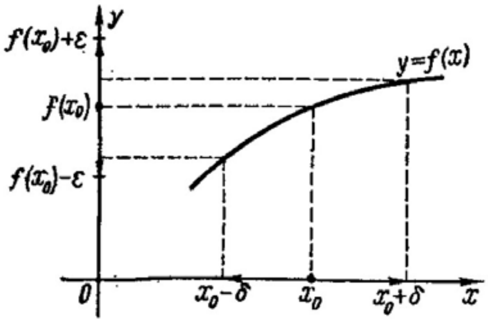

Рис. 6.5.

Твърдение 6.10 се видоизменя по очевиден начин за случаите на едностранна непрекъснатост (отляво или отдясно).

Непрекъснатостта на функцията $f(x)$ в точката x_0 означава, че лявата и дясната граници на функцията в тази точка съществуват и двете са равни на стойността на функцията в x_0, $A = f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = f(x_0)$ (Рис. 6.6)

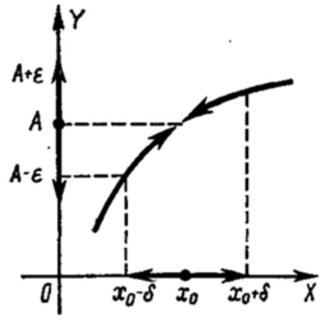

Рис. 6.6.

Когато функцията $f(x): E \to \mathrm{R}$ не е непрекъсната в точката $x_0 \in E$, казваме, че е прекъсната в x_0. За примера от рис. 6.2, функцията е прекъсната в точката $x_0 = 0$, но тук нещата лесно (променяйки $f(x)$ само в една точка) могат да "коригират", полагайки $f(x_0) = 1$, което е общата стойност на лявата и дясната граници. В такъв случай се казва, че функцията се определя по непрекъснатост в точката, където лявата и дясната граници съществуват и техните стойности са равни. Изложеният подход обаче няма да помогне за функцията от примера от рис. 6.3, понеже в този случай $f(x_0 - 0) \neq f(x_0 + 0)$.

От определенията за непрекъснатост и от твърдение 6.9 следва, че ако $f(x)$ и $g(x)$ са непрекъснати в точката x_0, то $f(x) + g(x)$, $f(x)g(x)$ и $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ $(g(x_0) \neq 0)$ също са непрекъснати в x_0. Аналогично твърдение е вярно и когато $f(x)$ и $g(x)$ са непрекъснати в някакво множество E.

Композицията на непрекъснати функции също е непрекъсната функция. Нека е дадена функцията $\varphi(t): E \to \mathrm{R}$, която е непрекъсната в точката $t_0 \in E$ и да положим $x_0 = \varphi(t_0)$. Нека функцията $f(x): E' \to \mathrm{R}$ е непрекъсната в точката $x_0 \in E'$. Тогава съставната функция $F(t) = f(\varphi(t)): E \to \mathrm{R}$ е непрекъсната в точката t_0. Наистина, да изберем едно $\varepsilon > 0$. Тогава съществува δ' такова, че $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, когато $|x - x_0| < \delta'$. От друга страна може да се намери δ такова, че $|\varphi(t) - x_0| < \delta'$, когато $|t - t_0| < \delta$. Тогава, ако $|t - t_0| < \delta$, то $|\varphi(t) - x_0| < \delta'$ и следователно $|F(t) - F(t_0)| < \varepsilon$. Последното по определение означава, че функцията $F(t)$ е непрекъсната в точката t_0.

Функциите, които се получават от променливата x чрез краен брой композиции на основните елементарни функции и операциите събиране, умножение и деление се наричат ***елементарни функции*** на променливата x. ***Елементарните функции са непрекъснати във всяка вътрешна точка на дефиниционната си област.***

Свойства на функции, определени в ограничен затворен интервал. Ако една функция е определена и непрекъсната над компактно множество, то тя е ограничена и равномерно непрекъсната. Една функция се нарича ***ограничена*** (отгоре/отдолу), когато множеството на нейните стойности е ограничено (отгоре/отдолу). Казва се, че функцията $f(x): E \to \mathrm{R}$, $E \subset \mathrm{R}$, е ***равномерно непрекъсната***, когато за всяко $\varepsilon > 0$ може да се намери δ такова, че $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$, винаги когато $|x_1 - x_2| < \delta$, $x_1, x_2 \in E$.

Една функция може да бъде непрекъсната, но да не бъде нито ограничена нито равномерно непрекъсната.

Пример 6.14. Да разгледаме функцията $f(x) = \dfrac{1}{x} : (0,1] \to \mathrm{R}$, която е непрекъсната в дефиниционното си множество $(0,1]$ но очевидно не ограничена, понеже $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \infty$. Тази функция не и равномерно непрекъсната. Да изберем $\varepsilon_0 = 0.5$ и да разгледаме числата $x_n = \dfrac{1}{n}$. Имаме $|x_n - x_{n+1}| = \dfrac{1}{n(n+1)}$, следователно колкото и малко да избираме $\delta > 0$, ще се намери индекс n, за който $|x_n - x_{n+1}| < \delta$. От друга страна винаги е изпълнено $|f(x_n) - f(x_{n+1})| = 1 > \varepsilon_0$, което показва, че така определената функция не отговаря на изискването за равномерна непрекъснатост. В този пример дефиниционното множество на функцията $(0,1]$ е ограничено, но не е затворено.

Тук ще разглеждаме непрекъснати функции $f(x)$, определени в ограничен затворен интервал $[a,b]$. Всеки ограничен затворен интервал е компактно множество. Теоремите за ограниченост и равномерна непрекъснатост на непрекъснати функции са валидни, когато $f(x)$ е определена не само над ограничен затворен интервал, а и в случая когато $f(x)$ е определена над компактно множество и затова ще ги формулираме по този начин.

Теорема 6.7 ***(Вайерщрас).*** Нека функцията $f(x)$ е определена и непрекъсната над компактното множество $K \subset \mathrm{R}$. Тогава $f(x)$ е ограничена, при което $f(x)$ достига най-голяма и най-малка стойности; съществуват точка $x_{\max} \in K$ и точка $x_{\min} \in K$, за които

$f(x_{\max}) = \max\limits_{x \in K} f(x)$ и $f(x_{\min}) = \min\limits_{x \in K} f(x)$. ■

Ако една функция $f(x)$ е равномерно непрекъсната в множеството E, то тя е и непрекъсната във всяка точка от $x_0 \in E$ ($f(x)$ е непрекъсната в E), понеже за всяко $\varepsilon > 0$ може да се намери δ такова, че $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, когато $|x - x_0| < \delta$. Равномерната непрекъснатост означава, че това δ може да се избере едно също за всяко $x_0 \in E$, докато обикновената непрекъснатост допуска δ да зависи от x_0.

Ако обаче дефиниционната област на една непрекъсната функция е компактно множество, то тя е и равномерно непрекъсната.

Теорема 6.8 ***(за равномерна непрекъснатост).*** Нека функцията $f(x)$ е определена и непрекъсната над компактното множество $K \subset \mathrm{R}$. Тогава $f(x)$ е равномерно непрекъсната в K. ■

Следователно, ако функцията $f(x)$ е определена и непрекъсната в ограничения и затворен интервал $[a,b]$, то тя е ограничена и равномерно непрекъсната в $[a,b]$ и достига най-голяма и най-малка стойност.

