

## Лекция 12

### §12. Приложения на определен интеграл

**1. Дължина на крива.** Да разгледаме кривата  $\gamma$  (в равнината  $\mathbb{R}^2 - Oxy$  или пространството  $\mathbb{R}^3 - Oxyz$  с декартови координатни системи при стандартно означение на базисните вектори  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$  и  $\mathbf{k}$ ), зададена чрез параметричното уравнение  $\gamma: \mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ ,  $\alpha \leq t \leq \beta$ , (Рис. 12.1). Тук  $\mathbf{r}$  е радиус векторът на текущата точка. Началната точка на  $\gamma$  е  $\mathbf{r}(\alpha)$ , а крайната точка е  $\mathbf{r}(\beta)$ . Имаме  $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)) = \mathbf{i}x(t) + \mathbf{j}y(t) + \mathbf{k}z(t)$ , за случая на пространствена крива или  $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t)) = \mathbf{i}x(t) + \mathbf{j}y(t)$  за равнинна. Кривата  $\gamma$  се записва и по следния начин

$$\gamma: \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \\ \alpha \leq t \leq \beta \end{cases} \text{ в } \mathbb{R}^3 \text{ или } \gamma: \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ \alpha \leq t \leq \beta \end{cases} \text{ в } \mathbb{R}^2.$$

За координатните функции  $x(t)$ ,  $y(t)$  и  $z(t)$  предполагаваме, че са **непрекъснати** в параметричния интервал  $[\alpha, \beta]$ . Ако обаче се ограничим само с предположението за непрекъснатост, в общия случай кривата може да има много сложна форма, затова ще поискаме координатните функции да имат **непрекъснати производни** в  $[\alpha, \beta]$  и  $\dot{\mathbf{r}}(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t)) \neq \mathbf{0}$  за  $t \in [\alpha, \beta]$ . Точка над символ за функция е друго означение за производната на тази функция. Такива криви се наричат **гладки**. Да разгледаме едно (интегрално) деление  $\tau = \{t_k\}_{k=0}^n$  на интервала  $[\alpha, \beta]$ ,  $\alpha = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = \beta$ . По този начин се образува начупената линия  $\Gamma = [M_0, M_1, M_2, \dots, M_{n-1}, M_n]$ ,  $M_k = \mathbf{r}(t_k)$ ,  $k = 0, 1, \dots, n$ , която има дължина, равна на сбора от дължините на съставлящите отсечки

$$(12.1) \quad \mu(\Gamma) = \sum_{k=1}^n |M_{k-1}M_k| = \sum_{k=1}^n \sqrt{[x(t_{k-1}) - x(t_k)]^2 + [y(t_{k-1}) - y(t_k)]^2 + [z(t_{k-1}) - z(t_k)]^2}.$$

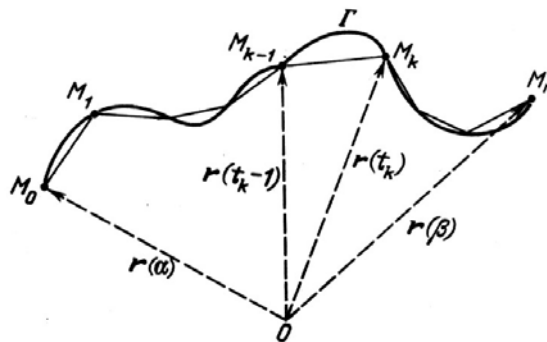


Рис. 12.1.

**Определение 12.1.** Дължината на кривата  $\gamma$  се определя като границата, ако съществува, от дължините на тези начупени линии, когато диаметърът на деленето клони към нула ( $d(\tau) \rightarrow 0$ ).

Да припомним, че  $d(\tau) = \max_{1 \leq k \leq n} \Delta t_k$ , където  $\Delta t_k = t_k - t_{k-1}$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ .

Една крива се нарича **ректифицируема**, когато има дължина. Както ще видим по-надолу, всяка гладка крива е ректифицируема.

Горното определение ще разгледаме по-скоро като интуитивно, понеже някои съществени детайли ще останат без необходимото разяснение.

