Лекция 10

§10. Неопределен интеграл

1. Определение и основни свойства. Нека функциите $f(x)$ и $F(x)$ са определени в отворения интервал (a,b). Казва се, че $F(x)$ е ***примитивна*** на $f(x)$ в интервала (a,b), когато $F'(x)=f(x)$ за всяко $x\in(a,b)$. Например функцията $F(x)=\sin x$ е примитивна на $f(x)=\cos x$. От дефиницията веднага се вижда, че примитивната не се определя еднозначно. Ако $F(x)$ е една примитивна и C е някаква константа, то функцията $F_1(x)=F(x)+C$ също е примитивна, понеже

$$F_1'(x)=\left[F(x)+C\right]'=F'(x)=f(x).$$

По нататък ще докажем, че ако $f(x)$ е непрекъсната в интервала (a,b), то $f(x)$ има поне една примитивна в (a,b) и всичките примитивни се получават от $F(x)$ чрез добавяне на константа. Съвкупността от всичките примитивни на дадена функция $f(x)$ се нарича ***неопределен интеграл*** на $f(x)$ и се бележи с $\int f(x)dx$. По този начин за неопределения интеграл имаме

$$\int f(x)dx=F(x)+C,$$

където $F(x)$ е една (коя да е) примитивна на $f(x)$.

Неопределеният интеграл е множество от функции и по тази причина равенството на два неопределени интеграла трябва да се схваща като равенство на множества. Две множества A и B са равни, когато всеки елемент на A принадлежи на B и обратно, всеки елемент на B принадлежи на A.

Пример 10.1. Неопределеният интеграл от функцията $f(x)=x+1$ можем да изразим по следните два (както и по други) начина

$$\int(x+1)dx=\frac{x^2}{2}+x+C \text{ и } \int(x+1)dx=\frac{(x+1)^2}{2}+C.$$

Множествата от функции

$$A=\left\{F(x)\middle|F(x)=\frac{x^2}{2}+x+C_1\right\} \text{ и } B=\left\{F(x)\middle|F(x)=\frac{(x+1)^2}{2}+C_2\right\},$$

където C_1 и C_2 са произволни константи, са равни. Нека $F(x)\in A$, което означава, че $F(x)=\frac{x^2}{2}+x+C_1$, за някое C_1. Тогава $F(x)=\frac{(x+1)^2}{2}+C_1-\frac{1}{2}$, следователно $F_1(x)\in B$ и като елемент на B се получава при $C_2=C_1-\frac{1}{2}$. По същия се проверява, че всеки елемент на B е елемент на A.

Знакът $\int$ се нарича ***знак на интеграла***, $f(x)$ се нарича ***подинтегрална функция***, а $f(x)dx$ се нарича ***подинтегрален израз***, който може да се запише във вида $F'(x)dx$ или $dF(x)$. Операцията за намиране неопределен интеграл от дадена функция се нарича ***интегриране*** и се явява обратна на операцията диференциране, понеже съгласно определенията

$$\int F'(x)dx=F(x)+C \text{ и } \left(\int f(x)dx\right)'=f(x).$$

При работа с неопределен интеграл както е прието, чрез символа на интеграла $\int f(x)dx$ ще означаваме както съвкупността от всичките примитивни на $f(x)$ така и една конкретна примитивна според обстоятелствата на употреба на интеграла.

Интегрирането притежава следните основни свойства.

Свойство 1. Нека функцията $F(x)$ е диференцируема в отворения интервал Δ. Тогава

(10.1) $\int dF(x) = F(x) + C$, $x \in \Delta$.

Доказателството на това свойство следва направо от определението, понеже лявата страна на (10.1) всъщност е

$$\int dF(x) = \int F'(x)dx .$$

Свойство 2. Нека $f(x)$ е непрекъсната в отворения интервал Δ. Тогава

(10.2) $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$, $x \in \Delta$.

Формулата (10.2) се отнася за всяка примитивна на $f(x)$ и нейната справедливост също следва направо от определенията.

Свойство 3. Нека $f_1(x)$ и $f_2(x)$ са непрекъснати в отворения интервал Δ. Тогава за неопределения интеграл на функцията $f_1(x) + f_2(x)$ е в сила

(10.3) $\int [f_1(x) + f_2(x)]dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx$, $x \in \Delta$.

Нека $F_1(x)$ е една примитивна за $f_1(x)$, а $F_2(x)$ е една примитивна за $f_2(x)$. Тогава

$$[F_1(x) + F_2(x)]' = F_1'(x) + F_2'(x) = f_1(x) + f_2(x),$$

следователно функцията $F(x) = F_1(x) + F_2(x)$ е една примитивна за $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$ и по определение

(10.4) $\int [f_1(x) + f_2(x)]dx = F(x) + C = F_1(x) + F_2(x) + C$.

В дясната страна на (10.3) стоят всевъзможни функции от вида

(10.5) $F_1(x) + C_1 + F_2(x) + C_2$.

За да завършим доказателството на това свойство, остава да съобразим, че множеството от функции $\{F_1(x) + F_2(x) + C\}$, където C е произволна константа, съвпада с множеството от функции от вида (10.5), където C_1 и C_2 са произволни константи.

Свойство 4. Нека $f(x)$ е непрекъсната в отворения интервал Δ и λ е константа. Тогава за интеграла на функцията $\lambda f(x)$ имаме

(10.6) $\int \lambda f(x)dx = \lambda \int f(x)dx$, $x \in \Delta$.

Нека $F(x)$ е една примитивна на $f(x)$, $\int f(x)dx = F(x) + C$. Тогава

$$[\lambda F(x)]' = \lambda F'(x) = \lambda f(x),$$

следователно функцията $\lambda F(x)$ е една примитивна за $\lambda f(x)$ и по определение

$$\int \lambda f(x)dx = \lambda F(x) + C .$$

В дясната страна на (10.6) формално стои множеството от функции $\{\lambda F(x) + \lambda C\}$, за което непосредствено се съобразява, че съвпада с множеството от функции $\{\lambda F(x) + C\}$.

