Лекция 13

§13. Функции на много променливи. Формула на Тейлор

1. Топология на R^n. Точка $\mathbf{x}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ в ***n-мерното евклидово пространство*** R^n наричаме вектора $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, а числото x_k, $k = 1,2,\ldots,n$, е неговата k-та координата. Чрез тези координати векторът се представя като линейна комбинация $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}^{(1)} + x_2\mathbf{e}^{(2)} + \cdots + x_n\mathbf{e}^{(n)}$ в каноничния базис, $\mathbf{e}^{(1)}(1,0,\ldots,0)$, $\mathbf{e}^{(2)}(0,1,\ldots,0)$, ..., $\mathbf{e}^{(n)}(0,0,\ldots,1)$. Свойствата на векторите и линейните операции в R^n са познати от курса по линейна алгебра. Линейните операции събиране и умножение се извършват почленно. Ако $\mathbf{x}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $\mathbf{y}(y_1, y_2, \ldots, y_n)$, са два вектора от R^n, то

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n) \text{ и } \lambda\mathbf{x} = (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n),\ \lambda \in \mathsf{R}.$$

Разстоянието между двете точки $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ се определя по формулата

$$\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}.$$

В случая, когато $n = 1$ се получава права (числова ос), в случая $n = 2$ имаме геометрична равнина, при $n = 3$ – геометрично пространство. За по-големи стойности на n, R^n няма естествена геометрична интерпретация. Геометрията в R^n се определя от наличието на (канонично) ***скаларно произведение***

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n.$$

Скаларното произведение има следните основни свойства:

1) $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \geq 0$, и ако $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 0$, то $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, където $\mathbf{0} = (0,0,\ldots,0)$ е нулевият вектор на R^n;

2) $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle$ -- симетричност;

3) $\langle \lambda_1\mathbf{x}^{(1)} + \lambda_2\mathbf{x}^{(2)} + \cdots + \lambda_m\mathbf{x}^{(m)}, \mathbf{y} \rangle = \lambda_1\langle \mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{y} \rangle + \lambda_2\langle \mathbf{x}^{(2)}, \mathbf{y} \rangle + \cdots + \lambda_m\langle \mathbf{x}^{(m)}, \mathbf{y} \rangle$ -- линейност.

От симетричността следва, че скаларното произведение е линейно и по втория аргумент. Ако разглеждаме векторите като стълбове, то скаларното произведение може да се запише чрез транспониране на втория множител като $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \mathbf{y}^T\mathbf{x}$, а умножението е по известното правило "ред по стълб".

Дължината на вектора $\mathbf{x}$ (модул на вектора $\mathbf{x}$), по аналогия с геометричните пространства R^2 и R^3, се определя по формулата

$$|\mathbf{x}| = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2},$$

което се нарича ***норма на вектора* $\mathbf{x}$*, породена от скаларното произведение***.

Твърдение 13.1 ***(неравенство на Коши).*** За всеки два вектора $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathsf{R}^n$ е изпълнено

(13.1) $\quad |\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle| \leq |\mathbf{x}||\mathbf{y}|$,

при което ако има равенство, то векторите $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ са линейно зависими.

Доказателство. Неравенството може да бъде записано по следния начин

$$|x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n| \leq \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}\sqrt{y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2}.$$

Да разгледаме квадратната функция

$$\varphi(t) = (x_1 + ty_1)^2 + (x_2 + ty_2)^2 + \cdots + (x_n + ty_n)^2 = |\mathbf{x}|^2 + 2t\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + t^2|\mathbf{y}|^2.$$

Тя е неотрицателна за всяко $t \in \mathsf{R}$, следователно за нейната нейната дискриминанта имаме

$$D = 4\left[\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle^2 - |\mathbf{x}|^2|\mathbf{y}|^2\right] \leq 0,$$

откъдето неравенството на Коши следва непосредствено. Ако $\varphi(t) > 0$, за всяко $t \in \mathrm{R}$, то неравенството за дискриминантата е строго и следователно неравенството (13.1) също е строго, следователно, ако в (13.1) има равенство, то $\varphi(t_0) = 0$, за някое t_0, което означава, че $\mathbf{x} + t_0\mathbf{y} = \mathbf{0}$. ■

С помощта на неравенството на Коши можем да докажем

Твърдение 13.2 ***(неравенство на Минковски).*** За всеки два вектора $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathrm{R}^{\mathrm{n}}$ е изпълнено

(13.2) $|\mathbf{x} + \mathbf{y}| \le |\mathbf{x}| + |\mathbf{y}|$,

при което ако има равенство, то векторите $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ са линейно зависими.