Една крива може да бъде описана чрез различни параметри по целесъобразност. Да разгледаме отначало елементарния случай на равнинна крива  $\gamma$ , определена от графиката на функцията  $f(x)$

$$\gamma: \begin{cases} x = x \\ y = f(x) \\ a \leq x \leq b \end{cases}$$

Тук ролята на параметър се изпълнява по естествен начин от променливата  $x$ , а за функцията  $f(x)$  се предполага, че има непрекъсната производна в интервала  $[a, b]$ . В този случай  $\tau = \{x_k\}_{k=0}^n$ ,  $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$ , а дължината на начупената линия  $\Gamma$  се дава по формулата

$$(12.2) \quad \mu(\Gamma) = \sum_{k=1}^n \sqrt{[x_k - x_{k-1}]^2 + [f(x_k) - f(x_{k-1})]^2}.$$

От теоремата на Лагранж имаме

$$f(x_k) - f(x_{k-1}) = f'(\xi_k) \Delta x_k, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

където  $\xi_k \in (x_{k-1}, x_k)$ , и (12.2) приема вида

$$\mu(\Gamma) = \sum_{k=1}^n \sqrt{[\Delta x_k]^2 + [\Delta x_k]^2 [f'(\xi_k)]^2} = \sum_{k=1}^n \sqrt{1 + [f'(\xi_k)]^2} \Delta x_k,$$

което е една риманова интегрална сума за функцията  $g(x) = \sqrt{1 + [f'(x)]^2}$  в интервала  $[a, b]$ . Сега от определението за дължина на крива следва верността на

**Твърдение 12.1.** Нека кривата  $\gamma$  е графиката на функцията  $f(x)$  в интервала  $[a, b]$ ,  $\gamma: y = f(x)$ ,  $x \in [a, b]$ , и  $f(x)$  има непрекъсната производна в  $[a, b]$ . Тогава  $\gamma$  има дължина, която се определя от формулата

$$(12.3) \quad \mu(\gamma) = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx. \quad \blacksquare$$

Да разгледаме сега равнинна крива  $\gamma$  в общия случай

$$\gamma: \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ \alpha \leq t \leq \beta \end{cases}$$

където координатните функции  $x(t)$  и  $y(t)$  имат непрекъснати производни в параметричния интервал  $[\alpha, \beta]$  и да проследим какъв вид ще приеме формулата (12.3) в този случай. Имаме  $dx = \dot{x}(t)dt$ , където  $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$ , и  $dy = \dot{y}(t)dt$ . От друга страна

$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)}$ . Като заместим в (12.3) получаваме

$$(12.4) \quad \mu(\gamma) = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)} dt,$$

която е общата формула за дължина на равнинна крива, зададена чрез параметрично уравнение. Този извод на (12.4) не е строго обоснован, но от друга страна е достатъчно ясен от формална гледна точка. Когато кривата  $\gamma$  е пространствена,

$$\gamma: \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \\ \alpha \leq t \leq \beta \end{cases}$$

формулата за дължина е

$$(12.5) \quad \mu(\gamma) = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) + \dot{z}^2(t)} dt.$$

Формулите (12.4) и (12.5) могат да бъдат изведени напълно строго с цената на допълнителни разсъждения, които са малко полезни в други ситуации. Те могат да се запишат още във вида

$$\mu(\gamma) = \int_{\alpha}^{\beta} |\dot{\mathbf{r}}(t)| dt.$$

Нека равнинната крива  $\gamma$  е зададена чрез полярно уравнение  $\gamma: \rho = \rho(\varphi)$ ,  $\alpha \leq \varphi \leq \beta$ , където функцията  $\rho(\varphi)$  има непрекъсната производна в интервала  $[\alpha, \beta]$  ( $\rho$  е полярният радиус на точката  $M(x, y)$ , а  $\varphi$  е полярният ъгъл – ъгълът между оста  $Ox$  и лъча  $\overrightarrow{OM}$ , измерван в посока, обратна на движението на часовниковата стрелка). Тогава  $x = \rho \cos \varphi$  и  $y = \rho \sin \varphi$ , следователно  $\gamma$  може да се параметризира по следния начин

$$\gamma: \begin{cases} x = \rho(\varphi) \cos \varphi \\ y = \rho(\varphi) \sin \varphi \\ \alpha \leq \varphi \leq \beta \end{cases}$$