Твърдение 6.11. Нека функцията $f(x)$ е непрекъсната в интервала $[a,b]$, при което в краищата на интервала приема стойности с различен знак, $f(a)f(b) < 0$. Тогава може да се намери поне едно $\xi \in (a,b)$, за което $f(\xi) = 0$. ■

Това твърдение е геометрически очевидно. Графиката на една непрекъсната функция е непрекъсната линия, която в този случай съединява точките $(a, f(a))$ и $(b, f(b))$ които се намират от различни страни на оста Ox и следователно графиката на ще пресече тази ос в някоя точка $\xi \in (a,b)$ (Рис. 6.7).

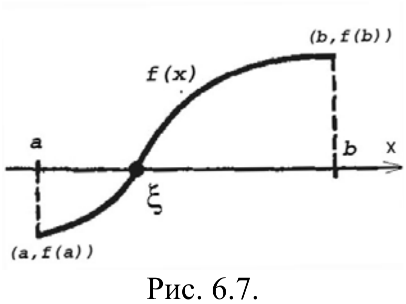

Рис. 6.7.

От твърдение 6.11 следва

Теорема 6.9 (***за междинните стойности***). Нека функцията $f(x)$ е непрекъсната в интервала $[a,b]$. Тогава, за всяко число η между $f(a)$ и $f(b)$ може да се намери поне едно $\xi \in [a,b]$, за което $f(\xi) = \eta$.

Доказателство. Случаят $f(a) = f(b)$ е очевиден, затова да предположим, че $f(a) \neq f(b)$. Да разгледаме функцията $g(x) = f(x) - \eta$. Нека $\eta \neq f(a)$ и $\eta \neq f(b)$ (в противен случай избираме $\xi = a$ или $\xi = b$). Тогава числата $g(a)$ и $g(b)$ имат различен знак и съгласно твърдение 6.11 съществува поне едно $\xi \in (a,b)$, за което $g(\xi) = 0$, т.е. $f(\xi) = \eta$. ■

Теорема 6.8 показва, че стойностите на една непрекъсната функция $f(x): [a,b] \to \mathsf{R}$, ***запълват целия затворен интервал*** $[m, M]$, където

$$M = f(x_{\max}) = \max_{x\in[a,b]} f(x) \text{ и } m = f(x_{\min}) = \min_{x\in[a,b]} f(x),$$

понеже $f(x)$ е непрекъсната в крайния затворен интервал с краища $x_{\min}$ и $x_{\max}$, а всяка стойност на $f(x)$ се намира в интервала $[f(x_{\min}), f(x_{\max})]$.

Монотонни и обратни функции. Функцията $f(x)$ се нарича ***монотонно растяща (намаляваща)*** в интервала Δ, когато за всеки $x_1, x_2 \in \Delta$, $x_1 < x_2$, е изпълнено $f(x_1) \le f(x_2)$ $(f(x_1) \ge f(x_2))$. Ако неравенствата са строги, то функцията се нарича ***строго монотонно растяща (намаляваща)***.

Една монотонна функция притежава лява и/или дясна граница във всяка точка от дефиниционната си област. Например, ако $f(x)$ е монотонно растяща в интервала $[a,b]$, то за всяко $x_0 \in (a,b)$ съществуват лявата и дясната граници, при което $f(x_0 - 0) \le f(x_0) \le f(x_0 + 0)$. В точката a съществува дясната граница, при което $f(a) \le f(a + 0)$, а в точката b съществува лявата граница при което $f(b - 0) \le f(b)$. Аналогично твърдение но с противоположни неравенства е вярно и за монотонно намаляваща функция. В този случай $f(x)$ е непрекъсната в $x_0 \in (a,b)$ тогава и само тогава, когато $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0)$.

Нека функцията $y = f(x): E \to E'$ задава взаимно еднозначно изображение между дефиниционната си област E и областта на стойностите E'. В този случай можем да определим функция $g(y): E' \to E$, която е ***обратна*** на $f(x)$, в по следния начин: ако $\eta = f(\xi)$, за някое $\xi \in E$, то полагаме $g(\eta) = \xi$. Обратната функция се означава с $g(y) = f^{-1}(y)$.

Съгласно определението $f^{-1}(f(x)) = x$, за всяко $x \in E$ и $f(f^{-1}(y)) = y$, за всяко $y \in E'$.

Ако една функция е строго монотонна, то тя задава взаимно еднозначно изображение между дефиниционната си област и областта от стойности, следователно притежава обратна.

Теорема 6.10. Нека функцията $f(x)$ е непрекъсната и строго монотонна в интервала $[a,b]$. Тогава $f(x)$ има обратна, определена в затворения интервал с краища $f(a)$ и $f(b)$, която също е непрекъсната функция. ■

Теорема 6.10 е валидна по същество и когато дефиниционната област на функцията е произволен интервал, а не само за случая на ограничен затворен интервал.

Пример 6.15. Да разгледаме функцията $f(x) = x^2$ за $x \in [0,1]$. Тази функция е строго монотонно растяща в дефиниционната си област и следователно има непрекъсната обратна, $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$.

Пример 6.16. Важен пример за обратна функция се получава, ако разгледаме функцията $f(x) = \sin x$ в интервала $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. В този интервал $\sin x$ е строго монотонно растяща и следователно притежава непрекъсната обратна, която се бележи с $\arcsin x$. По този начин функцията $\arcsin x$ е определена в интервала $[-1,1]$ и приема стойности в интервала $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Тази функция, както и останалите обратни тригонометрични функции, ще бъдат разгледани подробно нататък.

Видове прекъсвания на функция. По определение една функция $f(x)$ е прекъсната в дадена точка на сгъстяване x_0 за нейната дефиниционна област, когато не съществува границата на $f(x)$ при $x \to x_0$, или когато въпросната граница съществува но е различна от стойността $f(x_0)$. Това обаче не изключва възможността да съществува някоя едностранна граница $f(x_0 - 0)$ и/или $f(x_0 + 0)$, което само по себе си е достатъчно полезна информация за поведението на функцията в околност на x_0.

Полезно е да разграничим някои случаи на прекъснатост, при които поведението на функцията е достатъчно регулярно и може да послужи като основа на други разсъждения.

Отстранимо прекъсване. Казва се, че функцията $f(x)$ има отстранимо прекъсване в точката x_0 когато лявата и дясната граница на $f(x)$ при $x \to x_0$ съществуват и са равни, $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0)$, т.е. когато функцията има граница в точката x_0. В този случай можем да отстраним прекъсването, полагайки $f(x_0) = f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0)$. Така променената функция е вече непрекъсната в точката x_0.

Пример 6.17. Да разгледаме функцията

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, x \neq 0 \\ 0, x = 0 \end{cases}.$$

Тази функция е прекъсната в точката $x_0 = 0$, понеже

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \neq f(0) = 0 .$$

Точката x_0 обаче е точка на отстранимо прекъсване, понеже границата на функцията в тази точка съществува. Полагайки $f(0) = 1$, получаваме функция, която вече е непрекъсната в x_0.