Доказателство. Имаме

$$|\mathbf{x} + \mathbf{y}|^2 = \langle \mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{x} + \mathbf{y} \rangle = |\mathbf{x}|^2 + 2\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + |\mathbf{y}|^2,$$

откъдето според неравенството на Коши имаме

$$|\mathbf{x} + \mathbf{y}|^2 \le |\mathbf{x}|^2 + 2|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle| + |\mathbf{y}|^2 \le |\mathbf{x}|^2 + 2|\mathbf{x}||\mathbf{y}| + |\mathbf{y}|^2 = (|\mathbf{x}| + |\mathbf{y}|)^2,$$

което доказва (13.2). ■

Нека $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathrm{R}^{\mathrm{n}}$ са произволни. Тогава

$$\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = |\mathbf{x} - \mathbf{y}| = |(\mathbf{x} - \mathbf{z}) + (\mathbf{z} - \mathbf{y})| \le |\mathbf{x} - \mathbf{z}| + |\mathbf{z} - \mathbf{y}| = \rho(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + \rho(\mathbf{z}, \mathbf{y}),$$

т.е. получихме неравенството на триъгълника за разстоянието между две точки

(13.3) $\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \le \rho(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + \rho(\mathbf{z}, \mathbf{y})$.

Определение 13.1 Едно множество M се нарича ***метрично пространство***, когато между всеки два негови елемента $x, y \in M$, е определена функцията $\rho(x, y)$ със следните три свойства:

1) $\rho(x, x) = 0$, за всяко $x \in M$, и ако $\rho(x, y) = 0$ за някои $x, y \in M$, то $x = y$;

2) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$, за всеки $x, y \in M$ (симетричност);

3) $\rho(x, y) \le \rho(x, z) + \rho(z, y)$, за всеки $x, y, z \in M$ (неравенство на триъгълника).

Сега лесно се вижда, че R^{n} е метрично пространство с метрика, породена от нормата, понеже $\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$. Свойствата **1**) и **2**) са очевидни, а **3**) следва от (13.3). Поради наличието на норма $|\mathbf{x}| = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle}$ казваме, че ***пространството*** R^{n} ***е нормирано***. Нормата има следните характеризиращи основни свойства.

1) $|\mathbf{x}| \ge 0$ и $|\mathbf{x}| = 0$ тогава и само тогава, когато $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

2) $|\lambda \mathbf{x}| = |\lambda||\mathbf{x}|$, за всеки скалар $\lambda \in \mathrm{R}$.

3) $|\mathbf{x} + \mathbf{y}| \le |\mathbf{x}| + |\mathbf{y}|$, за всеки два вектора $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathrm{R}^{\mathrm{n}}$.

Определение 13.2. Нека $\mathbf{x} \in \mathrm{R}^{\mathrm{n}}$. Множеството $B(\mathbf{x}, \varepsilon)$ от всички точки $\mathbf{y} \in \mathrm{R}^{\mathrm{n}}$, за които $\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) < \varepsilon$ се нарича ***отворено кълбо*** с център $\mathbf{x}$ и радиус $\varepsilon > 0$. Множеството $\overline{B}(\mathbf{x}, \varepsilon)$ от всички точки $\mathbf{y} \in \mathrm{R}^{\mathrm{n}}$, за които $\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \le \varepsilon$ се нарича ***затворено кълбо*** с център $\mathbf{x}$ и радиус $\varepsilon \ge 0$.

$B(\mathbf{x}, \varepsilon)$ се нарича още ε-околност на $\mathbf{x} \in \mathrm{R}^{\mathrm{n}}$. По този начин имаме

$$B(\mathbf{x}, \varepsilon) = \left\{ \mathbf{y} \in \mathrm{R}^{\mathrm{n}} : \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (x_k - y_k)^2} < \varepsilon \right\}.$$

Когато $n = 1$, $B(x, \varepsilon)$ е отворен интервал с център x и радиус ε (Рис. 13.1)

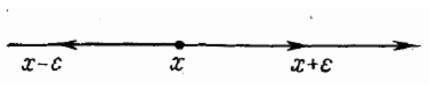

Рис. 13.1

Когато $n=2$, $B(\mathbf{x},\varepsilon)$ е кръг с център $\mathbf{x}(x_1,x_2)$ и радиус ε (Рис. 13.2)

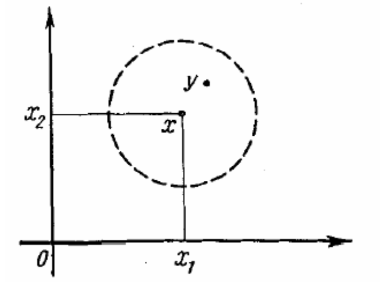

Рис. 13.2

Основните определения и свойства на редиците в R^n са аналогични на тези, свързани с числови редици.