а формулата (12.4), след пресмятане на съответните изрази, приема вида

$$(12.6) \quad \mu(\gamma) = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\rho^2 + \rho'^2} d\varphi.$$

Една крива се нарича **частично гладка**, когато се състои от краен брой гладки дъги. Дължината на една частично гладка крива се определя като сбора от дължините на съставляващите дъги с помощта на изведените по-горе формули (12.3), (12.4), (12.5) и (12.6) (частично гладките криви са ректифицируеми).

Изразът  $ds = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt$  за равнинна крива и  $ds = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} dt$  за случая на пространствена крива се нарича **криволинеен елемент**. По-горе установихме, че за равнинна крива  $\gamma: y = f(x)$ ,  $x \in [a, b]$ , имаме  $ds = \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$ , а когато  $\gamma: \rho = \rho(\varphi)$ ,  $\varphi \in [\alpha, \beta]$ , имаме  $ds = \sqrt{\rho^2 + \rho'^2} d\varphi$ . Чрез криволинейния елемент, формулата за дължина на крива може да се запише по следния начин

$$\mu(\gamma) = \int_{\gamma} ds,$$

което е частен случай на **криволинеен интеграл от първи род**.

**Лице на равнинна фигура.** Нека  $f(x) \geq 0$ ,  $x \in [a, b]$ . Както вече установихме, лицето  $\mu(A)$  на криволинейния трапец  $A$  (Рис. 12.8), образуван от оста  $Ox$ , графиката на  $f(x)$  и двете вертикални прави през точките  $x = a$  и  $x = b$  се дава по формулата

$$(12.7) \quad \mu(A) = \int_a^b f(x) dx.$$

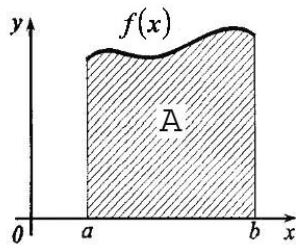


Рис. 12.2.

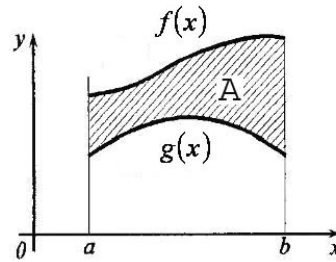


Рис. 12.3.

На рисунка 12.9 е показан криволинеен трапец в общ случай

$$(12.8) \quad A: \begin{cases} a \leq x \leq b \\ g(x) \leq y \leq f(x) \end{cases}$$

**Твърдение 12.2.** Нека функциите  $f(x)$  и  $g(x)$  са интегрируеми в интервала  $[a, b]$ , при което  $g(x) \leq f(x)$  за  $x \in [a, b]$ . Тогава криволинейният трапец, определен от (12.8) има лице, което се определя от формулата

$$\mu(A) = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx.$$

*Доказателство.* Доказателството се получава чрез непосредствено прилагане на формулата (12.7). ■

**Пример 12.1.** Да пресметнем лицето на кръг с радиус  $r > 0$ . Търсим  $\mu(A)$ , където  $A: x^2 + y^2 \leq r^2$ . Очевидно  $\mu(A) = 2\mu(B)$ , където  $B$  е полукръгът  $B: x^2 + y^2 \leq r^2, y \geq 0$ , (Рис. 12.4).

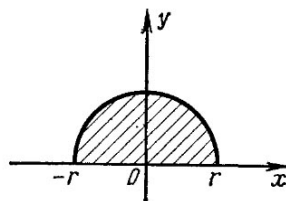


Рис. 12.4.