Въведеното току що понятие за отстранимо прекъсване може да бъде използвано в по-широк смисъл. За случая когато функцията $f(x)$ притежава граница в x_0, $A = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, но в самата точка x_0 не е определена, можем да определим по естествен начин $f(x)$ в точката x_0, полагайки $f(x_0) = A$. Така определената функция се получава непрекъсната в x_0. По този начин функцията $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$, която е определена за всяко $x \neq 0$, може да се определи допълнително в точката $x_0 = 0$ по естествен начин, полагайки $f(0) = 1$.

Прекъсване от първи род. Такова прекъсване е налице, когато лявата и дясната граница на $f(x)$ при $x \to x_0$ съществуват но са различни, $f(x_0 - 0) \neq f(x_0 + 0)$. В този случай функцията може да бъде непрекъсната само отляво, когато $f(x_0 - 0) = f(x_0)$ или само отдясно, когато $f(x_0 + 0) = f(x_0)$. Такава едностранна непрекъснатост може да се осигури променяйки, ако има необходимост, стойността на $f(x_0)$. Ако положим $f(x_0) = f(x_0 - 0)$, ще получим функция непрекъсната отляво, а ако положим $f(x_0) = f(x_0 + 0)$, ще получим функция непрекъсната отдясно.

Прекъсване от втори род. Всяко прекъсване, което не е отстранимо или не е от първи род се нарича прекъсване от втори род.

Идеята за непрекъснатост се явява удобна абстракция за математиката но същевременно отразява и същността на голяма част от заобикалящата ни физическа реалност. Има обаче величини и процеси, чиято вътрешна природа по естествен начин ги прави прекъснати в определен смисъл. Математическите модели за прекъснати величини се отличават с висока степен на трудност.

Тук ние ще боравим само с функции, които са определени и непрекъснати в някакъв краен брой интервали. За да притежават тези функции достатъчен запас от съдържателни свойства е необходимо обаче те да бъдат не само непрекъснати, но и да притежават определен брой производни, което ще бъде разисквано в следващите лекции.

3. Производни. ***Някои основни граници.*** Тук ще опишем някои основни граници, с помощта на които по-нататък ще изведем производните на основните елементарни функции.

Ще докажем, че

(6.1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$.

Нека $0<x<\dfrac{\pi}{2}$. Да разгледаме окръжност с център O и радиус $R>0$, както е показано на рис. 6.8, $\angle AOB = x$ и $AO\perp AC$. Тогава лицето на триъгълник OAB е по-малко от лицето на сектора OAB, което от своя страна е по-малко от лицето на правоъгълния триъгълник OAC (Рис. 6.8)

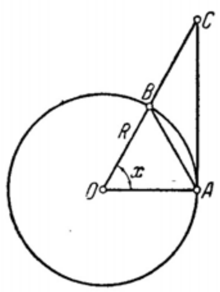

Рис. 6.8.

Сега от формулите за лице на триъгълник и сектор имаме

$$\frac{1}{2}R^2\sin x<\frac{1}{2}R^2x<\frac{1}{2}R^2\,\mathrm{tg}\,x,$$

следователно

$$\sin x<x<\mathrm{tg}\,x.$$

Като разделим $\sin x$ на всеки член на последното неравенство, получаваме

$$1>\frac{\sin x}{x}>\cos x,$$

откъдето, чрез лемата за двамата полицаи, получаваме (6.1), понеже функцията $\cos x$ е непрекъсната и $\lim\limits_{x\to 0}\cos x=1$.

Вече изведохме границата

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e\text{, следователно }\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e,$$

където e е основата на натуралния логаритъм. От нея, след смяна на променливата $x\to\dfrac{1}{x}$, получаваме следната граница

(6.2) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$.

След логаритмуване на съотношението (6.2), отчитайки непрекъснатостта на логаритмичната функция, получаваме

(6.3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1$.

Да положим $x=\ln(1+y)$, т.е $y=e^x-1$. Ако x клони към нула то и y клони към нула и освен това. От (6.3) имаме $\lim\limits_{y\to 0}\frac{\ln(1+y)}{y}=1$, следователно $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln e^x}{e^x-1}=1$, което дава следната основна граница

(6.4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$.

Да разгледаме функцията $y=(1+x)^\alpha-1=e^{\alpha\ln(x+1)}-1$. Имаме

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\alpha\ln(1+x)}-1}{x}=\alpha\lim_{x\to 0}\frac{e^{\alpha\ln(1+x)}-1}{\alpha\ln(1+x)}\frac{\ln(1+x)}{x},$$

следователно

(6.5) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x}=\alpha$.

Производна на функция. Нека функцията $y=f(x)$ е определена в околност на точката x_0. Нека Δx е някакво нарастване (промяна) на аргумента, което води до нарастване на функцията $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$. Отношението

(6.6) $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$

се нарича диференчно частно на $f(x)$ в точката x_0.

Определение 6.7. Нека съществува границата на диференчното частно (6.6) при $\Delta x\to 0$. Тогава нейната стойност се нарича производна на функцията $f(x)$ в точката x_0 и се бележи с $f'(x_0)$.

С други думи

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

Пример 6.18. Да разгледаме функцията $y=f(x)=x^2$. Тогава

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{x}=\frac{(x+\Delta x)^2-x^2}{\Delta x}=2x+\Delta x,$$

откъдето намираме

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{x}=\lim_{\Delta x\to 0}(2x+\Delta x)=2x,$$

следователно, ако $y=x^2$, то $y'=2x$.

Производната има ясен геометричен смисъл (Рис. 6.9).

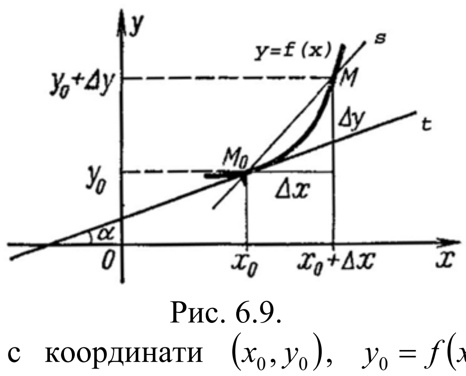

Рис. 6.9.

Нека M_0 е точката с координати (x_0,y_0), $y_0=f(x_0)$, а M има координати $(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)$. Правата s през точките M_0 и M, която е секуща за графиката на $f(x)$, има уравнение

$$s : y = f(x_0) + \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}(x - x_0) = f(x_0) + \frac{\Delta y}{\Delta x}(x - x_0).$$

След граничния преход при $\Delta x \to 0$, секущата s преминава в допирателната t към графиката на функцията за точка x_0, с уравнение

(6.7) $\quad t : y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.

Следователно, ако функцията $f(x)$ има производна в x_0, то в тази точка съществува допирателна към графиката на $f(x)$, при което въпросната допирателна има уравнение (6.7). Този извод трябва да се схваща като определение за допирателна. От геометричната конструкция се вижда, че за ъгловия коефициент на допирателната е изпълнено $\mathrm{tg}\,\alpha = f'(x_0)$.