Ако на всяко естествено число $m \in \mathsf{N}$ е съпоставена точка $\mathbf{x}^{(m)} \in \mathsf{R}^n$, то казваме, че е зададена ***редица*** от точки в R^n. Редиците ще бележим с $\left\{\mathbf{x}^{(m)}\right\}_{m=1}^{\infty}$ или просто с $\left\{\mathbf{x}^{(m)}\right\}$. Ако е дадена редицата $\left\{\mathbf{x}^{(m)}\right\}$ и някаква растяща редица от естествени числа $m_1 < m_2 < \cdots < m_\nu < \cdots$, то можем да образуваме ***подредицата*** $\left\{\mathbf{x}^{(m_\nu)}\right\}$.

Определение 13.3. Точката $\mathbf{x} \in \mathsf{R}^n$ се нарича граница на редицата $\left\{\mathbf{x}^{(m)}\right\}$ и се пише

$$\lim_{m\to\infty} \mathbf{x}^{(m)} = \mathbf{x},$$

когато

$$\lim_{m\to\infty} \rho\left(\mathbf{x}^{(m)},\mathbf{x}\right) = 0 .$$

Ако $\lim\limits_{m\to\infty} \mathbf{x}^{(m)} = \mathbf{x}$, то се казва, че редицата $\left\{\mathbf{x}^{(m)}\right\}$ е сходяща и клони към границата $\mathbf{x}$.

От горното определение означава, че $\lim\limits_{m\to\infty} \mathbf{x}^{(m)} = \mathbf{x}$ тогава и само тогава, когато за всяко $\varepsilon > 0$ може да се намери естествено число m_0, такова, че $\rho\left(\mathbf{x}^{(m)},\mathbf{x}\right) = \left|\mathbf{x}^{(m)} - \mathbf{x}\right| < \varepsilon$, винаги когато $m > m_0$. При $n=1$ дадените определения напълно се покриват с известните определения за сходящи числови редици. При $n=2$ сходимостта означава, че за всеки кръг с център $\mathbf{x}(x_1,x_2)$ и радиус $\varepsilon > 0$, от известно място нататък (зависещо от ε) всички членове на редицата се съдържат в този кръг (Рис. 13.3)

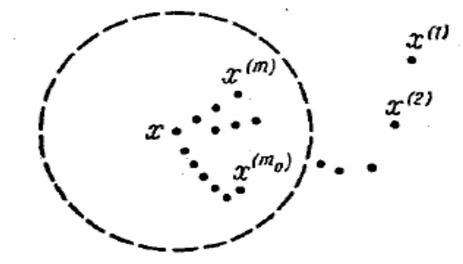

Рис. 13.3

Определение 13.4. Редицата $\{\mathbf{x}^{(m)}\}$ се нарича ***фундаментална***, когато $\lim\limits_{m\to\infty, m'\to\infty} \rho\left(\mathbf{x}^{(m)}, \mathbf{x}^{(m')}\right) = 0$, т.е. ако за всяко $\varepsilon > 0$ съществува m_0 такова, че $\rho\left(\mathbf{x}^{(m)}, \mathbf{x}^{(m')}\right) < \varepsilon$, винаги когато $m > m_0$ и $m' > m_0$.

Редицата $\{\mathbf{x}^{(m)}\}$ се нарича ограничена, когато съществува константа C такава, че $\left|\mathbf{x}^{(m)}\right| < C$, за всяко $m \in \mathrm{N}$.

Както за числови редици се установява, че всяка сходяща редица е фундаментална и всяка фундаментална редица е ограничена. Освен това, ако една редица е сходяща, то нейната граница е единствена.

Твърдение 13.3 ***(свойства на подредиците).***
1) Нека редицата $\{\mathbf{x}^{(m)}\}$ е фундаментална. Тогава всяка нейна подредица $\{\mathbf{x}^{(m_\nu)}\}$ също е фундаментална.
2) Нека редицата $\{\mathbf{x}^{(m)}\}$ е сходяща и клони към границата $\mathbf{x}$. Тогава всяка нейна подредица $\{\mathbf{x}^{(m_\nu)}\}$ също е сходяща и клони към същата граница $\mathbf{x}$.
3) Ако редицата $\{\mathbf{x}^{(m)}\}$ е фундаментална и има някаква сходяща подредица $\{\mathbf{x}^{(m_\nu)}\}$, която клони към границата $\mathbf{x}$, то цялата редица $\{\mathbf{x}^{(m)}\}$ също е сходяща, при това към същата граница $\mathbf{x}$. ■

Всеки член $\mathbf{x}^{(m)}$ на една редица $\{\mathbf{x}^{(m)}\}$ се задава чрез своите координати, $\mathbf{x}^{(m)} = \left(x_1^{(m)}, x_2^{(m)}, \ldots, x_n^{(m)}\right)$. Сходимостта в R^n е еквивалентна на покоординатна сходимост.