Ту имаме  $y = f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ ,  $x \in [-r, r]$ , следователно

$$\mu(B) = \int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2} dx.$$

Полагаме  $x = r \sin t$ . Тогава интервалът за променливата  $t$  ще бъде  $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$  и

$dx = r \cos t dt$ . Освен това  $\sqrt{r^2 - x^2} = r \sqrt{1 - \sin^2 t} = r \cos t$ . След заместване получаваме

$$\mu(B) = r^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = r^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2t}{2} dt = \frac{r^2}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} dt + \frac{r^2}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos 2t dt,$$

$$\mu(B) = \frac{r^2}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} dt + \frac{r^2}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos 2t dt = \frac{r^2}{2} \left[ t \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + \frac{r^2}{2} \left[ \frac{\sin 2t}{2} \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi r^2}{2},$$

откъдето намираме  $\mu(A) = 2\mu(B) = \pi r^2$ .

Да разгледаме криволинейния сектор  $S$ , образуван от кривата  $\gamma: \rho = \rho(\varphi)$ ,  $\alpha \leq \varphi \leq \beta$ , с начало точката  $A$  ( $\varphi = \alpha$ ) и край точката  $B$  ( $\varphi = \beta$ ), и отсечките  $\overline{OA}$  и  $\overline{OB}$ , както е показано на рис. 12.5. (функцията  $\rho(\varphi)$  е непрекъсната в интервала  $[\alpha, \beta]$ )

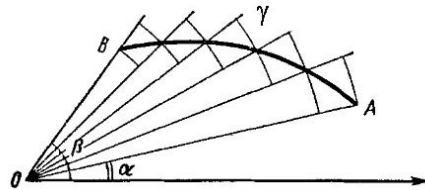


Рис. 12.5.

Нека  $\tau = \{\varphi_k\}_{k=0}^n$  е едно деление на интервала  $[\alpha, \beta]$  и нека

$$m_k = \min_{\varphi_{k-1} \leq \varphi \leq \varphi_k} \rho(\varphi), \quad M_k = \max_{\varphi_{k-1} \leq \varphi \leq \varphi_k} \rho(\varphi), \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Това деление разделя сектора  $S$  на елементарни сектори  $S_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ , при което

$$\mu(S) = \sum_{k=1}^n \mu(S_k).$$

От друга страна лицето на криволинейния сектор  $S_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ , се ограничава отгоре и отдолу с лицата на съответните кръгови сектори, следователно

$$\frac{1}{2} m_k^2 \Delta \varphi_k \leq \mu(S_k) \leq \frac{1}{2} M_k^2 \Delta \varphi_k, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

откъдето намираме

$$(12.9) \quad \frac{1}{2} s(\rho^2, \tau) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n m_k^2 \Delta \varphi_k \leq \mu(S) \leq \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n M_k^2 \Delta \varphi_k = \frac{1}{2} S(\rho^2, \tau).$$

Тук  $s(\rho^2, \tau)$  и  $S(\rho^2, \tau)$  са долната и горната суми на Дарбу за функцията  $\rho^2(\varphi)$  в интервала  $[\alpha, \beta]$ . Функцията  $\rho^2(\varphi)$  е непрекъсната и следователно интегрируема в интервала  $[\alpha, \beta]$ . Нека диаметърът на делението да клони към нула. Тогава и двете суми на Дарбу ще клонят към съответния интеграл и от неравенството (12.9) получаваме

$$\frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\varphi) d\varphi \leq \mu(S) \leq \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\varphi) d\varphi,$$

което доказва следното

**Твърдение 12.3.** Лицето на криволинейния сектор  $S$ , образуван от кривата  $\gamma: \rho = \rho(\varphi)$ ,  $\alpha \leq \varphi \leq \beta$ , с начало точката  $A$  ( $\varphi = \alpha$ ) и край точката  $B$  ( $\varphi = \beta$ ), и отсечките  $\overline{OA}$  и  $\overline{OB}$ , се дава от формулата

$$(12.10) \quad \mu(S) = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\varphi) d\varphi. \quad \blacksquare$$

**Пример 12.2.** Да намерим лицето фигурата  $S$ , оградена от кардиоидата  $\rho = a(1 + \cos \varphi)$ ,  $\varphi \in [-\pi, \pi]$ ,  $a > 0$ , която е показана на рис. 12.6.

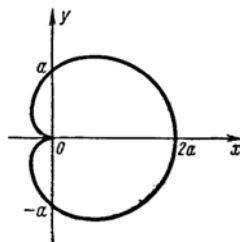


Рис. 12.6.