Чрез символа $o(q)$ ще означаваме величина, за която $\lim\limits_{q \to 0} \frac{o(q)}{q} = 0$ (чете се "о малко").

Определение 6.8. Нека функцията $y = f(x)$ е определена в някаква околност на точката x_0, при което нарастването $\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ може да се представи във вида $\Delta f(x_0) = A\Delta x + o(\Delta x)$, където $A = A(x_0)$ е константа (A не зависи от Δx). Тогава се казва, че $f(x)$ е диференцируема в x_0, а произведението $A\Delta x$ се нарича диференциал на $f(x)$ в x_0 и се бележи с dy.

По този начин $\Delta y = dy + o(\Delta x)$, където $dy = A\Delta x$.

Теорема 6.11. Функцията $f(x)$ е диференцируема в точката x_0 тогава и само тогава, когато $f(x)$ има производна в x_0, при което производната и диференциала са свързани с формулата $dy = f'(x_0)\Delta x$.

Доказателство. Нека $f(x)$ е диференцируема в x_0. Тогава за диференчното частно имаме

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = A + \frac{o(\Delta x)}{\Delta x},$$

следователно

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = A + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{o(\Delta x)}{\Delta x} = A,$$

което означава, че $f'(x_0) = A$ и $dy = f'(x_0)\Delta x$. Обратното (също) е очевидно.

В частност, за $f(x) = x$ имаме $f'(x) \equiv 1$ и $dx = \Delta x$, следователно $dy = f'(x_0)dx$, което обосновава следното означение за производна

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx} \text{ и } y' = \frac{dy}{dx}.$$

От формулата за производна следва, че ако $f(x)$ е диференцируема в точката x_0, то $f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$, в околност на x_0 и $f(x)$ малко се отличава от линейна функция в тази околност, което съставлява смисъла на определението $f(x)$ да бъде диференцируема. Теорема 6.11 показва, че условията $f(x)$ да бъде диференцируема и $f(x)$ да има на производна са еквивалентни.

Казва се, че $f(x)$ е диференцируема в интервала (a, b), когато $f(x)$ е диференцируема във всяка точка от този интервал.

Верността на следващото твърдение следва непосредствено от определенията.

Твърдение 6.12. Нека $f(x)$ е диференцируема в точката x_0. Тогава $f(x)$ е непрекъсната в x_0. ■

От непрекъснатостта на една функция в дадена точка обаче не следва, че тя е диференцируема.

Пример 6.19. Функцията $f(x)=|x|$ е непрекъсната в $x_0=0$ но няма производна в тази точка.

Съществуват по-сложни примери за функция, която е определена и непрекъсната за всяко $x \in \mathrm{R}$, но няма производна в нито една точка.

Твърдение 6.13. Нека функциите $f(x)$ и $g(x)$ са диференцируеми в точката x. Тогава:

1) Функцията $f(x)+g(x)$ също е диференцируема в x, при което

$$[f(x)+g(x)]' = f'(x)+g'(x).$$

2) Функцията $f(x)g(x)$ също е диференцируема в x, при което

$$[f(x)g(x)]' = f'(x)g(x)+f(x)g'(x).$$

3) Ако $g(x)\neq 0$, то функцията $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ също е диференцируема в x, при което

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}.$$

Доказателство. **1**) Да положим $h(x)=f(x)+g(x)$ и да разгледаме диференчното частно на $h(x)$. Имаме

$$\frac{h(x+\Delta x)-h(x)}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)+g(x+\Delta x)-f(x)-g(x)}{\Delta x}=$$
$$=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}+\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}$$

следователно

$$h'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{h(x+\Delta x)-h(x)}{\Delta x}=$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}=f'(x)+g'(x)$$

2) Да положим $h(x)=f(x)g(x)$ и да разгледаме диференчното частно на $h(x)$. Имаме

$$\frac{h(x+\Delta x)-h(x)}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)g(x+\Delta x)-f(x)g(x)}{\Delta x}=$$
$$=\frac{f(x+\Delta x)g(x+\Delta x)-f(x)g(x+\Delta x)+f(x)g(x+\Delta x)-f(x)g(x)}{\Delta x}=$$
$$=\frac{f(x+\Delta x)g(x+\Delta x)-f(x)g(x+\Delta x)}{\Delta x}+\frac{f(x)g(x+\Delta x)-f(x)g(x)}{\Delta x}=$$
$$=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}g(x+\Delta x)+f(x)\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}$$

следователно

$$h'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{h(x+\Delta x)-h(x)}{\Delta x}=$$
$$=\left[\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\right]\left[\lim_{\Delta x\to 0}g(x+\Delta x)\right]+f(x)\lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}\right]=$$
$$=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$$

Формулата за диференциране на частно се доказва по аналогичен начин. По нататък ще приведем още едно доказателство на тази формула въз основа на известната вече формула за диференциране на произведение и верижното правило за диференциране на съставни функции. ■

Пример 6.20. Ако $f(x)=x^2\sin x$, то

$$f'(x)=2x\sin x+x^2\cos x,$$

и ако $f(x)=\dfrac{\sin x}{x^2}$, то

$$f'(x)=\frac{x^2\cos x-2x\sin x}{x^4}.$$

Ако функцията $f(x)$ е константа, $f(x)=\lambda=const$, то нейната производна е навсякъде равна на нула, което веднага се вижда от определението, понеже всичките диференчни частни на $f(x)$ са нули. Сега от правилото за диференциране на произведение следва, че ако $f(x)$ е диференцируема и λ е константа, то функцията $\lambda f(x)$ също е диференцируема, при което $[\lambda f(x)]'=\lambda f'(x)$. От тук и от твърдение 6.2 следва, че всяка линейна комбинация от диференцируеми функции също е диференцируема, при което производната е съответната линейна комбинация от производни,

$$\left[\sum_{k=1}^{n}\lambda_k f_k(x)\right]'=\sum_{k=1}^{n}\lambda_k f_k'(x),$$

което означава, че ***диференцирането е линейна операция***. Начинът за диференциране на произведение обаче силно отличава диференцирането от други линейни операции. Прилагайки последователно правилото за диференциране на произведение на две функции получаваме

$$[f(x)g(x)h(x)]'=f'(x)g(x)h(x)+f(x)g'(x)h(x)+f(x)g(x)h'(x),$$

което лесно се обобщава за повече на брой множители.

Пример 6.20. Ако $f(x)=7x^2-5\sin x$, то

$$f'(x)=14x-5\cos x.$$

Следващото твърдение касае правилото за диференциране на съставни функции.

Твърдение 6.14 (*верижно правило*). Нека функцията $f(x)$ е диференцируема в точката x_0, а функцията $\varphi(t)$ е диференцируема в точката t_0 и $x_0=\varphi(t_0)$. Тогава съставната функция $F(t)=f(\varphi(t))$ е диференцируема в точката t_0, при което $F'(t_0)=f'(x_0)\varphi'(t_0)$.