Твърдение 13.4. Редицата $\left\{\mathbf{x}^{(m)} = \left(x_1^{(m)}, x_2^{(m)}, \ldots, x_n^{(m)}\right)\right\}$ е сходяща и клони към границата $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ тогава и само тогава, когато за всяка координатна редица $\{x_k^{(m)}\}$, $k = 1,2,\ldots,n$, е изпълнено

$$\lim_{m\to\infty} x_k^{(m)} = x_k .$$

Доказателство. **1**) Нека $\lim\limits_{m\to\infty} \mathbf{x}^{(m)} = \mathbf{x}$ и нека изберем някакво $\varepsilon > 0$. Тогава може да се намери m_0, за което

$$\rho\left(\mathbf{x}^{(m)}, \mathbf{x}\right) = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \left(x_k^{(m)} - x_k\right)^2} < \varepsilon ,$$

когато $m > m_0$, следователно при всяко $k = 1,2,\ldots,n$ е изпълнено $\left|x_k^{(m)} - x_k\right| < \varepsilon$, когато $m > m_0$, което означава по определение, че всичките координатни редици са сходящи и клонят към съответната координата на границата.

2) Да предположим сега, че за всяка координатна редица е $\{x_k^{(m)}\}$, $k = 1,2,\ldots,n$, изпълнено

$$\lim_{m\to\infty} x_k^{(m)} = x_k$$

и да изберем едно $\varepsilon > 0$. Тогава за всеки индекс $k = 1,2,\ldots,n$ съществува $m_{0,k}$, за което $\left|x_k^{(m)} - x_k\right| < \varepsilon/\sqrt{n}$, при $m > m_{0,k}$. Нека $m_0 = \max\left(m_{0,1}, m_{0,2}, \ldots, m_{0,n}\right)$ и да положим $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Ще докажем, че това $\mathbf{x}$ е граница на редицата $\{\mathbf{x}^{(m)}\}$. Наистина, ако $m > m_0$, то е изпълнено

$$\rho\left(\mathbf{x}^{(m)},\mathbf{x}\right)=\sqrt{\sum_{k=1}^{n}\left(x_k^{(m)}-x_k\right)^2}<\varepsilon,$$

което доказва твърдението. ■

По същия начин се доказва, че една редица е фундаментална тогава и само тогава, когато е покоординатно фундаментална, т.е. когато всичките координатни редици са фундаментални и, разбира се, една редица е ограничена тогава и само тогава когато е покоординатно ограничена, т.е. когато всяка координатна редица е ограничена.

Най-важната характеристика на полето на реалните числа е, че то пълно, което означава, ***че всяка фундаментална редица има граница*** (всяка фундаментална редица е сходяща). Това свойство притежават и фундаменталните редици в R^n.

Теорема 13.1. Една редица е фундаментална тогава и само тогава, когато е сходяща.

Доказателство. Вече знаем, че всяка сходяща редица е фундаментална. Остава да покажем обратното. Нека редицата $\left\{\mathbf{x}^{(m)}\right\}$ е фундаментална. Тогава тя е покоординатно фундаментална, следователно всяка координатна редица $\left\{x_k^{(m)}\right\}$, $k=1,2,\dots,n$, е фундаментална и сходяща към някоя граница x_k. Сега от твърдение 13.4 следва, че

$$\lim_{m\to\infty}\mathbf{x}^{(m)}=\mathbf{x}\overset{\text{def}}{=}\left(x_1,x_2,\dots,x_n\right).\ ■$$

Определение 13.5. Множеството $A\subset\mathsf{R}^n$ се нарича ***ограничено***, когато съществува константа C такава, че $|\mathbf{x}|<C$, за всяко $\mathbf{x}\in A$.

Всяка ограничена редица представлява ограничено множество. Теоремата на Болцано-Вайерщрас за числови редици гласи, че от всяка ограничена числова редица може да се избере сходяща подредица. Такава теорема е валидна и за редиците от R^n.

Теорема 13.2 *(Болцано-Вайерщрас).* От всяка ограничена редица $\left\{\mathbf{x}^{(m)}\right\}$ може да се избере сходяща подредица.