По формулата (12.10) намираме

$$\mu(S) = \frac{a^2}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (1 + \cos \varphi)^2 d\varphi = \frac{a^2}{2} \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi + \frac{a^2}{2} \int_{-\pi}^{\pi} 2 \cos \varphi d\varphi + \frac{a^2}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 \varphi d\varphi,$$

$$\mu(S) = \pi a^2 + \frac{a^2}{4} \int_{-\pi}^{\pi} (1 + \cos 2\varphi) d\varphi = \pi a^2 + \frac{1}{2} \pi a^2 = \frac{3}{2} \pi a^2.$$

**Обем на ротационно тяло.** Нека функцията  $f(x)$  е непрекъсната и неотрицателна в интервала  $[a, b]$  и да разгледаме тримерното тяло  $V$ , което се получава от завъртането на графиката на  $f(x)$  около оста  $Ox$  и равнините през точките  $x = a$  и  $x = b$ , перпендикулярни на оста  $Ox$ , както е показано на рисунка 12.7.

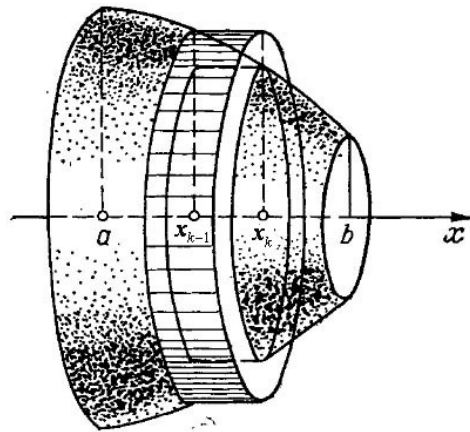


Рис. 12.7.

Нека  $\tau = \{x_k\}_{k=0}^n$  е едно деление на интервала  $[a, b]$  и нека

$$m_k = \min_{x_{k-1} \leq x \leq x_k} f(x), \quad M_k = \max_{x_{k-1} \leq x \leq x_k} f(x), \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Това деление разделя  $V$  на по-малки тела  $V_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ , при което за обема  $\mu(V)$  на тялото  $V$  имаме

$$\mu(V) = \sum_{k=1}^n \mu(V_k).$$

От друга страна обемът на  $V_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ , е заключен между обемите на съответните цилиндри с радиуси  $m_k$  и  $M_k$ ,

$$\pi m_k^2 \Delta x_k \leq \mu(V_k) \leq \pi M_k^2 \Delta x_k, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

следователно

$$(12.11) \quad s(\pi f^2, \tau) = \sum_{k=1}^n \pi m_k^2 \Delta x_k \leq \mu(V) \leq \sum_{k=1}^n \pi M_k^2 \Delta x_k = S(\pi f^2, \tau),$$

където  $s(\pi f^2, \tau)$  и  $S(\pi f^2, \tau)$  са долната и горната суми на Дарбу за функцията  $\pi f^2(x)$  в интервала  $[a, b]$ . Функцията  $\pi f^2(x)$  е непрекъсната и следователно интегрируема в интервала  $[a, b]$ . Нека диаметърът на делението да клони към нула. Тогава и двете суми на Дарбу ще клонят към съответния интеграл и от неравенството (12.11) получаваме

$$\int_a^b \pi f^2(x) dx \leq \mu(V) \leq \int_a^b \pi f^2(x) dx,$$

което доказва верността на

**Твърдение 12.4.** Нека функцията  $f(x)$  е непрекъсната и неотрицателна в интервала  $[a, b]$ . Тогава обемът  $\mu(V)$  на тялото  $V$ , което се получава от завъртането на графиката на  $f(x)$  около оста  $Ox$  и равнините през точките  $x = a$  и  $x = b$ , перпендикулярни на оста  $Ox$ , се дава от формулата

$$(12.12) \mu(V) = \pi \int_a^b f^2(x) dx. \blacksquare$$

**Пример 12.3.** Да намерим обема  $\mu(V)$  на кълбо  $V$  с радиус  $r > 0$ . Това кълбо ще разглеждаме като получено от завъртането на полуокръжността  $x^2 + y^2 = r^2, y \geq 0$ , около оста  $Ox$  (Рис. 12.8)

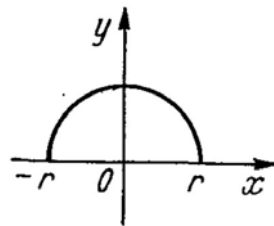


Рис. 12.8.