Като комбинираме свойствата 3 и 4 получаваме, че ***интегрирането е линейна операция***, т.е. интеграл от линейна комбинация е равен на съответната линейна комбинация от интеграли,

$$\int [\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x) + \cdots + \lambda_n f_n(x)]dx = \lambda_1 \int f_1(x)dx + \lambda_2 \int f_2(x)dx + \cdots + \lambda_n \int f_n(x)dx .$$

Нека $dF(x)=f(x)dx$ $(F'(x)=f(x))$. Когато преобразуваме израза $f(x)dx$ във вида $dF(x)$ се казва, че функцията $f(x)$ се ***внася под знака на диференциала***, а когато преобразуваме израза $dF(x)$ във вида $f(x)dx$ се казва, че функцията $F(x)$ се ***изнася пред знака на диференциала***.

Твърдение 10.1 ***(смяна на променливата)***. Нека функцията $f(x)$ е непрекъсната в отворения интервал Δ_x, а $\varphi(t)$ е непрекъснато диференцируема в отворения интервал Δ_t, при което $\varphi(\Delta_t)\subset\Delta_x$. Тогава, ако

(10.7) $\int f(x)dx=F(x)+C$,

то

(10.8) $\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt=F(\varphi(t))+C$.

Доказателство. Да положим $\Phi(t)=F(\varphi(t))$. Съгласно верижното правило за диференциране на съставни функции имаме

$$\Phi'(t)=F'(\varphi(t))\varphi'(t)=f(\varphi(t))\varphi'(t),$$

понеже по определение $F'(x)=f(x)$. Това показва, че $\Phi(t)$ е една примитивна за функцията $f(\varphi(t))\varphi'(t)$, откъдето следва верността на формулата (10.8). ■

Формулата (10.8) може да се запише във вида

$$\int f(\varphi(t))d\varphi(t)=F(\varphi(t))+C$$

и да се разглежда като получена от (10.7) след полагането $x=\varphi(t)$ и затова се нарича формула за смяна на променливата.

Важен частен случай на твърдение 10.1 се получава, когато знаем

$$\int f(t)dt=F(t)+C.$$

Тогава след линейната смяна $t=ax+b$, $a\neq 0$, получаваме

$$\int f(ax+b)d(ax+b)=a\int f(ax+b)dx=F(ax+b)+C,$$

следователно

$$\int f(ax+b)dx=\frac{1}{a}F(ax+b)+C.$$

Пример 10.2. За да намерим

$$I=\int\cos(3x+7)dx$$

извършваме линейната смяна $t=3x+7$, след което получаваме

$$\int\cos(3x+7)dx=\frac{1}{3}\sin(3x+7)+C.$$

Практически тези действия се извършват по следния начин. Умножаваме и разделяме интеграла I с константата 3, след което получаваме

$$I=\frac{1}{3}\int\cos(3x+7)d3x.$$

Сега добавяме подходящата константа 7 под знака на диференциала,

$$I=\frac{1}{3}\int\cos(3x+7)d(3x+7)$$

и получаваме

$$I=\frac{1}{3}\int\cos(3x+7)d(3x+7)=\frac{1}{3}\sin(3x+7)+C,$$

понеже $\int \cos x dx = \sin x + C$. Тук под знака на диференциала можехме да добавим коя да е друга константа, но само константата 7 върши определена работа при неговото пресмятане. Последното понякога се нарича ***правило за адитивната константа***, което означава, че под знака на диференциала можем да добавяме подходяща константа, без да променяме интеграла.

Следните неопределени интеграли се използват често и тяхната вярност се доказва чрез непосредствено прилагане на определенията и формулите за производни на основните елементарни функции.

1) $\int x^{\alpha} dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$, $x > 0$, $\alpha \neq -1$.

Тази формула е вярна и когато степента позволява функцията $y = x^{\alpha}$ да бъде определена и за $x \leq 0$.

Пример 10.3. Имаме

$$\int \sqrt{x} dx = \int x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + C \text{ и } \int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}} = \int x^{-\frac{2}{3}} dx = 3x^{\frac{1}{3}} + C = 3\sqrt[3]{x} + C.$$

2) $\int \dfrac{dx}{x+a} = \ln|x+a| + C$, $x \neq -a$,

където a е произволна константа. Да положим

$$y = \ln|x+a| = \frac{1}{2} \ln(x+a)^2.$$

Тогава според верижното правило

$$y' = \frac{1}{2} \frac{1}{(x+a)^2} 2(x+a) = \frac{1}{x+a},$$

което доказва формулата. Да подчертаем, че тя е валидна във всеки от двата отворени интервала $(-\infty, -a)$ и $(-a, \infty)$. В частност тук показахме, че ако $y = \ln|x|$, то $y' = \dfrac{1}{x}$ във всеки от двата интервала $(-\infty, 0)$ и $(0, \infty)$.

Пример 10.4. Имаме

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C \text{ и } \int \frac{dx}{x-3} = \ln|x-3| + C.$$

3) $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$, $a > 0$.

В частност

$$\int e^x dx = e^x + C.$$

Пример 10.5. Имаме

$$\int 2^x dx = \frac{2^x}{\ln 2} + C.$$

4) $\int \cos x dx = \sin x + C$ и $\int \sin x dx = -\cos x + C$.

5) $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$ и $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$.