Доказателство. Означаваме $\Delta F=F(t_0+\Delta t)-F(t_0)$, $\Delta f=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ и $\Delta\varphi=\varphi(t_0+\Delta t)-\varphi(t_0)$. Да разгледаме диференчното частно на $F(t)$ в точката t_0,

$$\frac{\Delta F}{\Delta t}=\frac{f(\varphi(t_0+\Delta t))-f(\varphi(t_0))}{\Delta t}=\frac{f(\varphi(t_0)+\Delta\varphi)-f(\varphi(t_0))}{\Delta t}=$$
$$=\frac{f(\varphi(t_0)+\Delta\varphi)-f(\varphi(t_0))}{\Delta\varphi}\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$$

Функцията $\varphi(t)$ е непрекъсната в t_0, понеже е диференцируема, следователно нарастването $\Delta\varphi$ клони към нула при $\Delta t\to 0$. От горното представяне следва

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta F}{\Delta t}=\lim_{\Delta\varphi\to 0}\frac{f(\varphi(t_0)+\Delta\varphi)-f(\varphi(t_0))}{\Delta\varphi}\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}=f'(\varphi(t_0))\varphi'(t_0),$$

което доказва твърдението. Тук, за да спестим технически усложнения, мълчаливо предполагахме, че се разглеждат само нараствания $\Delta\varphi\neq 0$. ■

Пример 6.21. Ако $f(x)=(\sin x)^2$, то

$$f'(x)=2\sin x\cos x.$$

При извеждане производните на обратните тригонометрични функции ще използваме факта, че ако една диференцируема функция има обратна, то обратната също е диференцируема.

Твърдение 6.15. Нека функцията $y = f(x)$ е строго монотонна и диференцируема в интервала (a,b). Тогава нейната обратна $x = f^{-1}(y)$ (която съществува и е непрекъсната) е диференцируема, при което $\left[f^{-1}(y)\right]' = \dfrac{1}{f'(x)}$. ■

Формулата за производната на обратната функция се получава от верижното правило след диференциране на тъждеството $f^{-1}(f(x)) = x$.

4. Производни на основните елементарни функции. В този раздел ще изведем производните на основните елементарни функции въз основа на основните граници, приведени в началото и правилата за диференциране.

Експоненциална и логаритмична функция. Нека $y = e^x$. Тогава

$$\frac{e^{x+\Delta x} - e^x}{\Delta x} = \frac{e^x e^{\Delta x} - e^x}{\Delta x} = e^x \, \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x}.$$

Сега от основната граница (6.4) получаваме

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{x+\Delta x} - e^x}{\Delta x} = e^x \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = e^x,$$

следователно, ако $y = e^x$, то $y' = e^x$. Експоненциалната функция съвпада със своята производна. Такова свойство има и всяка функция от вида λe^x, където λ е константа.

Нека $y = \ln x$, $x > 0$. Тогава

$$\frac{\ln(x+\Delta x) - \ln x}{\Delta x} = \frac{\ln\left(1 + \dfrac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x} = \frac{\ln\left(1 + \dfrac{\Delta x}{x}\right)}{x \dfrac{\Delta x}{x}}.$$

Сега от основната граница (6.3) получаваме

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\ln(x+\Delta x) - \ln x}{\Delta x} = \frac{1}{x} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\ln\left(1 + \dfrac{\Delta x}{x}\right)}{\dfrac{\Delta x}{x}} = \frac{1}{x},$$

следователно ако $y = \ln x$, то $y' = \dfrac{1}{x}$. Производната на $\ln x$ може да бъде изведена въз основа на факта, че функциите e^x и $\ln x$ са взаимно обратни, което означава, че са валидни тъждествата $\ln e^x = x$ за всяко $x \in \mathrm{R}$ и $e^{\ln x} = x$ за $x > 0$. Като диференцираме тъждеството $\ln e^x = x$ получаваме $\left[\ln e^x\right]' = \left[\ln' e^x\right] e^x = 1$, следователно $\ln' e^x = \dfrac{1}{e^x}$, откъдето като положим $y = e^x$, получаваме $\left[\ln y\right]' = \dfrac{1}{y}$.

Общата показателна функция (Рис. 6.10) $y = a^x$, $a > 0$, се определя чрез експоненциалната, $y = e^{x \ln a}$, следователно $y' = e^{x \ln a} \ln a = a^x \ln a$.

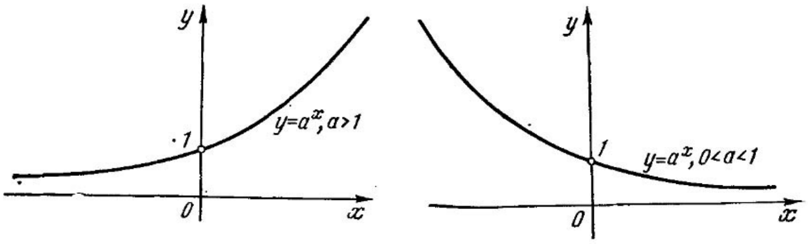

Рис. 6.10.

За логаритмичната функция $\log_a x$ (Рис. 6.11) при произволна основа $a > 0$

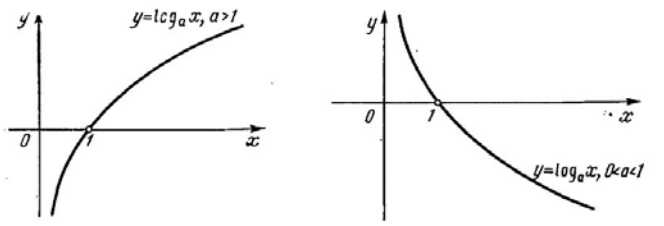

Рис. 6.11.

имаме $\log_a x = \dfrac{\ln x}{\ln a}$, следователно $y' = \dfrac{1}{x\ln a}$.

Степенна функция. Нека $y = x^{\alpha}$, $x > 0$. Тук α е произволно реално число. Степенната функция (Рис. 6.12) се определя чрез експонента и логаритъм по следния начин $y = e^{\alpha\ln x}$.

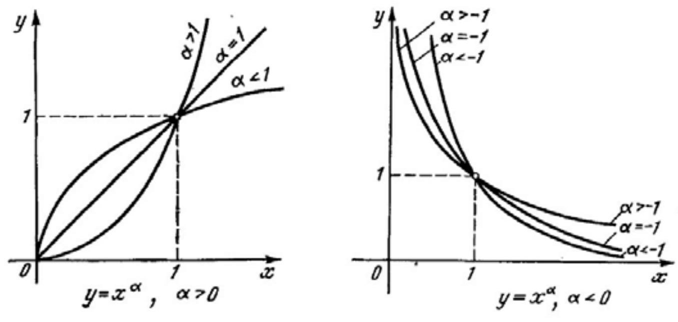

Рис. 6.12.

Да отбележим специално, че в общия случай степента A^B, където $A > 0$ и B са някакви величини също се определя по този начин, $A^B = e^{B\ln A}$. От верижното правило имаме

$$y' = \left[e^{\alpha\ln x}\right]' = e^{\alpha\ln x}\left[\alpha\ln x\right]' = x^{\alpha}\alpha\frac{1}{x} = \alpha x^{\alpha-1},$$

следователно, ако $y = x^{\alpha}$, то $y' = \alpha x^{\alpha-1}$. Може да се докаже, че тази формула е валидна и в случаите, когато степента α позволява функцията да се разглежда и за $x < 0$.