Тук  $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}, x \in [-r, r]$ . По формулата (12.12) имаме

$$\mu(V) = \pi \int_{-r}^r (r^2 - x^2) dx = \pi r^2 \int_{-r}^r dx - \pi \int_{-r}^r x^2 dx = 2\pi r^3 - \frac{2}{3} \pi r^3 = \frac{4}{3} \pi r^3.$$

**Лице на околна повърхнина на ротационно тяло.** Нека функцията  $f(x)$  е неотрицателна и непрекъсната в интервала  $[a, b]$ . Ще търсим формула за лицето  $\mu(S)$  на повърхнината  $S$ , образувана от завъртането на графиката на  $f(x)$  около оста  $Ox$ . Да разгледаме едно деление  $\tau = \{x_k\}_{k=0}^n$  на интервала  $[a, b]$  (Рис. 12.9).

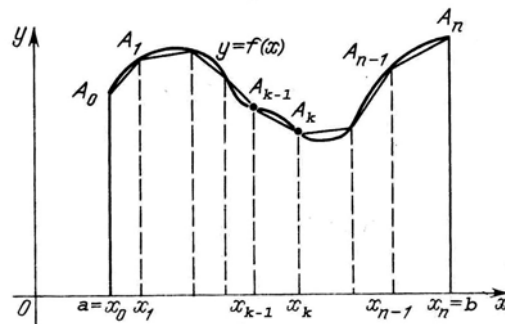


Рис. 12.9.

Делението  $\tau$  задава начупена линия с върхове в точките  $A_k(x_k, y_k), y_k = f(x_k), k = 0, 1, \dots, n$ . Нека  $L_k$  е звеното с краища  $A_{k-1}$  и  $A_k, k = 1, 2, \dots, n$ . При завъртането на  $L_k$  се получава пресечен конус с околна повърхнина  $\pi(y_{k-1} + y_k)l_k$ , където  $l_k$  е дължината на отсечката  $\overline{A_{k-1}A_k}, k = 1, 2, \dots, n$ . Сборът от околните повърхнини на тези пресечени конуси е

$$(12.13) S_\tau = \pi \sum_{k=1}^n (y_{k-1} + y_k) l_k.$$

По определение  $\mu(S)$  е границата на сумите  $S_\tau$ , когато диаметърът на делението клони към нула. Това определение е интуитивно оправдано. По този начин

$$\mu(S) = \lim_{d(\tau) \rightarrow 0} S_\tau.$$

**Твърдение 12.5.** Нека  $f(x)$  има непрекъсната производна в интервала  $[a, b]$ . Тогава е в сила формулата

$$(12.14) \mu(S) = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx.$$

*Доказателство.* Съгласно (12.13) и формулата  $l_k = \sqrt{1 + [f'(\xi_k)]^2} \Delta x_k$ ,  $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ , която получихме при извода на твърдение 12.4, имаме

$$S_\tau = \pi \sum_{k=1}^n (y_{k-1} + y_k) \sqrt{1 + [f'(\xi_k)]^2} \Delta x_k,$$

което ще запишем във вида

$$(12.15) S_\tau = \pi \sum_{k=1}^n 2f(\xi_k) \sqrt{1 + [f'(\xi_k)]^2} \Delta x_k + \pi \sum_{k=1}^n (f(x_{k-1}) + f(x_k) - 2f(\xi_k)) \sqrt{1 + [f'(\xi_k)]^2} \Delta x_k.$$

Първото събираемо в дясната страна на (12.15) е риманова интегрална сума за функцията  $g(x) = 2\pi f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2}$ , следователно при интегралния граничен преход, когато  $d(\tau) \rightarrow 0$ , преминава в интеграла

$$2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx,$$

което е дясната страна на равенството във формулата (12.14). Остава да покажем, че при този граничен преход, второто събираемо

$$(12.16) \pi \sum_{k=1}^n (f(x_{k-1}) + f(x_k) - 2f(\xi_k)) \sqrt{1 + [f'(\xi_k)]^2} \Delta x_k$$