6) $\int \dfrac{dx}{x^2+a^2} = \begin{cases} \dfrac{1}{a} \operatorname{arctg} \dfrac{x}{a} + C \\ -\dfrac{1}{a} \operatorname{arcctg} \dfrac{x}{a} + C \end{cases}$, където $a > 0$. Тук са възможни два отговора. Обикновено се избира първия, т.е. в повечето случаи пишем

$$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C.$$

Пример 10.6. Имаме

$$\int \frac{dx}{x^2+1} = \operatorname{arctg} x + C \text{ и } \int \frac{dx}{x^2+3} = \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{3}} + C.$$

7) $$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \begin{cases} \arcsin\dfrac{x}{a} + C \\ -\arccos\dfrac{x}{a} + C \end{cases},$$

където $a > 0$. Тук също са възможни два отговора, като обикновено се избира първия, т.е. пишем

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C.$$

Пример 10.7. Имаме

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C \text{ и } \int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = \arcsin\frac{x}{2} + C.$$

8) $$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C,$$

където $a \neq 0$. Тази формула се доказва след интегриране на тъждеството

$$\frac{1}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\left[\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a}\right],$$

$$\int \frac{1}{x^2-a^2}\,dx = \frac{1}{2a}\int \frac{dx}{x-a} - \frac{1}{2a}\int \frac{dx}{x+a} = \frac{1}{2a}\ln|x-a| - \frac{1}{2a}\ln|x+a| + C = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C.$$

Пример 10.8. Имаме

$$\int \frac{dx}{x^2-1} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C \text{ и } \int \frac{dx}{x^2-5} = \frac{1}{2\sqrt{5}}\ln\left|\frac{x-\sqrt{5}}{x+\sqrt{5}}\right| + C.$$

9) $$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2+a}\right| + C,$$

където $a \neq 0$.

Пример 10.9. Имаме

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2-2}\right| + C.$$

10) $$\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C \text{ и } \int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C.$$

2. Непосредствено интегриране. Под това действие се разбира изравняване на величината под знака на диференциала с аргумента на оставащата функция и след това прилагане на някой от изброените по-горе таблични и интеграли.

Пример 10.10. За да пресметнем интеграла

$$I = \int 2xe^{x^2}\,dx,$$

внасяме $2x$ под знака на диференциала, $2xdx = dx^2$, и получаваме

$$I = \int e^{x^2}\,dx^2 = e^{x^2} + C.$$

Тук използвахме, че $\int e^u du = e^u + C$.

Пример 10.11. За интеграла

$$I = \int \frac{\ln x}{x} dx,$$

внасяме $\frac{1}{x}$ под знака на диференциала, $\frac{1}{x} dx = d \ln x$, и получаваме

$$I = \int \ln x d \ln x = \frac{(\ln x)^2}{2} + C.$$

Тук използвахме, че $\int u du = \frac{u^2}{2} + C$.

Пример 10.12. За интеграла

$$I = \int \frac{\sqrt{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}} dx,$$

след внасяне на $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ под знака на диференциала, $\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = d \arcsin x$, намираме

$$I = \int \sqrt{\arcsin x} d \arcsin x = \frac{2}{3}(\arcsin x)^{\frac{3}{2}} + C.$$

Тук използвахме, че $\int \sqrt{u} du = \frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} + C$.

Пример 10.13. За да пресметнем интеграла

$$I = \int \left[6x - 3\cos x + \frac{4 \arccos x}{\sqrt{1-x^2}} \right] dx,$$

ще се възползваме отначало от линейното свойство,

$$I = 6\int x dx - 3\int \cos x dx + 4\int \frac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}} dx = 6I_1 - 3I_2 + 4I_3 + C,$$

където

$$I_1 = \int x dx, \; I_2 = \int \cos x dx, \; I_3 = \int \frac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

Тук I_1, I_2 и I_3 означават по една примитивна от съответните интеграли. Очевидно

$$I_1 = \frac{x^2}{2}, \; I_2 = \sin x.$$

За да пресметнем I_3 внасяме $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ под знака на диференциала, $\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -d \arccos x$. В този случай можехме да внесем $\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = d \arcsin x$, но това би било безполезно. В крайна сметка

$$I_3 = -\int \arccos x d \arccos x = -\frac{(\arccos x)^2}{2},$$

а за началния интеграл I получаваме

$$I = 3x^2 - 3\sin x - 2(\arccos x)^2 + C.$$

Пример 10.14. Да разгледаме интеграла

$$I=\int\frac{dx}{x^2+x+1}.$$

След отделяне на точен квадрат в знаменателя получаваме

$$I=\int\frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}dx,$$

който решаваме по следния начин,

$$I=\int\frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}dx=\int\frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}d\left(x+\frac{1}{2}\right)=\int\frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}d\left(x+\frac{1}{2}\right),$$

$$I=\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)+C=\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)+C.$$

По същия начин след отделяне на точен квадрат и свеждане към познати случаи се решават интегралите

$$\int\frac{px+q}{ax^2+bx+c}dx,\ \int\frac{px+q}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx,\ a\neq 0.$$

3. Интегриране по части. Решаването на даден интеграл $\int f(x)dx$ означава по същество да внесем функцията $f(x)$ под знака на диференциала. Много интеграли могат да се решат, ако първоначално внесем само някаква част от $f(x)$, ако това е изобщо възможно, след което да приложим правилото за интегриране по части.

Твърдение 10.2 *(интегриране по части)*. Нека функциите $f(x)$ и $g(x)$ имат непрекъснати производни в отворения интервал Δ. Тогава

(10.9) $\int f(x)g'(x)dx=f(x)g(x)-\int g(x)f'(x)dx,\ x\in\Delta.$

Доказателство. Съгласно формулата за диференциране на произведение

$$[f(x)g(x)]'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x),$$

$$f(x)g'(x)=[f(x)g(x)]'-f'(x)g(x),$$

следователно

$$\int f(x)g'(x)dx=\int[f(x)g(x)]'dx-\int f'(x)g(x)dx,$$

$$\int f(x)g'(x)dx=f(x)g(x)-\int f'(x)g(x)dx,$$

понеже

$$\int[f(x)g(x)]'dx=f(x)g(x)+C.$$

При този извод пропуснахме познатите технически уточнения, произтичащи от факта, че неопределеният интеграл е множество от функции. ■

Формулата (10.9) се записва обикновено по следния начин

$$\int f(x)dg(x)=f(x)g(x)-\int g(x)df(x).$$

Пример 10.15. За да пресметнем интеграла

$$I=\int x^2\cos x dx,$$

внасяме функцията $\cos x$ под знака на диференциала, $\cos x dx=d\sin x$ и получаваме

$$I = \int x^2 d\sin x,$$

след което прилагаме правилото за интегриране по части,

$$I = x^2 \sin x - \int \sin x dx^2 .$$

Сега изнасяме функцията x^2 пред знака на диференциала $dx^2 = 2xdx$,

$$I = x^2 \sin x - \int \sin x\, 2xdx = x^2 \sin x - 2\int x \sin xdx .$$

Внасяме $\sin x$ под знака на диференциала, $\sin xdx = -\cos xdx$ и получаваме

$$I = x^2 \sin x + 2\int xd\cos x,$$

интегрираме отново по части,

$$I = x^2 \sin x + 2x\cos x - 2\int \cos xdx,$$

след което окончателно намираме

$$I = x^2 \sin x + 2x\cos x - 2\sin x + C .$$

Да обърнем внимание, че по време на междинните действия, при решаване на интегралите не пишем произволна константа. Тази произволна константа се добавя накрая, когато в израза вече няма интегрални знаци.