Пример 6.22. Ако $y = \sqrt{x}$, то $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ и ако $y = \dfrac{1}{x}$, то $y' = -\dfrac{1}{x^2}$.

Последното заедно с верижното правило ни дава друго доказателство на правилото за диференциране на частно. Имаме

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \left[f(x)\frac{1}{g(x)}\right]' = \left[f(x)(g(x))^{-1}\right]' = f'(x)(g(x))^{-1} + f(x)\left[(g(x))^{-1}\right]'.$$

От друга страна $\left[(g(x))^{-1}\right]' = (-1)(g(x))^{-2}g'(x) = -\dfrac{g'(x)}{g^2(x)}$, следователно

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = f'(x)(g(x))^{-1} - f(x)\frac{g'(x)}{g^2(x)} = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}.$$

Тригонометрични функции. Да разгледаме отначало основните тригонометрични функции $\sin x$ и $\cos x$ (Рис. 6.13), които са определени за всяко $x \in \mathrm{R}$ и имат период 2π.

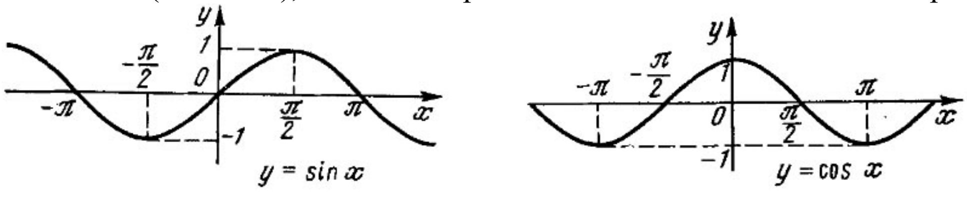

Рис. 6.13.

За функцията $y = \sin x$ имаме

$$\frac{\sin(x+\Delta x)-\sin x}{\Delta x} = \frac{2\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} = \frac{\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\frac{\Delta x}{2}}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right).$$

Сега от основната граница (6.1) получаваме

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin(x+\Delta x)-\sin x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\frac{\Delta x}{2}}\lim_{\Delta x\to 0}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right) = \cos x,$$

следователно ако $y = \sin x$, то $y' = \cos x$.

Нека $y = \cos x$. Тогава $y = \sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$, следователно съгласно верижното правило

$$y' = \left[\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right]'\left(\frac{\pi}{2}-x\right)' = \left[\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right](-1),$$

следователно ако $y = \cos x$, то $y' = -\sin x$.

Производните на функциите $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$ (Рис. 6.14) се получават като следствие. Нека $y = \operatorname{tg} x$, $x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi$, $n \in \mathrm{Z}$. Тогава

$$y' = \left[\frac{\sin x}{\cos x}\right]' = \frac{(\sin x)'\cos x - \sin x(\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

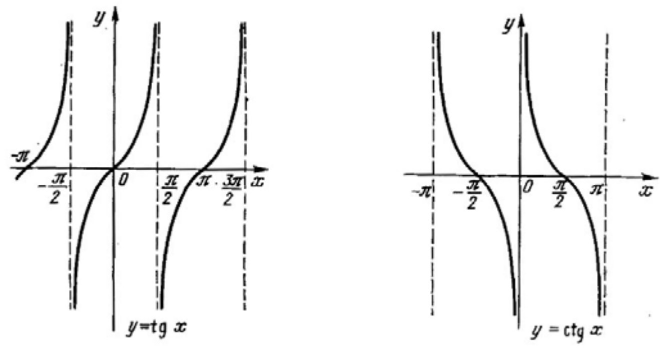

Рис. 6.14.

Аналогично намираме, че ако $y = \operatorname{ctg} x$, $x \neq n\pi$, $n \in \mathrm{Z}$, то $y' = -\frac{1}{\sin^2 x}$.

Обратни тригонометрични функции. **1) Функцията** $\arcsin x$**.** Тази функция се определя като обратна на функцията $\sin x$ в интервала $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, където $\sin x$ е строго растяща и следователно притежава обратна (Рис 6.15).

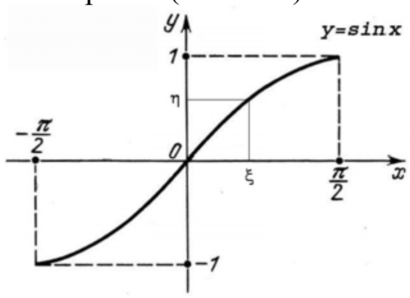

Рис. 6.15.

Ако $\eta = \sin\xi$, за някое ξ, $-\frac{\pi}{2} \le \xi \le \frac{\pi}{2}$, то по определение $\xi = \arcsin\eta$. По този начин функцията $y = \arcsin x$ е определена в интервала $[-1,1]$ и приема стойности в интервала $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Например, $\arcsin 0 = 0$, $\arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$, $\arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$ и т.н. Функцията $\arcsin x$ е нечетна и нейната графика е изобразена на рис. 6.16.

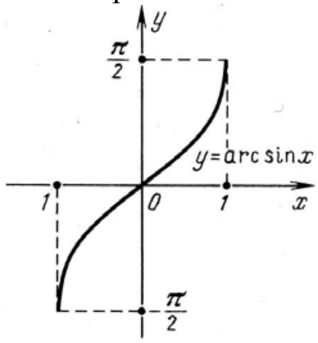

Рис. 6.16.

Функциите $\sin x$ и $\arcsin x$ са взаимно обратни, следователно са изпълнени тъждествата $\sin(\arcsin x) = x$ за $x \in [-1,1]$ и $\arcsin(\sin x) = x$ за $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ (последното се получава от изискването x да бъде стойност на $\arcsin x$). Да диференцираме тъждеството $\arcsin(\sin x) = x$. Съгласно верижното правило получаваме

$$[\arcsin(\sin x)]' = \arcsin'(\sin x)\cos x = 1.$$

Да положим $\sin x = u$. Имаме $\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x}$, понеже $\cos x \ge 0$ за $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Сега от горното равенство намираме

$$[\arcsin u]' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}},$$

следователно, ако $y = \arcsin x$, то $y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

2) **Функцията** $\arccos x$. Тази функция се определя като обратна на функцията $\cos x$ в интервала $[0,\pi]$, където $\cos x$ е строго намаляваща и следователно притежава обратна. Ако $\eta = \cos\xi$, за някое ξ, $0 \le \xi \le \pi$, то по определение $\xi = \arccos\eta$. По този начин функцията $y = \arccos x$ е определена в интервала $[-1,1]$ и приема стойности в интервала $[0,\pi]$. Например, $\arccos 0 = \frac{\pi}{2}$, $\arccos\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$, $\arccos 1 = 0$ и т.н. Графиката на функцията $\arccos x$ е изобразена на рис. 6.17.

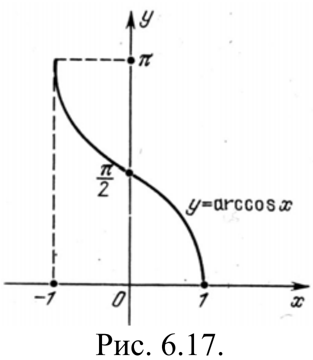

Рис. 6.17.