клони към нула. За целта ще използваме равномерната непрекъснатост на  $f(x)$  в интервала  $[a, b]$ , както и ограничеността в този интервал на непрекъснатата функция  $\sqrt{1 + [f'(x)]^2}$ . Нека  $M$  е константа, за която  $\sqrt{1 + [f'(x)]^2} \leq M$ ,  $x \in [a, b]$ . Да изберем едно  $\varepsilon > 0$ . От равномерната непрекъснатост на  $f(x)$  следва съществуване на  $\delta$  такова, че  $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$ , когато  $|x' - x''| < \delta$ ,  $x', x'' \in [a, b]$ . Нека деленето  $\tau$  е избрано с единственото условие  $d(\tau) < \delta$ . Тогава

$$\begin{aligned} |f(x_{k-1}) + f(x_k) - 2f(\xi_k)| &= |[f(x_{k-1}) - f(\xi_k)] - [f(\xi_k) - f(x_k)]| \leq \\ &\leq |f(x_{k-1}) - f(\xi_k)| + |f(\xi_k) - f(x_k)| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon \end{aligned}$$

понеже  $|x_{k-1} - \xi_k| \leq d(\tau) < \delta$  и  $|\xi_k - x_k| \leq d(\tau) < \delta$ . Сега величината (12.16) можем да оценим по следния начин

$$\begin{aligned} \left| \pi \sum_{k=1}^n (f(x_{k-1}) + f(x_k) - 2f(\xi_k)) \sqrt{1 + [f'(\xi_k)]^2} \Delta x_k \right| &\leq \\ &\leq \pi \sum_{k=1}^n |f(x_{k-1}) + f(x_k) - 2f(\xi_k)| \sqrt{1 + [f'(\xi_k)]^2} \Delta x_k \leq \\ &\leq \pi \sum_{k=1}^n 2\varepsilon M \Delta x_k = \varepsilon 2\pi M \sum_{k=1}^n \Delta x_k = \varepsilon [2\pi M(b-a)] \end{aligned}$$



следователно (12.16) можем да направим произволно малка за сметка на избора на достатъчно малко  $\varepsilon > 0$ . Направената оценка показва, че величината от (12.16) клони към нула, когато  $d(\tau) \rightarrow 0$ . ■

**Пример 12.4.** Да пресметнем лицето на сфера  $S$  с радиус  $r > 0$ . Сферата ще разглеждаме като получена от завъртането на полуокръжността  $x^2 + y^2 = r^2$ ,  $y \geq 0$ , около оста  $Ox$  (Рис. 12.8). Тук имаме

$$y = f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}, \quad f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}}, \quad x \in [-r, r].$$

Пресмятаме

$$\sqrt{1 + [f'(x)]^2} = \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}},$$

$$\mu(S) = 2\pi \int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2} \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}} dx = 2\pi r \int_{-r}^r dx = 4\pi r^2.$$

**Принцип на Кавалиери за лица и обеми.** Тук ще приведем интуитивно един универсален подход за пресмятане на лица и обеми, който е бил известен отдавна под друга форма като **принцип на Кавалиери**. Да разгледаме равнинната фигура  $A$  и една числова ос  $Ox$  в произволно взаимно разположение. Да проследим сеченията на  $A$  с права  $l$ , перпендикулярна на оста (Рис. 12.10).

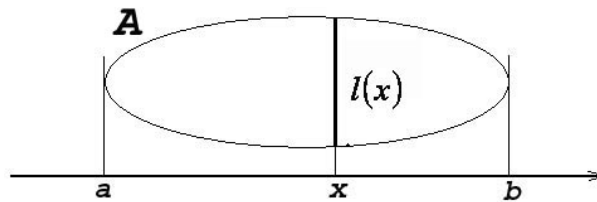


Рис. 12.10.