В този пример се забелязват трите характерни стъпки на прилагане правилото за интегриране по части, внасяне под знака на диференциала, прилагане на формулата и изнасяне пред знака на диференциала.

По същия начин, чрез няколкократно интегриране по части, се пресмятат интеграли от вида

$$\int \sin\alpha x P(x)dx,\ \int \cos\alpha x P(x)dx,\ \int e^{\alpha x} P(x)dx,$$

където $\alpha \neq 0$ е константа, а $P(x)$ е полином, като всеки път под знака на диференциала се внася тригонометричната или експоненциалната функция.

При интеграли от вида

$$\int f(x)\ln xdx,\ \int f(x)\arcsin\alpha xdx,\ \int f(x)\arccos\alpha xdx,$$

$$\int f(x)\operatorname{arctg}\alpha xdx,\ \int f(x)\operatorname{arcctg}\alpha xdx,$$

внасянето на $f(x)$ под знака на диференциала и следващо интегриране по части в много случаи може да доведе до решаване на интеграла.

Пример 10.16. Да пресметнем

$$I = \int x\ln xdx .$$

След внасяне на x под знака на диференциала, $xdx = \frac{dx^2}{2}$, получаваме

$$I = \int \ln xd\frac{x^2}{2} .$$

Интегрираме по части,

$$I = \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x^2}{2} d\ln x,$$

откъдето след изнасяне на $\ln x$ пред знака на диференциала, $d\ln x = \frac{1}{x}dx$, намираме

$$I = \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x^2}{2}\frac{1}{x}dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{2}\int xdx = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + C .$$

Пример 10.17. Да пресметнем интеграла

$$I = \int \sqrt{x^2+1}dx .$$

Интегрираме по части,

$$I = x\sqrt{x^2+1} - \int x d\sqrt{x^2+1}\,,$$

$$I = x\sqrt{x^2+1} - \int x\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}dx = x\sqrt{x^2+1} - \int \frac{(x^2+1)-1}{\sqrt{x^2+1}}dx\,,$$

$$I = x\sqrt{x^2+1} - \int \sqrt{x^2+1}dx + \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = x\sqrt{x^2+1} - I + \ln\left|x+\sqrt{x^2+1}\right|,$$

откъдето намираме

$$I = \frac{1}{2}\left[x\sqrt{x^2+1} + \ln\left|x+\sqrt{x^2+1}\right|\right] + C\,.$$

Пример 10.18. Да пресметнем интеграла

$$I = \int e^{\alpha x}\cos\beta x dx,\ \beta \neq 0\,.$$

Въвеждаме спрегнатия интеграл

$$J = \int e^{\alpha x}\sin\beta x dx\,.$$

Чрез интегриране по части намираме

$$I = \frac{1}{\beta}\int e^{\alpha x} d\sin\beta x = \frac{1}{\beta}e^{\alpha x}\sin\beta x - \frac{\alpha}{\beta}\int e^{\alpha x}\sin\beta x dx\,,$$

$$I = \frac{1}{\beta}e^{\alpha x}\sin\beta x - \frac{\alpha}{\beta}J\,.$$

Аналогично,

$$J = -\frac{1}{\beta}\int e^{\alpha x} d\cos\beta x = -\frac{1}{\beta}e^{\alpha x}\cos\beta x + \frac{\alpha}{\beta}\int e^{\alpha x}\cos\beta x dx\,,$$

$$J = -\frac{1}{\beta}e^{\alpha x}\cos\beta x + \frac{\alpha}{\beta}I\,.$$

По този начин за интегралите I и J получихме линейната система

$$I + \frac{\alpha}{\beta}J = \frac{1}{\beta}e^{\alpha x}\sin\beta x\,,$$

$$J - \frac{\alpha}{\beta}I = -\frac{1}{\beta}e^{\alpha x}\cos\beta x\,,$$

която решаваме по познатия начин и намираме

$$I = \frac{e^{\alpha x}}{\alpha^2+\beta^2}[\alpha\cos\beta x + \beta\sin\beta x],\ J = \frac{e^{\alpha x}}{\alpha^2+\beta^2}[-\beta\cos\beta x + \alpha\sin\beta x].$$

4. Полиноми и рационални функции. Полином от степен не по-висока от n се нарича функцията

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0\,.$$

Ако $a_n \neq 0$, то степента на $f(x)$ е точно n. Степента на полинома ще означаваме с $\deg f(z)$. Полиномите от нулева степен са константи. Тук коефициентите a_0, a_1, ..., a_n са реални числа. Един полином се формира само на базата на действията събиране и умножение. Между полиномите също така е определено деление с остатък. Ако $f(x)$ и $\varphi(x)$ са полиноми, при което $1 \leq \deg\varphi(x) \leq \deg f(x)$, то съществуват единствени полиноми $q(x)$ и $r(x)$, $\deg r(x) < \deg\varphi(x)$, такива, че $f(x)$ може да се запише във вида

(10.10) $f(x) = \varphi(x)q(x) + r(x)$.