Функциите $\cos x$ и $\arccos x$ са взаимно обратни, следователно са изпълнени тъждествата $\cos(\arccos x) = x$ за $x \in [-1,1]$ и $\arccos(\cos x) = x$ за $x \in [0,\pi]$ (последното се получава от изискването x да бъде стойност на $\arccos x$). Да диференцираме тъждеството $\arccos(\cos x) = x$. Съгласно верижното правило получаваме

$$[\arccos(\cos x)]' = -\arccos'(\cos x)\sin x = 1.$$

Да положим $\cos x = u$. Имаме $\sin x = \sqrt{1-\cos^2 x}$, понеже $\sin x \geq 0$ за $x \in [0, \pi]$. Сега от горното равенство намираме

$$[\arccos u]' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}},$$

следователно, ако $y = \arccos x$, то $y' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

3) Функцията $\operatorname{arctg} x$. Тази функция се определя като обратна на функцията $\operatorname{tg} x$ в интервала $\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$, където $\operatorname{tg} x$ е строго растяща и следователно притежава обратна. Ако $\eta = \operatorname{tg} \xi$, за някое ξ, $-\dfrac{\pi}{2} < \xi < \dfrac{\pi}{2}$, то по определение $\xi = \operatorname{arctg} \eta$. По този начин функцията $y = \operatorname{arctg} x$ е определена в интервала $(-\infty, \infty)$ и приема стойности в интервала $\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$. Например, $\operatorname{arctg} 0 = 0$, $\operatorname{arctg} 1 = \dfrac{\pi}{4}$ и т.н. Функцията $\operatorname{arctg} x$ е нечетна и нейната графика е изобразена на рис. 6.18.

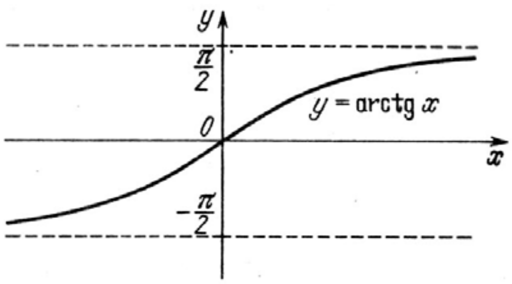

Рис. 6.18.

Функциите $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{arctg} x$ са взаимно обратни, следователно са изпълнени тъждествата $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x$ за всяко $x \in \mathsf{R}$ и $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) = x$ за $x \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ (последното се получава от изискването x да бъде стойност на $\operatorname{arctg} x$). Да диференцираме тъждеството $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) = x$. Съгласно верижното правило получаваме

$$[\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x)]' = \operatorname{arctg}'(\operatorname{tg} x)\frac{1}{\cos^2 x} = 1.$$

Да положим $\operatorname{tg} x = u$. Имаме $\cos^2 x = \dfrac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x}$. Сега от горното равенство намираме

$$[\operatorname{arctg} u]' = \frac{1}{1+u^2},$$

следователно, ако $y = \operatorname{arctg} x$, то $y' = \dfrac{1}{1+x^2}$.

Граничните съотношения

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} x = \infty \text{ и } \lim_{x \to -\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} x = -\infty$$

дават основания да положим

$\operatorname{arctg}\infty = \dfrac{\pi}{2}$ и $\operatorname{arctg}(-\infty) = -\dfrac{\pi}{2}$.

4) Функцията $\operatorname{arcctg} x$. Тази функция се определя като обратна на функцията $\operatorname{ctg} x$ в интервала $(0,\pi)$, където $\operatorname{ctg} x$ е строго намаляваща и следователно притежава обратна. Ако $\eta = \operatorname{ctg}\xi$, за някое ξ, $0 < \xi < \pi$, то по определение $\xi = \operatorname{arcctg}\eta$. По този начин функцията $y = \operatorname{arcctg} x$ е определена в интервала $(-\infty,\infty)$ и приема стойности в интервала $(0,\pi)$. Например, $\operatorname{arcctg} 0 = \dfrac{\pi}{2}$, $\operatorname{arcctg} 1 = \dfrac{\pi}{4}$ и т.н. Графиката на функцията $\operatorname{arcctg} x$ е изобразена на рис. 6.19.

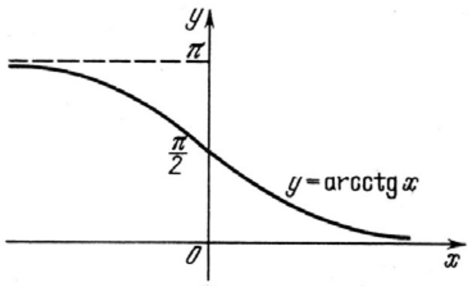

Рис. 6.19.

Функциите $\operatorname{ctg} x$ и $\operatorname{arcctg} x$ са взаимно обратни, следователно са изпълнени тъждествата $\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x) = x$ за всяко $x \in \mathrm{R}$ и $\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} x) = x$ за $x \in (0,\pi)$ (последното се получава от изискването x да бъде стойност на $\operatorname{arcctg} x$). Както в предишната точка намираме, че ако $y = \operatorname{arcctg} x$, то $y' = -\dfrac{1}{1+x^2}$.

Граничните съотношения $\lim\limits_{x\to\pi} \operatorname{ctg} x = -\infty$ и $\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{ctg} x = \infty$ дават основания да положим $\operatorname{arcctg}\infty = 0$ и $\operatorname{arcctg}(-\infty) = \pi$.

5. Производни и диференциали от по-висок ред. Втората производна $f''(x)$ на функцията $f(x)$ се определя като първа производна на $f'(x)$, третата производна $f'''(x)$ се определя като първа производна на $f''(x)$ и т.н. Например, ако $y = \sin x$, то $y' = \cos x$, $y'' = -\sin x$, $y''' = -\cos x$, $y^{\mathrm{iv}}(x) = \sin x$ и т.н. За n-та производна на $f(x)$ понякога е удобно да се използва означението $f^{(n)}(x)$, $n = 0,1,2,\ldots$, при което по определение нулевата производна на $f(x)$ съвпада със самата $f(x)$, $f^{(0)}(x) \equiv f(x)$. Вторият диференциал $d^2 f(x) = f''(x)dx^2$ $\left(dx^2 = (dx)^2\right)$ се определя като първи диференциал на $df(x)$ и т.н. Без да правим уточнения за целесъобразността на това определение полагаме $d^n f(x) = f^{(n)}(x)dx^n$, $n = 0,1,2,\ldots$, като полагаме $d^0 f(x) \equiv f(x)$.

За втората производна на произведение на функциите $f(x)$ и $g(x)$ имаме

$$\begin{aligned}
[f(x)g(x)]'' &= [f'(x)g(x) + f(x)g'(x)]' = \\
&= f''(x)g(x) + f'(x)g'(x) + f'(x)g'(x) + f(x)g''(x) = \\
&= f''(x)g(x) + 2f'(x)g'(x) + f(x)g''(x)
\end{aligned}$$

което наподобява познатата формула $(a+b)^2 = a^2b^0 + 2a^1b^1 + a^0b^2$. Тази аналогия е закономерна и за производни от по-висок ред.