Нека ненулевите сечения са в интервала  $[a, b]$  и нека текущото сечение има дължина  $l(x)$ . Тогава е валидна следната формула за лице на  $A$

$$(12.17) \mu(A) = \int_a^b l(x) dx.$$

Тази формула може да бъде обоснована по следния начин. Нека  $\tau = \{x_k\}_{k=0}^n$  е едно деление на интервала  $[a, b]$  (Рис. 12.11) и  $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ .

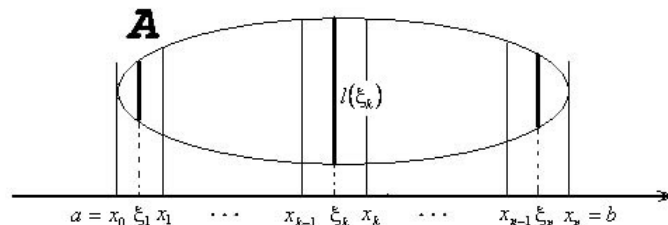


Рис. 12.11.

Тогава  $\tau$  разделя цялата фигура на елементарни  $A_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ , следователно

$$\mu(A) = \mu(A_1) + \mu(A_2) + \dots + \mu(A_n).$$

От друга страна  $\mu(A_k) \approx l(\xi_k) \Delta x_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ , следователно

$$\mu(A) \approx \sum_{k=1}^n l(\xi_k) \Delta x_k = r(l(x), \tau),$$

където  $r(l(x), \tau)$  е римановата интегрална сума за функцията  $l(x)$ ,  $x \in [a, b]$ . Лицето на  $A$  по естествени съображения се определя като границата на тези суми при  $d(\tau) \rightarrow 0$ , които при този интегрален граничен преход клонят към съответния интеграл,

$$\mu(A) = \lim_{d(\tau) \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n l(\xi_k) \Delta x_k = \int_a^b f(x) dx.$$

Формулата (12.17) трябва да се схваща като специфично определение за лице на равнинна фигура и може да се изкаже по следния начин. Ако функцията  $l(x)$  е интегрируема в интервала  $[a, b]$ , то лицето на  $A$  се получава чрез (12.37). Ако  $A$  е криволинейният трапец от рис. 12.9, то за числова ос можем да изберем оста  $Ox$ , при което очевидно  $l(x) = f(x) - g(x)$  и формулата (12.17) се превръща в познатата формула за пресмятане лице на криволинейен трапец. Да отбележим специално, че взаимното разположение на фигурата  $A$  и оста, чрез която се достига до формулата за лице, е произволно.

Нека  $V$  е тримерно тяло и  $Ox$  е някаква числова ос в произволно взаимно разположение (Рис. 12.12).

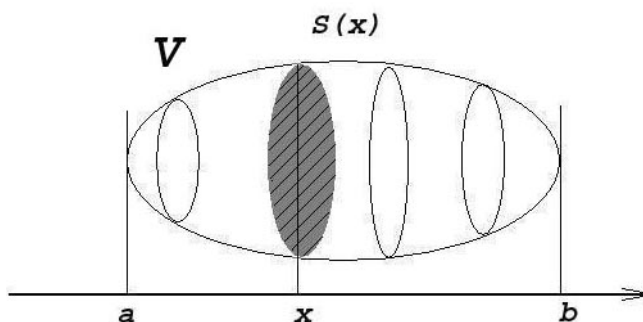


Рис. 12.12.

Да разгледаме сечения на тялото с равнина, която е перпендикулярна на оста. Нека ненулевите сечения са в интервала  $[a, b]$  и нека лицето на текущото сечение е  $S(x)$ . Тогава за обема на тялото  $V$  е валидна формулата

$$(12.18) \mu(A) = \int_a^b S(x) dx.$$

С други думи, ако лицето на сечението  $S(x)$  е интегрируема функция в интервала  $[a, b]$ , то тялото  $V$  има обем, който се задава чрез (12.18). По този начин (12.18) трябва да се схваща като специфично определение за обем на тримерно тяло. Формулата (12.18) може да бъде обоснована с помощта на интегрален граничен преход, следвайки същия начин на разсъждение както при обосновката на формулата за лице.

Изложеният начин на мислене е изключително плодотворен и добре илюстрира основната идея на интегралното смятане.