Полиномът $q(x)$ се нарича ***частно*** от делението на $f(x)$ с $\varphi(x)$, а полиномът $r(x)$ се нарича ***остатък*** от делението. Ако степента на $\varphi(x)$ е по-голяма от степента на $f(x)$, $\deg\varphi(x) > \deg f(x)$, то делението е безпредметно, понеже формулата (10.10) приема вида $f(x)=\varphi(x)\mathbf{.}0+f(x)$, в този случай частното е тъждествено нула, $q(x)\equiv 0$, а остатъкът съвпада с $f(x)$, $r(x)=f(x)$.

В частност, ако $\deg f(x)\geq 1$ и a е някакво число, то

(10.11) $f(x)=(x-a)q(x)+r$,

където $q(x)$ е полином, $\deg q(x)=\deg f(x)-1$, r е константа. Казва се, че a е ***корен*** на полинома $f(x)$, когато $f(a)=0$. От (10.11) се вижда, че a е корен на полинома $f(x)$, $\deg f(x)\geq 1$, тогава и само тогава, когато $f(x)$ може да се запише във вида $f(x)=(x-a)q(x)$.

Представянето (10.11) може да се получи веднага и от известната формула на Тейлър за полиноми

(10.12) $$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2}(x-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n .$$

Числото a се нарича ***корен от кратност*** $m\geq 1$, за полинома $f(x)$, когато $f(x)$ може да се запише във вида $f(x)=(x-a)^m g(x)$, където $g(x)$ е полином, за който $g(a)\neq 0$. Ако $m=1$, то коренът се нарича прост.

Пример 10.19. Числото $a=1$ е корен от кратност 3 за полинома $f(x)=(x-1)^3(x^2+2)$, а полинома $f(x)=x^2-1=(x-1)(x+1)$ има два прости корена ± 1.

Твърдение 10.3. Числото a е корен на полинома $f(x)$, $\deg f(x)\geq 1$, от кратност $m\geq 1$ $(m<n)$ тогава и само тогава, когато

(10.13) $f(a)=f'(a)=\cdots=f^{(m-1)}(a)=0$, $f^{(m)}(a)\neq 0$.

Доказателство. Нека е изпълнено (10.4). Тогава съгласно (10.12)

$$f(x)=(x-a)^m\left[\frac{f^{(m)}(a)}{m!}+\frac{f^{(m+1)}(a)}{(m+1)!}(x-a)+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^{n-m}\right],$$

$$f(x)=(x-a)^m g(x),\ g(x)=\frac{f^{(m)}(a)}{m!}+\frac{f^{(m+1)}(a)}{(m+1)!}(x-a)+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^{n-m},$$

където $g(x)$ е полином от степен $n-m$ и $g(a)=\frac{f^{(m)}(a)}{m!}\neq 0$, което по определение означава, че a е корен от кратност m. Нека сега a е корен от кратност m, което означава, че $f(x)=(x-a)^m g(x)$, където $g(x)$ е полином, за който $g(a)\neq 0$. Тогава непосредствено чрез диференциране се проверява, че е налице (10.13). ■

Пример 10.20. Да разгледаме полинома $f(x)=x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$. Той се разлага на два множителя $(x-1)$ и x^2+x+1, при което този квадратен тричлен е неразложим. Неговите корени са двойката комплексно спрегнати числа $x_{1,2}=\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}$. Полиномът $f(x)=x^4-1=(x-1)(x+1)(x^2+1)$ се записва като произведение на $x-1$, $x+1$ и на полинома от втора степен x^2+1, който също е неразложим. Полиномът $f(x)=x^4+1=(x^2-\sqrt{2}x+1)(x^2+\sqrt{2}x+1)$ се записва като произведение на два неразложими тричлена.

Ситуацията в общия случай изглежда аналогично на приведените примери. Преди всичко да отбележим, че ако един полином $f(x)$ има за корен комплексното число $\alpha + i\beta$, $\beta \neq 0$, с кратност s, то комплексно спрегнатото $\alpha - i\beta$ също е корен при това от същата кратност. Това означава, че $f(x)$ се дели на $[(x-\alpha-i\beta)(x-\alpha+i\beta)]^s = \left[(x-\alpha)^2+\beta^2\right]^s$. Квадатният тричлен $(x-\alpha)^2+\beta^2$ неразложим. От направените пояснения и от основната теорема на алгебрата следва верността на

Теорема 10.1. Всеки полином с реални коефициенти $f(x)$, може да се представи по единствен начин като произведение на старшия си коефициент a_n и на известен брой (различни по между си) елементарни множители от първи вид $(x-a)^k$ и/или елементарни множители от втори вид $(x^2+px+q)^s$, $p^2-4q<0$,

(10.14) $f(x) = a_n \cdots (x-a)^k \cdots (x^2+px+q)^s \cdots$. ■

Тук елементарните множители от първи вид са свързани с реалните корени на $f(x)$ и техните кратности, а елементарните множители от втори вид са свързани с двойките комплексно спрегнати корени и техните кратности.

Функцията $f(x)$ се нарича ***рационална***, когато е частно на два полинома,

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}.$$

Рационалната функция $f(x)$ се нарича ***правилна***, когато $\deg Q(x) > \deg P(x)$.

Нека $f(x)$ е правилна рационална функция и a е корен от кратност $k \geq 1$ за знаменателя $Q(x)$, което означава, че $Q(x) = (x-a)^k Q_1(x)$, където $Q_1(a) \neq 0$. Тогава съществува константа такава, че

(10.15) $\dfrac{P(x)}{Q(x)} = \dfrac{A}{(x-a)^k} + \dfrac{\hat{P}(x)}{(x-a)^{k-1}Q_1(x)}$.

