

# КУРСОВА РАБОТА ПО ПРИЛОЖНА МАТЕМАТИКА И СТАТИСТИКА

*Решенията се подготвят задължително в ръкописен вид и се поднасят за проверка при заверка на семестъра и по време на изпита. След представяне на курсовата работа се провежда събеседване върху решенията на задачите.*

*Курсовата работа се приема за успешна, когато обучаемият умее да обяснява основните идеи на представените решения.*

## ЛИНЕЙНА АЛГЕБРА И АНАЛИТИЧНА ГЕОМЕТРИЯ

### Задача 1.

а) Решете уравнението  $z^6 = 1 + i\sqrt{3}$ .

б) Намерете частното и остатъка от делението на полинома

$$f(x) = x^7 - 3x^5 + x^4 - 2x^3 + 3x - 2$$

с полинома  $g(x) = x^2 + x + 1$ .

### Задача 2.

а) Пресметнете детерминантата

$$\begin{vmatrix} 8 & 7 & 2 & 10 \\ -8 & 2 & 7 & 10 \\ 4 & 4 & 4 & 5 \\ 0 & 4 & -3 & 2 \end{vmatrix}.$$

б) Решете уравнението

$$\begin{vmatrix} 3 & x & -x \\ 2 & -1 & 3 \\ x+10 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

### Задача 3.

а) Намерете обратната матрица  $A^{-1}$ , където

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -4 & -3 \\ 0 & 6 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

б) Решете системата посредством формулите на Крамер

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2$$

$$x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = -1$$

$$x_1 - x_2 = 3$$

$$x_3 - x_4 = 1$$

в) Решете матричното уравнение

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 10 & 2 & 7 \\ 10 & 7 & 8 \end{pmatrix}.$$

г) Решете матричното уравнение

$$X \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ -5 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 9 & 0 \\ -8 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Задача 4.**

а) Намерете ранга на матрицата

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 2 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 4 & -3 & 8 & -1 & 11 \end{pmatrix}.$$

б) Намерете общото решение на системата

$$x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 1$$

$$2x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 + 3x_5 = 2$$

$$3x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 1$$

в) Намерете фундаментална система от решения и общото решение на системата

$$3x_1 + x_2 - 8x_3 + 2x_4 + x_5 = 0$$

$$2x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 7x_4 + 2x_5 = 0$$

**Задача 5.** Намерете собствените числа и съответни собствени вектори за матрицата

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Задача 6.** Нека  $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$ ,  $\vec{b} = \vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}$  и  $\vec{c} = 3\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$ .

а) Намерете скаларното произведение  $\vec{a}\vec{b}$ .

б) Намерете векторното произведение  $\vec{b} \times \vec{c}$ .

в) Намерете смесеното произведение  $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ .

г) Намерете лицето на триъгълника с върхове  $M_1(1,1,1)$ ,  $M_2(-1,2,0)$  и  $M_3(2,4,1)$ .

д) Намерете обема на тетраедър с върхове  $M_1(1,-1,2)$ ,  $M_2(0,-1,0)$ ,  $M_3(2,-2,1)$  и  $M_4(1,1,-3)$ .

**Задача 7.** Напишете общото, каноничното и параметричното уравнение на следните равнинни прави.

а) Права  $g$  през точката  $M_0(-1,2) \in g$  и нормален вектор  $\vec{N}(2,2) \perp g$ .

б) Права  $g$  през точката  $M_0(1,1) \in g$  и направляващ вектор  $\vec{a}(0,-1) \parallel g$ .

в) Права  $g$  през точките  $M_1(2,-1) \in g$  и  $M_2(1,3) \in g$ .

**Задача 8.** Намерете общото и параметричното уравнение на следните равнинни.

а) Равнина  $\alpha$  през точката  $M_0(1,2,-1) \in \alpha$  с нормален вектор  $\vec{N}(2,0,-1) \perp \alpha$ .

б) Равнина  $\alpha$  през точката  $M_0(1,1,1)$ , успоредна на векторите  $\vec{a}(0,1,2) \parallel \alpha$  и  $\vec{b}(-1,0,1) \parallel \alpha$ .

в) Равнина  $\alpha$  през трите точки  $M_1(1,2,0) \in \alpha$ ,  $M_2(2,1,1) \in \alpha$  и  $M_3(3,0,1) \in \alpha$ .

**Задача 9.** Напишете каноничното и параметричното уравнение на следните пространствени прави.

а) Права  $g$ , получена от сечението на равнините

$$\alpha: 2x - y + 2z - 3 = 0 \text{ и } \beta: x + 2y - z - 1 = 0.$$

б) Права  $g$  през точката  $M_0(2,0,-3) \in g$  с направляващ вектор  $\vec{a}(2,-3,5) \parallel g$ .