Доказателство. Нека редицата $\left\{\mathbf{x}^{(m)}\right\}$ е ограничена. Тогава тя е покоординатно ограничена и следователно от всяка координатна редица $\left\{x_k^{(m)}\right\}$, $k=1,2,\dots,n$, може да се избере сходяща подредица $\left\{x_k^{(m_\nu)}\right\}$ с граница x_k. За простота да предположим, че $n=2$. Тогава $\lim\limits_{\nu\to\infty}x_1^{(m_\nu)}=x_1$. Сега да разгледаме редицата $\left\{x_2^{(m_\nu)}\right\}$, която е подредица на $\left\{x_2^{(m)}\right\}$ и следователно е ограничена. От нея може да се избере сходяща подредица $\left\{x_2^{\left(m_{\nu_\mu}\right)}\right\}$, която ще има за граница числото x_2. Тогава подредицата $\left\{\mathbf{x}^{\left(m_{\nu_\mu}\right)}\right\}$ е сходяща и клони към $\mathbf{x}=\left(x_1,x_2\right)$, понеже и двете координатни редици на $\left\{\mathbf{x}^{\left(m_{\nu_\mu}\right)}\right\}$ са сходящи и клонят съответно към x_1 и x_2. За да завършим доказателството остава да се позовем на твърдение 13.4. Случаят на произволно n съдържа само технически усложнения в сравнение с изложеното доказателство. ■

Ако една редица не е ограничена, то тя съдържа подредица, която клони към безкрайност. Казваме, че редицата $\left\{\mathbf{x}^{(m)}\right\}$ клони към безкрайност и пишем $\lim\limits_{m\to\infty}\mathbf{x}^{(m)}=\infty$, когато $\lim\limits_{m\to\infty}\left|\mathbf{x}^{(m)}\right|=\infty$.

Следващото определение касае взаимното разположение на точка и множество.

Определение 13.6. Нека $\mathbf{x} \in \mathrm{R}^n$ и $A \subset \mathrm{R}^n$, $A \neq \varnothing$.
1) Точката $\mathbf{x} \in A$ се нарича ***вътрешна*** за A, когато се съдържа в A заедно с някоя своя ε-околност $B(\mathbf{x}, \varepsilon)$.
2) Точката $\mathbf{x}$ се нарича ***външна*** за A, когато е вътрешна за допълнението $A^c = \mathrm{R}^n \setminus A$.
3) Точката $\mathbf{x}$ се нарича ***гранична*** (***контурна***) за A, когато не е нито вътрешна нито външна за A.
4) Точката $\mathbf{x}$ се нарича ***точка на сгъстяване*** за A, когато всяка нейна ε-околност $B(\mathbf{x}, \varepsilon)$ съдържа точки от A, различни от $\mathbf{x}$.
5) Точката $\mathbf{x} \in A$ се нарича ***изолирана***, когато съществува някаква нейна ε-околност $B(\mathbf{x}, \varepsilon)$, която не съдържа други точки от A освен $\mathbf{x}$.

Една гранична точка може да принадлежи или да не принадлежи на множеството. Точката $\mathbf{x}$ е външна за A, когато съществува някаква ε-околност $B(\mathbf{x}, \varepsilon)$, за която $B(\mathbf{x}, \varepsilon) \bigcap A = \varnothing$. Очевидно всяка изолирана точка е и гранична. От последното определение следва, че ***всяка точка е или вътрешна или външна или гранична*** относно дадено множество. Една точка $\mathbf{x}$ е точка на сгъстяване за A тогава и само тогава, когато може да се намери редица от точки $\left\{\mathbf{x}^{(m)} \in A, \mathbf{x}^{(m)} \neq \mathbf{x}\right\}$, за която $\lim\limits_{m \to \infty} \mathbf{x}^{(m)} = \mathbf{x}$.

Следващото определение касае основните видове множества в анализа. Да отбележим, че едно множество се нарича ***крайно***, когато неговите елементи са краен брой и ***безкрайно***, когато неговите елементи са безбройно много.

Определение 13.7 ***(отворени, затворени и компактни множества).***
1) Множеството $U \subset \mathrm{R}^n, U \neq \varnothing$, се нарича отворено, когато се състои само от вътрешни точки. Празното множество $\varnothing$ също определяме като отворено.
2) Множеството $F \subset \mathrm{R}^n$ се нарича затворено, когато неговото допълнение $F^c = \mathrm{R}^n \setminus F$ е отворено.
3) Множеството $K \subset \mathrm{R}^n$, $K \neq \varnothing$, се нарича компактно, когато е едновременно затворено и ограничено.