Константата A избираме такава, че числото a да бъде корен на полинома $\varphi(x) = P(x) - AQ_1(x)$, което означава $\varphi(a) = P(a) - AQ_1(a) = 0$. Този избор е възможен понеже по условие $Q_1(a) \neq 0$. Сега полинома $\hat{P}(x)$ определяме като частното от делението на $\varphi(x)$ с $(x-a)$,

$$P(x) - AQ_1(x) = (x-a)\hat{P}(x).$$

Разделяйки последното на $Q(x)$, получаваме равенството (10.15). Да отбележим, че второто събираемо в дясната страна на (10.15) е правилна рационална функция. Когато $k>1$, можем да повторим горното разсъждение до изчерпване кратността на корена a, след което ще получим представянето

(10.16) $\dfrac{P(x)}{Q(x)} = \dfrac{A_k}{(x-a)^k} + \dfrac{A_{k-1}}{(x-a)^{k-1}} + \cdots + \dfrac{A_1}{x-a} + \dfrac{P_1(x)}{Q_1(x)}$,

при което последното събираемо в дясната страна на (10.16) е правилна рационална функция.

Нека сега $Q(x) = (x^2+px+q)^s Q_1(x)$, където $Q_1(x)$ не се дели (без остатък) на неразложимия тричлен x^2+px+q с корени двойката комплексно спрегнати числа $z_{1,2} = \alpha \pm i\beta$, $\beta \neq 0$. Тогава за правилната рационална функция е валидно следното аналогично на (10.15) представяне

(10.17) $$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{Bx+C}{\left(x^2+px+q\right)^s}+\frac{\hat{P}(x)}{\left(x^2+px+q\right)^{s-1}Q_1(x)},$$

за някои константи B и C, при което второто събираемо в дясната страна на (10.17) също е правилна рационална функция. Константите B и C се избират от условието полиномът $\varphi(x)=P(x)-(Bx+C)Q_1(x)$ да се дели без остатък на x^2+px+q. Това означава, че $\varphi(z_1)=\varphi(z_2)=0$. Чрез непосредствена проверка се установява, че този избор може да бъде направен, при това по единствен начин. Нека $\hat{P}(x)$ е частното от делението на полинома $\varphi(x)$ с x^2+px+q. Тогава

$$P(x)-(Bx+C)Q_1(x)=\left(x^2+px+q\right)\hat{P}(x).$$

Разделяйки последното на $Q(x)$ получаваме равенството (10.17). Повтаряйки горното разсъждение до изчерпване на кратността, получаваме

(10.18) $$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{B_s x+C_s}{\left(x^2+px+q\right)^s}+\frac{B_{s-1}x+C_{s-1}}{\left(x^2+px+q\right)^{s-1}}+\cdots+\frac{B_1x+C_1}{x^2+px+q}+\frac{P_1(x)}{Q_1(x)},$$

където последното събираемо в дясната страна на (10.18) е правилна рационална функция.

Рационалните функции от вида

$$\frac{A}{(x-a)^k}$$

се нарича ***елементарни дроби от първи вид***, а функциите

$$\frac{Bx+C}{x^2+px+q},\ p^2-4q<0,$$

се нарича ***елементарни дроби от втори вид***.

Повтаряйки представянията (10.16) и/или (10.18) до изчерпване елементарните множители на $Q(x)$, получаваме верността на следната

Теорема 10.2 ***(за представяне в сбор от елементарни дроби).*** Нека

$$f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$$

е правилна рационална функция, $\deg P(x)<\deg Q(x)$. Тогава $f(x)$ може да се запише като сбор от серии елементарни дроби. Всеки елементарен множител от първи вид $(x-a)^k$ на $Q(x)$ поражда серия елементарни дроби от първи вид както при формулата (10.16), а всеки елементарен множител от втори вид $\left(x^2+px+q\right)^s$ на $Q(x)$ поражда серия елементарни дроби от втори вида както при формулата (10.18). ■

С други думи

(10.19) $$\begin{aligned}\frac{P(x)}{Q(x)}&=\cdots+\frac{A_k}{(x-a)^k}+\frac{A_{k-1}}{(x-a)^{k-1}}+\cdots+\frac{A_1}{x-a}+\cdots\\&+\frac{B_s x+C_s}{\left(x^2+px+q\right)^s}+\frac{B_{s-1}x+C_{s-1}}{\left(x^2+px+q\right)^{s-1}}+\cdots+\frac{B_1x+C_1}{x^2+px+q}+\cdots\end{aligned}$$

За определянето на константите в равенството (10.19) съществуват два основни метода. И при двата първоначално изразите се умножават с общия знаменател $Q(x)$, след което (10.19) се превръща в равенство на два полинома. При първия метод се приравняват коефициентите пред съответните степени, откъдето за константите се получава линейна система. При втория метод се дават различни конкретни стойности на променливата, докато се получат достатъчно линейни уравнения за тяхното решаване. Тези два метода могат да се прилагат всеки по отделно но могат и да се комбинират. Всъщност съдържанието на теорема 10.2 се изразява в това, че линейните системи, които се получават по описаните начини са еднозначно разрешими. Освен посочените методи, можем да диференцираме равенството, което се получава след умножаване с $Q(x)$ и на тази основа да извършваме отново познатите действия.

Пример 10.21. Да разложим в сбор от елементарни дроби правилната рационална функция

$$f(x)=\frac{x^2+1}{(x-1)^3(x+2)^2x^5\left(x^2+x+1\right)^2\left(x^2+1\right)^3}.$$

Тук знаменателят $Q(x)=(x-1)^3(x+2)^2x^5\left(x^2+x+1\right)^2\left(x^2+1\right)^3$ е даден във вид на произведение от елементарни множители. Съгласно теорема 10.3, за $f(x)$ съществува следното представяне

$$\begin{aligned}&\frac{x^2+1}{(x-1)^3(x+2)^2x^5\left(x^2+x+1\right)^2\left(x^2+1\right)^3}=\\&\quad=\frac{A_{13}}{(x-1)^3}+\frac{A_{12}}{(x-1)^2}+\frac{A_{11}}{x-1}+\\&\quad+\frac{A_{22}}{(x+2)^2}+\frac{A_{21}}{x+2}+\frac{A_{35}}{x^5}+\frac{A_{34}}{x^4}+\frac{A_{33}}{x^3}+\frac{A_{32}}{x^2}+\frac{A_{31}}{x}+\\&\quad+\frac{B_{12}x+C_{12}}{\left(x^2+x+1\right)^2}+\frac{B_{11}x+C_{11}}{x^2+x+1}+\frac{B_{23}x+C_{23}}{\left(x^2+1\right)^3}+\frac{B_{22}x+C_{22}}{\left(x^2+1\right)^2}+\frac{B_{21}x+C_{21}}{x^2+1}\end{aligned}$$

За да представим дадена правилна рационална функция във вид на сбор от елементарни дроби, преди всичко трябва да запишем знаменателя като произведение от елементарни множители, което по същество означава да намерим всичките му корени. За намирането на корените на даден полином от пета или по-висока степен обаче в общия случай не съществуват формули като тези на Виет и Кардано, което представлява принципна преграда за използването на теорема 10.3 във всяка ситуация. Затова в конкретните случаи на приложение, разлагането на знаменателя като произведение на елементарни множители се предполага известно или лесно за постигане.