в) Права  $g$  през двете точки  $M_1(1, -2, 1) \in g$  и  $M_2(3, 1, -1) \in g$ .

**Задача 10.** Напишете уравнението на оста на правите

$$g_1: \frac{x-6}{3} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z+3}{4} \text{ и } g_2: \frac{x+1}{3} = \frac{y+7}{-3} = \frac{z-4}{8}$$

и намерете разстоянието между  $g_1$  и  $g_2$ .

### МАТЕМАТИЧЕСКИ АНАЛИЗ

**Задача 11.** Намерете производните на следните функции.

а)  $y = \frac{2x}{x^2 - 1}$

б)  $y = \frac{1+x-x^2}{1-x+x^2}$

в)  $y = \sqrt[3]{\frac{1-x^3}{1+x^3}}$

г)  $y = \sqrt{x+1} - \ln(x - \sqrt{x^2 - \sin x})$

д)  $y = x \arcsin \sqrt{\frac{x}{x+1}} + \operatorname{arctg} \sqrt{x} - \sqrt{x}$

е)  $y = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{2} \ln \frac{1-x}{1+x}$

**Задача 12.** Изследвайте функциите (дефиниционна област, интервали на монотонност, екстремуми, асимптоти) и начертайте графиките.

а)  $y = \frac{x}{x^2 + 1}$

б)  $y = \frac{x^2}{x-1}$

в)  $y = \frac{x^3}{x^2 - 1}$

**Задача 13.** Намерете границите

а)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^3}$

б)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x^2}$

в)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2}$

**Задача 14.** Намерете следните неопределени интеграли

а)  $\int (2 - 3x + \cos 2x - x^4) dx$

б)  $\int \frac{x}{x+3} dx$

в)  $\int x e^{x^2} dx$

г)  $\int \frac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}} dx$

д)  $\int \sqrt[3]{2x-7} dx$

$$\text{е) } \int \frac{dx}{\sqrt{x-5}}$$

$$\text{ж) } \int x \ln x dx$$

$$\text{з) } \int x^2 (e^x - \cos x) dx$$

$$\text{и) } \int \frac{dx}{(1+x^2)^2}$$

$$\text{й) } \int e^x \cos x dx$$

$$\text{к) } \int \frac{x+1}{x^2+x+1} dx$$

$$\text{л) } \int \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}}$$

$$\text{м) } \int \frac{2x+3}{(x-2)(x+3)} dx$$

$$\text{н) } \int \frac{x^2+1}{(x+1)^2(x-1)} dx$$

$$\text{о) } \int \frac{dx}{2+\sqrt{x}}$$

$$\text{п) } \int \frac{1-\sqrt{x+1}}{1+\sqrt{x+1}} dx$$

$$\text{р) } \int \sqrt{x^2+1} dx$$

$$\text{с) } \int \frac{dx}{\cos^3 x}$$

$$\text{т) } \int \frac{dx}{2 \sin x - \cos x + 5}$$

$$\text{у) } \int \frac{\sin x \cos x}{1 + \sin^4 x} dx$$

**Задача 15.** Решете следните определени интеграли

$$\text{а) } \int_0^{\pi} x \sin x dx$$

$$\text{б) } \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{3+2 \cos x}$$

$$\text{в) } \int_4^9 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$$

**Задача 16.** Определете дефиниционното множество на следните функции:

$$\text{а) } u = \sqrt{1-x^2-y^2}$$

$$\text{б) } u = \ln(x-y)$$

$$\text{в) } u = \arccos \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

**Задача 17.** Намерете частните производни от първи и втори ред на функциите:

а)  $u = x^4 + y^4 - 2x^2y^2$

б)  $u = \operatorname{tg} \frac{x^2}{y}$

**Задача 18.** Намерете допирателната равнина и нормалния вектор към повърхнината:

а)  $z = x^2 + y^2$  в точката  $M_0(1,2,5)$ .

б)  $x^2 + y^2 + z^2 = 169$  в точката  $M_0(3,4,12)$ .

**Задача 19.** Разложете в ред на Тейлър функцията  $f(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$  в околност на точката  $M_0(1,1,1)$ .

**Задача 20.** Намерете локалните екстремуми на следните функции:

а)  $z = x^2 - xy + y^2 - 2x + y + 3$

б)  $z = xy \ln \sqrt{x^2 + y^2}$

в)  $u = x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 6z + 2$

**Задача 21.** Намерете точките на условен екстремум за функциите:

а)  $z = xy$  при условие  $x + y = 1$

б)  $u = x^2 + y^2 + z^2$  при условие  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ ,  $a > b > c > 0$ .

**Задача 22.** Пресметнете:

а) Интеграла

$$\iint_A xy dx dy$$

в областта  $A$ , получена от пресичането на линиите  $y = x$  и  $y = x^2$ .