От горното определение следва, че множеството $U \neq \varnothing$ е отворено, точно когато за всяка негова точка $\mathbf{x} \in U$ съществува някаква нейна ε-околност $B(\mathbf{x}, \varepsilon)$, за която $B(\mathbf{x}, \varepsilon) \subset U$. Единствените множества, които са едновременно отворени и затворени са цялото R^n и празното множество $\varnothing$. Освен това всяко отворено кълбо е отворено множество и всяко затворено кълбо е затворено множество.

Следващото твърдение дава характеризира затворените множества.

Твърдение 13.5. Едно множество $F \subset \mathrm{R}^n$, $F \neq \varnothing$, е затворено тогава и само тогава, когато съдържа всичките си точки на сгъстяване. ■

Произволно обединение $U = \bigcup\limits_{\alpha} U_\alpha$, $\alpha \in I$, на отворени множества U_α е отворено множество. Сега от закона на Де-Морган $\left(\bigcap\limits_{\alpha} F_\alpha\right)^c = \bigcup\limits_{\alpha} F_\alpha^c$ следва, че произволно сечение на затворени множества също е затворено. В общия случай произволно сечение на отворени множества може да не бъде отворено, както и произволно обединение на затворени множества може да не бъде затворено. Сечението на краен брой отворени множества е отворено и обединението на краен брой затворени множества е затворено.

От твърдение 13.5 следва, че ако към дадено множество A добавим неговите точки на сгъстяване, то се получава затворено множество, което всъщност е "наймалкото" затворено множество, което съдържа A и се нарича ***затворена обвивка*** на A и се бележи с $\overline{A}$.

Определение 13.8. ***Граница (контур)*** ∂A на едно множество $A \subset \mathrm{R}^n$ се нарича съвкупността от всичките му гранични точки.

Понеже всяка гранична точка е или точка на сгъстяване или изолирана, то затворената обвивка на едно множество се получава, като добавим неговите гранични точки, т.е. $\overline{A} = A \bigcup \partial A$.

Сега ще дадем друга характеристика на затворените множества.

Твърдение 13.6. Едно множество $F \subset \mathrm{R}^n$, $F \neq \varnothing$, е затворено тогава и само тогава, когато съдържа границите на всички свои сходящи редици, т.е. когато от $\lim\limits_{m\to\infty} \mathbf{x}^{(m)} = \mathbf{x}$ и $\mathbf{x}^{(m)} \in F$ следва, че $\mathbf{x} \in F$. ■

Да припомним, че множеството $K \subset \mathrm{R}^n$ е компактно, когато е едновеменно ограничено и затворено. Следващата теорема има особено важна роля в анализа.

Теорема 13.3. Едно множество $K \subset \mathrm{R}^n$ е компактно тогава и само тогава, когато от всяка негова редица може да се избере сходяща подредица, чиято граница принадлежи на K. ■

Една от най-важните теореми на анализа е теоремата на Кантор за вложените интервали. Ограничените затворени интервали са основни примери за компактни множества. Теоремата на Кантор може да се обобщи за случая на редица от вложени едно в друго компактни множества от R^n.

Теорема 13.4 ***(Кантор).*** Нека е дадена редицата от (непразни) компактни множества $K_1 \supseteq K_2 \supseteq \cdots \supseteq K_m \supseteq \cdots$. Тогава тяхното сечение не е празно. ■

За да характеризираме "размера" на едно множество $A \subset \mathrm{R}^n$ въвеждаме следното

Определение 13.9. ***Диаметър*** $d(A)$ на ограниченото множество $A \subset \mathrm{R}^n$ се нарича $d(A) = \sup\{|\mathbf{x}-\mathbf{y}| : \mathbf{x},\mathbf{y} \in A\}$.

Отсечка, в R^n свързваща точките $\mathbf{x}^{(1)}$ и $\mathbf{x}^{(2)}$, се нарича множеството $I : \mathbf{x}^{(1)} + t\left(\mathbf{x}^{(2)} - \mathbf{x}^{(1)}\right)$, $0 \le t \le 1$. Когато $n = 2$ или $n = 3$, множеството I представлява геометрична отсечка, което оправдава названието в общия случай. ***Начупена линия*** $\gamma = \left[\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}^{(m)}\right]$ се нарича множество, състоящо се от краен брой отсечки $I_k : \left[\mathbf{x}^{(k)}, \mathbf{x}^{(k+1)}\right]$, свързани последователно.

Образно (с някои уточнения) диаметърът на дадено множество може да се определи като мярката на най-дългата отсечка с краища от множеството.

Определение 13.10. Множеството $A \subset \mathrm{R}^n$ се нарича ***линейно свързано***, когато всеки две негови точки могат да се съединят с начупена линия. Множеството $D \subset \mathrm{R}^n$ се нарича ***област***, когато е едновременно отворено и линейно свързано. Затворената обвивка $\overline{D}$ на дадена област D се нарича ***затворена област***.