Да припомним биномната формула на Нютон. За всеки две величини a, b и всяко цяло неотрицателно число n е изпълнено равенството

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k =$$

$$= a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-2)}{2} a^2 b^{n-2} + \cdots + \frac{n(n-2)}{2} a^{n-2} b^2 + nab^{n-1} + b^n$$

където $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{1.2\cdots k}$ са биномните коефициенти. По определение $\binom{n}{0} = 1$. Биномните коефициенти са симетрични, $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$, $k = 0,1,\ldots,n$. Символът $n!$, $n = 1,2,3,\ldots$, означава произведението на всичките естествени числа от 1 до n, например $3! = 1.2.3 = 6$. По определение $0! = 1$.

Теорема 6.13 *(формула на Лайбниц)*. Нека функциите $f(x)$ и $g(x)$ имат производни до ред n $(n = 0,1,2,\ldots)$. Тогава е в сила формулата

(6.8) $$[f(x)g(x)]^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)}(x) g^{(k)}(x) =$$

$$= f^{(n)}(x)g(x) + nf^{(n-1)}(x)g'(x) + \cdots + nf'(x)g^{(n-1)}(x) + f(x)g^{(n)}(x)$$

Доказателство. От последователното прилагане формулата за диференциране на произведение се вижда, че

$$[f(x)g(x)]^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k f^{(n-k)}(x) g^{(k)}(x),$$

където λ_0, λ_1, ..., λ_n са коефициенти, които зависят само от реда на диференциране n и не зависят от конкретния избор на функциите $f(x)$ и $g(x)$. Това ни дава възможност да определим въпросните коефициенти чрез специален избор на функциите $f(x) = e^{ax}$ и $g(x) = e^{bx}$, където $a \neq b$ са някакви константи. Лесно се проверява, че $f^{(k)}(x) = a^k e^{ax}$ и $g^{(k)}(x) = b^k e^{bx}$, за всяко цяло неотрицателно k. От друга страна $f(x)g(x) = e^{(a+b)x}$ и следователно $[f(x)g(x)]^{(n)} = (a+b)^n e^{(a+b)x}$. Като заместим в горната формула и съкратим всички събираеми на $e^{ax}e^{bx}$ намираме

(6.9) $$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k a^{n-k} b^k,$$

което означава, че $\lambda_k = \binom{n}{k}$, $k = 0,1,\ldots,n$, понеже биномните коефициенти са единствените, за които равенството (6.9) е изпълнено при всеки избор на константите a и b. С това формулата (6.8) е доказана. ■

Пример 6.23. За функцията $f(x) = e^x x^2$ да намерим $f^{(100)}(x)$. По формулата на Лайбниц при $f(x) = e^x$ и $g(x) = x^2$ имаме

$$f^{(100)}(x) = \left(e^x\right)^{(100)}\left(x^2\right)^{(0)} + 100\left(e^x\right)^{(99)}\left(x^2\right)^{(1)} + \frac{100.99}{2}\left(e^x\right)^{(98)}\left(x^2\right)^{(2)}.$$

Следващите събираеми са нули, понеже всички производни от ред трети и по-висок на функцията $g(x) = x^2$ са тъждествено нули. Следователно

$$f^{(100)}(x) = e^x x^2 + 100e^x(2x) + \frac{100.99}{2} e^x 2 = e^x\left[x^2 + 200x + 9900\right].$$

Едностранни и безкрайни производни. По аналогия с едностранните граници могат да се въведат едностранни производни. Ако функцията $f(x)$ е непрекъсната отляво (отдясно) в точката x_0 и съществува границата

$$\lim_{\Delta x \to -0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} \quad \left(\lim_{\Delta x \to +0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\right),$$

то тази граница се нарича ***лява (дясна) производна*** на функцията $f(x)$ в точката x_0 е се бележи с $f'_-(x_0)$ $(f'_+(x_0))$.

Ако функцията е диференцируема в точката x_0, то лявата и дясната производни са равни на стойността на производната в x_0, $f'_-(x_0)=f'_+(x_0)=f'(x_0)$. Обратното също е вярно, ако една функция има лява и дясна производна в дадена точка и те са равни, то функцията е диференцируема в тази точка. Има функции, за които едностранните производни съществуват и са различни.

Пример 6.24. Функцията $y=f(x)=|x|$ (Рис. 6.20) има лява и дясна производни в точката $x_0=0$, при което $f'_-(0)=-1$ и $f'_+(0)=1$.

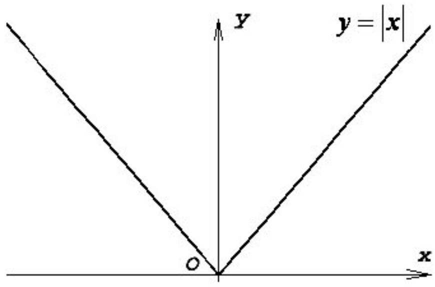

Рис. 6.20.

В този случай се казва, че графиката на $f(x)$ има ***ъглова*** точка за $x=x_0$.

Ако границата на диференчното частно е ∞,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\infty,$$

то се казва, че функцията $f(x)$ има производна в x_0, равна на ∞. Аналогично се постъпва, когато границата е $-\infty$. Пишем $f'(x_0)=\infty$ или $f'(x_0)=-\infty$.

Пример 6.25. Функцията $y=f(x)=\sqrt[3]{x}$ има безкрайна производна в точката $x_0=0$ (Рис. 6.21).

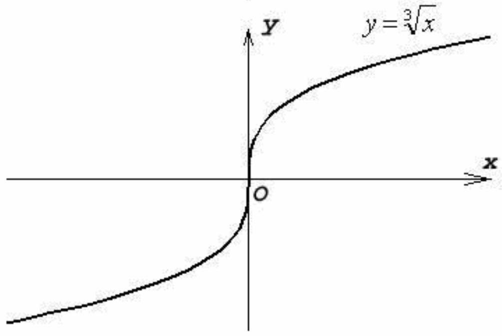

Рис. 6.21.

В този случай вертикалната права $x=x_0$ е допирателна към графиката на $f(x)$.

Има функции, за които в дадена точка и двете едностранни производни са безкрайни, но с различен знак.

Пример 6.26. Да разгледаме функцията $y=f(x)=\sqrt{|x|}$ в точката $x_0=0$ (Рис. 6.22).

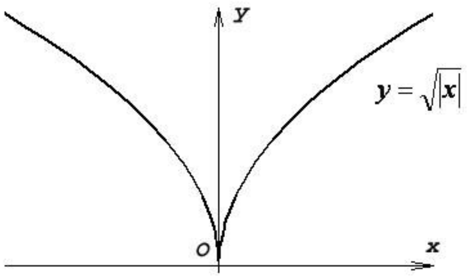

Рис. 6.22.

Имаме $f'_{+}(0) = \infty$ и $f'_{-}(0) = -\infty$. В такъв случай се казва, че графиката на $f(x)$ има ***рогова*** точка за $x = x_0$.