5. Интегриране на елементарни дроби и рационални функции. Елементарните дроби от първи вид се интегрират непосредствено

$$\int\frac{A}{x-a}dx=A\ln|x-a|+Const,\ \int\frac{A}{(x-a)^k}dx=\frac{1}{1-k}\frac{A}{(x-a)^{k-1}}+Const,\ k>1.$$

За да се научим да интегрираме елементарни дроби от втори вид, отначало ще разгледаме интеграла

$$I_n=\int\frac{dx}{\left(x^2+a^2\right)^n},\ n=1,2,\dots,\ a>0.$$

При $n=1$ имаме табличен интеграл

$$I_1=\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}+Const.$$

За останалите интеграли ще изведем ***рекурентна формула***. Да разгледаме интеграла I_{n+1} и да го преобразуваме,

$$I_{n+1}=\int\frac{dx}{\left(x^2+a^2\right)^{n+1}}=\frac{1}{a^2}\int\frac{a^2dx}{\left(x^2+a^2\right)^{n+1}}=\frac{1}{a^2}\int\frac{\left(a^2+x^2-x^2\right)dx}{\left(x^2+a^2\right)^{n+1}},$$

$$I_{n+1}=\frac{1}{a^2}\int\frac{\left(a^2+x^2\right)dx}{\left(x^2+a^2\right)^{n+1}}-\frac{1}{a^2}\int\frac{x^2dx}{\left(x^2+a^2\right)^{n+1}}=\frac{1}{a^2}I_n-\frac{1}{a^2}\int\frac{x^2dx}{\left(x^2+a^2\right)^{n+1}},$$

$$I_{n+1}=\frac{1}{a^2}I_n-\frac{1}{2a^2}\int\frac{xd\left(x^2+a^2\right)}{\left(x^2+a^2\right)^{n+1}}=\frac{1}{a^2}I_n+\frac{1}{2na^2}\int xd\left(x^2+a^2\right)^{-n},$$

$$I_{n+1}=\frac{1}{a^2}I_n+\frac{x\left(x^2+a^2\right)^{-n}}{2na^2}-\frac{1}{2na^2}\int\left(x^2+a^2\right)^{-n}dx=\frac{1}{a^2}I_n+\frac{x\left(x^2+a^2\right)^{-n}}{2na^2}-\frac{1}{2na^2}I_n,$$

откъдето поучаваме желаната връзка между I_{n+1} и I_n

(10.20) $I_{n+1}=\dfrac{x}{2na^2\left(x^2+a^2\right)^n}+\dfrac{2n-1}{2na^2}I_n$.

Пример 10.22. Имаме

$$I_2=\frac{x}{2a^2\left(x^2+a^2\right)}+\frac{1}{2na^3}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}+Const.$$

Знаейки I_2, с помощта на (10.20) намираме I_3 и т.н. Интегралите от вида

(10.21) $J_n=\displaystyle\int\frac{bx+c}{\left(x^2+a^2\right)^n}dx$, $a>0$,

свеждаме до интегралите I_n по следния начин,

$$J_n=b\int\frac{xdx}{\left(x^2+a^2\right)^n}+c\int\frac{dx}{\left(x^2+a^2\right)^n}=\frac{b}{2}\int\frac{d\left(x^2+a^2\right)}{\left(x^2+a^2\right)^n}+c\int\frac{dx}{\left(x^2+a^2\right)^n},$$

$$J_n=\frac{b}{2(1-n)\left(x^2+a^2\right)^{n-1}}+cI_n.$$

В общият случай след отделяне на точен квадрат в знаменателя, интегралът

$$\int\frac{bx+c}{\left(x^2+px+q\right)^n}dx$$

се свежда до интеграла J_n от (10.21).

Пример 10.23. Да пресметнем интеграла

$$I=\int\frac{x-3}{\left[x^2+2x+2\right]^2}dx.$$

Последователно намираме

$$I=\int\frac{x-3}{\left[(x+1)^2+1\right]^2}dx=\int\frac{(x+1)-4}{\left[(x+1)^2+1\right]^2}d(x+1),$$

което означава, че $I=J_2-4I_2$, при $a=1$, относно променливата $x+1$.

Интегриране на рационални функции. Ако рационалната функция

(10.22) $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, $\deg Q(x)>0$,

не е правилна, $\deg P(x)\ge\deg Q(x)$, отначало ще разделим полинома $P(x)$ на $Q(x)$ и съгласно теорема 10.1, $P(x)=Q(x)q(x)+r(x)$, където $q(x)$ е частното, а $r(x)$ е остатъкът при това деление, $\deg r(x)<\deg Q(x)$, откъдето след разделяне на $Q(x)$ получаваме

(10.23) $\dfrac{P(x)}{Q(x)}=q(x)+\dfrac{r(x)}{Q(x)}$.

Второто събираемо в дясната страна на (10.23) е правилна рационална функция. Сега имаме

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \int q(x)dx + \int \frac{r(x)}{Q(x)}dx,$$

което означава, че пресмятането на интеграла се свежда до интегриране на полином и интегриране на правилна рационална функция. Полиномите се интегрират непосредствено. Остава да покажем начин за интегриране на правилни рационални функции.