Аналогично се определя ***права*** g в R^n, минаваща през точките $\mathbf{x}^{(1)}$ и $\mathbf{x}^{(2)}$: $g : \mathbf{x}^{(1)} + t\left(\mathbf{x}^{(2)} - \mathbf{x}^{(1)}\right)$, $t \in \mathrm{R}$. ***Хиперравнина*** α в R^n с нормален вектор $\vec{\mathbf{a}}(a_1, a_2, \ldots, a_n) \neq \vec{\mathbf{0}}$ се определя като съвкупността от точки $\mathbf{x}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, за които е изпълнено равенството $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n + b = 0$. В R^3 хиперравнини са обичайните геометрични равнини, а в R^2 хиперравнини са правите.

2. Граница на функция и непрекъснатост. Тук ще разглеждаме функции $f(\mathbf{x}): E \to \mathsf{R}$, определени в някакво подмножество E на R^n и приемащи реални стойности. Ще пишем $f(\mathbf{x})$ или $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. При $n = 1$ имаме функция на една променлива $f(x)$, при $n = 2$ имаме функция на две променливи, за която обикновено ще пишем $f(x, y)$ вместо $f(x_1, x_2)$, а при $n = 3$ имаме функция на три променливи, за която обикновено ще пишем $f(x, y, z)$ вместо $f(x_1, x_2, x_3)$.

Нека е дадена функцията $y = f(\mathbf{x})$, определена в множеството $E \subset \mathsf{R}^n$. Тогава множеството от точки $\Gamma(f)$ в евклидовото пространство R^{n+1} от вида $(x_1, x_2, \ldots, x_n, y)$, където $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in E$ и $y = f(\mathbf{x})$ се нарича графика на функцията $f(\mathbf{x})$. В случай на функция на две променливи, графиката на функцията има геометричен образ в пространството (Рис. 13.4)

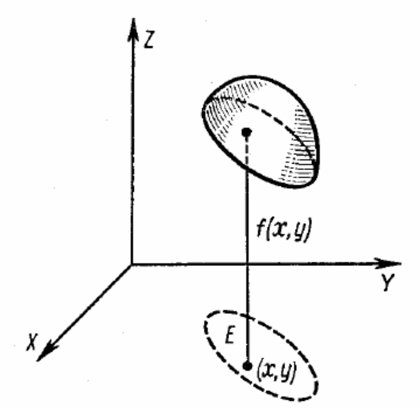

Рис. 13.4

Определение 13.11. Нека функцията $f(\mathbf{x})$ е определена в някакво множество $E \subset \mathsf{R}^n$ и $\mathbf{x}^{(0)}$ се явява точка на сгъстяване за E. Числото a се нарича граница на функцията $f(\mathbf{x})$ при $\mathbf{x}$ клонящо към $\mathbf{x}^{(0)}$ $\left(\mathbf{x} \to \mathbf{x}^{(0)}\right)$ (или още граница на функцията $f(\mathbf{x})$ в точката $\mathbf{x}^{(0)}$), когато за всяка редица от точки $\left\{\mathbf{x}^{(m)} \in E, \mathbf{x}^{(m)} \neq \mathbf{x}^{(0)}\right\}$, за която $\lim\limits_{m\to\infty} \mathbf{x}^{(m)} = \mathbf{x}^{(0)}$, числовата редица $\left\{f\left(\mathbf{x}^{(m)}\right)\right\}$ клони към числото a. Пишем $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}^{(0)}} f(\mathbf{x}) = a$.

В горното определение $\mathbf{x}^{(0)}$ е точка на сгъстяване за E, следователно съществуват редици $\left\{\mathbf{x}^{(m)} \in E\right\}$, такива, че всяко $\mathbf{x}^{(m)} \neq \mathbf{x}^{(0)}$ и $\lim\limits_{m\to\infty} \mathbf{x}^{(m)} = \mathbf{x}^{(0)}$. Да отбележим специално, че функцията $f(\mathbf{x})$ не се предполага определена в самата точка $\mathbf{x}^{(0)}$. Следващото определение е полезна модификация на определение 13.11 и се отнася за граница на функция по множество.