б) Интеграла

$$\iint_A y dx dy$$

в областта  $A$ , получена от пресичането на линиите  $y = x$ ,  $y = 2x$ ,  $y = x^2$ ,  $y = 4x^2$ .

в) Интеграла

$$\iint_A \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$$

в областта  $A: x^2 + y^2 \leq 9$ .

г) Интеграла

$$\iint_A \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} dx dy$$

в областта  $A: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$ ,  $a, b > 0$ .

д) Интеграла

$$\iiint_A xyz dx dy dz,$$

където  $A$  е областта, определена от условията  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ ,  $x \geq 0$ ,  $y \geq 0$ ,  $z \geq 0$ .

**Задача 23.** Решете следните диференциални уравнения и системи.

а)  $y' - \frac{y}{x} = x$

б)  $y' = y \operatorname{tg} x + \frac{1}{\cos x}$

в)  $y'' + y = \cotg x$

г)  $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x}$

д)  $y''' - y = x^3 - 1$

е)  $\begin{cases} x' - x - y = e^t \\ y' + x - y = 0 \end{cases}, x(0) = 0, y(0) = 1$

## ТЕОРИЯ НА ВЕРОЯТНОСТИТЕ И МАТЕМАТИЧЕСКА СТАТИСТИКА

**Задача 24.** Монета се хвърля пет пъти. Намерете вероятността да се падне:

- а) пет пъти герб
- б) два пъти герб
- в) поне един път герб

**Задача 25.** Урна съдържа 8 бели и 12 черни сфери. Изваждат се последователно две сфери. Намерете вероятността:

- а) и двете сфери да бъдат бели
- б) двете сфери да бъдат с различен цвят

**Задача 26.** Двама стрелци поразяват цел с вероятности съответно 0.7 и 0.8. Двамата независимо един от друг произвеждат по един изстрел. Намерете вероятността целта да бъде поразена поне с един изстрел.

**Задача 27.** Дадени са три урни, при което първата съдържа 5 бели и 3 черни сфери, втората съдържа 2 бели и 5 черни сфери, а третата съдържа 7 бели и 2 черни сфери. От случайно избрана урна по случаен начин е избрана една сфера.

- а) Да се намери вероятността избраната сфера да бъде бяла.
- б) Ако е известно, че избраната сфера се е оказала бяла, да се определи вероятността тя да е била избрана от втората урна.

**Задача 28.** Случайната величина  $X$  има нормално разпределение със средно  $\mu = 5$  и дисперсия  $\sigma^2 = 100$ . Намерете вероятността стойностите на величината  $X$  да бъдат в интервала  $(20, 50)$ .

**Задача 29.** Случайните величини  $X$  и  $Y$  имат следната таблица на съвместно разпределение

$X \backslash Y$	20	40	60
10	0.15	0.05	0
20	0.1	0.2	0.1
30	0.05	0.1	0.25

Намерете:

- а) Математическите очаквания и дисперсиите на  $X$  и  $Y$
- б) Коефициента на линейна корелация между  $X$  и  $Y$

**Задача 30.** Проведена е серия от 100 подхвърляния на правилна монета. Намерете вероятността:

- а) Броят на показанията "герб" да бъде между 40 и 60
- б) Броят на попаденията "герб" да бъде поне 30.

**Задача 31.** В един поток от 70 обучаеми след семестриален изпит по ПМС е получено следното разпределение на оценките.

оценка	наблюдавана честота
2	7
3	19
4	23

5	16
6	5

а) Да се начертае честотна хистограма с 5 стълба с ширина единица и с центрове в съответните оценки.

б) Да се пресметнат средното, медианата и модата на наблюденията.

**Задача 32.** В една група обучаеми от 21 души са получени следните резултати от семестриалния изпит по "приложна математика и статистика" и семестриалния изпит по "икономика".

ПМС	2	3	4	5	3	6	3	4	5	5	6	4	5	4	5	3	2	4	5	5	4
ИК	3	2	5	4	2	6	4	5	3	3	5	5	4	6	6	5	4	5	5	4	6

а) Да се пресметнат средните и ковариационната матрица на двете величини.

б) Да се пресметне коефициентът на корелация и да се намерят двете уравнения на линейна регресия.

**Задача 33.** В две групи обучаеми са получени следните резултати от изпит по приложна математика.

първа група – 15 души	втора група – 17 души
2, 2, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 6	2, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 5, 6, 6

а) При ниво на значимост  $\alpha = 0.05$  да се направи сравнение между дисперсиите по теста на Фишер. Да се пресметне оцененото ниво на значимост на проверяващата статистика.

б) При ниво на значимост  $\alpha = 0.05$  да се направи сравнение между средните по теста на Стюдънт. Да се пресметне оцененото ниво на значимост на проверяващата статистика.