Нека рационалната функция (10.22) е правилна и е известно представянето на знаменателя $Q(x)$ като произведение на елементарни множители (10.14). Тогава съгласно теорема 10.3, $f(x)$ може да се запише като сбор от елементарни дроби и в крайна сметка интегрирането на $f(x)$ се сведе до интегриране на елементарни дроби, което вече знаем как става от предишния раздел.

Най-прост е случаят, когато корените на $Q(x)$ са прости.

Пример 10.24. Да пресметнем интеграла

$$I = \int \frac{x+2}{x^3 - x}dx.$$

Знаменателят се разлага на прости множители $x^3 - x = x(x-1)(x+1)$. Съгласно теорема 10.3 търсим представяне

$$\frac{x+2}{x^3-x} = \frac{x+2}{x(x-1)(x+1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{x+1},$$

където константите a, b и c ще намерим след привеждане под общ знаменател,

$$x+2 = a(x-1)(x+1) + bx(x+1) + cx(x-1).$$

Заместваме $x \to 0$ и намираме $2 = a(-1)(1)$, следователно $a = -2$. Заместваме $x \to 1$ и намираме $3 = b(1)(2)$, следователно $b = \frac{3}{2}$. Заместваме $x \to -1$ и намираме $1 = c(-1)(-2)$, следователно $c = \frac{1}{2}$. В крайна сметка получихме

$$\frac{x+2}{x^3-x} = -2\frac{1}{x} + \frac{3}{2}\frac{1}{x-1} + \frac{1}{2}\frac{1}{x+1},$$

следователно

$$I = \int \frac{x+2}{x^3-x}dx = -2\int \frac{1}{x}dx + \frac{3}{2}\int \frac{1}{x-1}dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x+1}dx,$$

$$I = -2\ln|x| + \frac{3}{2}\ln|x-1| + \frac{1}{2}\ln|x+1| + C.$$

В случая на прости корени след умножение с общия знаменател се получава израз, в който заместваме с корените и при всяко едно заместване получаваме стойността на една от търсените константи.

Пример 10.25. Да пресметнем интеграла

$$I = \int \frac{x^4}{x^2 - x + 1}dx.$$

Тук рационалната функция не е правилна затова първоначално ще извършим деление на полиноми. Съгласно правилото за деление

$$\begin{array}{l} -x^4 \;:\; x^2-x+1 = x^2+x \\ \underline{\;x^4-x^3+x^2\;} \\ \;{}''\quad x^3-x^2 \\ \quad - \\ \quad\underline{\;x^3-x^2+x\;} \\ \quad{}''\quad{}''\;\; -x \end{array}$$

Тук частното е x^2+x, а остатъкът е $-x$, следователно

$$\frac{x^4}{x^2-x+1} = x^2+x-\frac{x}{x^2-x+1},$$

(10.24) $I=\int\left(x^2+x\right)dx-\int\frac{x}{x^2-x+1}dx=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-J$, $J=\int\frac{x}{x^2-x+1}dx$.

Интегралът J се намира по стандартния начин,

$$J=\int\frac{x}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}dx=\int\frac{\left(x-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}d\left(x-\frac{1}{2}\right),$$

$$J=\int\frac{\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}d\left(x-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}\int\frac{d\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}},$$

$$J=\frac{1}{2}\int\frac{d\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}+\frac{1}{2}\int\frac{d\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2},$$

$$J=\frac{1}{2}\ln\left[\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right]+\frac{1}{2}\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}+C.$$

Като заместим в (10.24) намираме

$$I=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-\frac{1}{2}\ln\left(x^2-x+1\right)-\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C.$$

Интегриране на ирационални и тригонометрични функции. Интегралите от вида

$$\int R\left(x,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_1},\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_2},\ldots,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_n}\right)dx,$$

където степените r_1, r_2, ..., r_n са рационални числа, $ad-bc\neq 0$, могат при определение условия да се сведат до интеграли от рационални функции след полагането $\frac{ax+b}{cx+d}=t^p$, където p е най-малкото общо кратно на знаменателите на r_1, r_2, ..., r_n.

Пример 10.26. Да пресметнем интеграла

$$I = \int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}+1}\,dx .$$

Тук полагаме $x = t^6$, при което $dx = dt^6 = 6t^5 dt$. Получаваме

$$I = \int \frac{t^3}{t^2+1} 6t^5 dt = 6\int \frac{t^8}{t^2+1}\,dt ,$$

който интеграл пресмятаме по известния вече начин.

Тригонометричните интеграли

(10.25) $\int R(\sin x, \cos x)dx$,

могат да бъдат преобразувани чрез ***универсалната субституция*** за такива интеграли $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$, при която имаме $x = 2\operatorname{arctg} t$, $dx = 2d\operatorname{arctg} t = \frac{2dt}{1+t^2}$. От тъждествата

$$\sin x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} \text{ и } \cos x = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}},$$

получаваме

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2} \text{ и } \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Сега след заместване, (10.25) приема вида

$$\int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2dt}{1+t^2},$$

който при определени условия е интеграл от рационална функция.

Пример 10.27. Да пресметнем интеграла

$$I = \int \frac{dx}{\cos x + 2}.$$

След полагането $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$ интегралът се свежда до

$$I = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{1-t^2}{1+t^2}+2} = \int \frac{2dt}{t^2+3} = \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{3}} + C,$$

следователно

$$I = \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\sqrt{3}} + C.$$

Понякога вместо универсалната субституция могат да се използват субституциите $t = \sin x$ или $t = \cos x$, които в конкретни случаи водят по-бързо до целта.

Пример 10.28. Да пресметнем интеграла

$$I = \int \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x}\,dx .$$

Ако отделим един $\cos x$ от степента в числителя и го внесем под знака на диференциала получаваме

$$I = \int \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}\,d\sin x = \int \frac{1-\sin^2 x}{\sin^2 x}\,d\sin x .$$

Сега полагаме $t = \sin x$,

$$I = \int \frac{1-t^2}{t^2}\,dt = \int \frac{1}{t^2}\,dt - \int dt = -\frac{1}{t} - t + C,$$

следователно

$$I = -\frac{1}{\sin x} - \sin x + C.$$