Определение 13.12. Нека функцията $f(\mathbf{x})$ е определена в някакво множество $E \subset \mathbb{R}^n$, $A \subset E$, и $\mathbf{x}^{(0)}$ се явява точка на сгъстяване за A. Числото a се нарича граница на функцията $f(\mathbf{x})$ по множеството A при $\mathbf{x}$ клонящо към $\mathbf{x}^{(0)}$, когато за всяка редица от точки $\left\{\mathbf{x}^{(m)} \in A, \mathbf{x}^{(m)} \neq \mathbf{x}^{(0)}\right\}$, за която $\lim\limits_{m\to\infty} \mathbf{x}^{(m)} = \mathbf{x}^{(0)}$, числовата редица $\left\{f\left(\mathbf{x}^{(m)}\right)\right\}$ клони към числото a. Пишем $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}^{(0)}, \mathbf{x}\in A} f(\mathbf{x}) = a$.

Съществуването на граница на функция може да се определи в термините на околности на точката $\mathbf{x}^{(0)}$ и числото a.

Твърдение 13.7. Числото a е граница на функцията $f(\mathbf{x})$ при $\mathbf{x} \to \mathbf{x}^{(0)}$ тогава и само тогава, когато за всяко $\varepsilon > 0$ съществува δ такова, че $|f(\mathbf{x}) - a| < \varepsilon$, когато $\rho(\mathbf{x}, \mathbf{x}^{(0)}) < \delta$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}^{(0)}$. ■

Твърдение 13.7 дава еквивалентно определение за граница на функция в точка и затова самото то може да се разглежда и като определение.

Определението за граница на функция може да се улесни, ако въведем понятието пробита ε-околност на точка $\mathbf{x}$, $\overset{\circ}{B}(\mathbf{x}, \varepsilon) = B(\mathbf{x}, \varepsilon) \setminus \{\mathbf{x}\}$. Числото a е граница на функцията $f(\mathbf{x})$ при $\mathbf{x} \to \mathbf{x}^{(0)}$ тогава и само тогава, когато за всяко $\varepsilon > 0$ съществува δ такова, че $f(\mathbf{x}) \in B(a, \varepsilon)$, когато $\mathbf{x} \in \overset{\circ}{B}(\mathbf{x}^{(0)}, \delta)$.

Ако функцията $f(\mathbf{x}) : E \to \mathsf{R}$ има граница a при $\mathbf{x} \to \mathbf{x}^{(0)}$, където $\mathbf{x}^{(0)}$ е точка на сгъстяване за множеството E, то $f(\mathbf{x})$ има същата граница и по всяко множество $A \subset E$, за което $\mathbf{x}^0$ е точка на сгъстяване. В общия една функция може да има граница по някакво множество и да няма граница по друго (или да има друга граница).

Верността на следното твърдение произтича непосредствено от определенията.

Твърдение 13.8. Нека $\mathbf{x}^{(0)}$ е точка на сгъстяване за дефиниционното множество на функциите $f(\mathbf{x})$ и $g(\mathbf{x})$, $\lim\limits_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}^{(0)}} f(x) = a$ и $\lim\limits_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}^{(0)}} g(x) = b$. Тогава:

1) функцията $f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})$ също има граница в $\mathbf{x}^{(0)}$, при което $\lim\limits_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}^{(0)}} [f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})] = a + b$;

2) функцията $f(\mathbf{x}) g(\mathbf{x})$ също има граница в $\mathbf{x}^{(0)}$, при което $\lim\limits_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}^{(0)}} [f(\mathbf{x}) g(\mathbf{x})] = a\,b$;

3) ако $b \neq 0$, то функцията $f(\mathbf{x}) / g(\mathbf{x})$ също има граница в $\mathbf{x}^{(0)}$, при което $\lim\limits_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}^{(0)}} [f(\mathbf{x}) / g(\mathbf{x})] = a / b$. ■

Сега сме готови да дадем определения за непрекъснатост на функция в точка и множество.

Определение 13.13. Нека функцията $f(\mathbf{x})$ е определена в някакво множество $E \subset \mathsf{R}^{\mathsf{n}}$ и $\mathbf{x}^{(0)} \in E$ се явява точка на сгъстяване за E. Казва се, че $f(\mathbf{x})$ е ***непрекъсната*** в точката $\mathbf{x}^{(0)}$ (***по съвкупност на променливите***), когато $\lim\limits_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}^{(0)}} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}^{(0)})$. По дефиниция приемаме, че ако $\mathbf{x}^{(0)}$ е изолирана точка за E, то $f(\mathbf{x})$ е непрекъсната в $\mathbf{x}^{(0)}$. Ако функцията $f(\mathbf{x})$ е непрекъсната във всяка точка от дефиниционното си множество E, то тя се нарича непрекъсната в E.

Например метриката е непрекъсната по всяка от двете си променливи, т.е. функциите $f(\mathbf{x}) = \rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}^{(0)})$ и $g(\mathbf{y}) = \rho(\mathbf{x}^{(0)}, \mathbf{y})$ са непрекъснати във всяка точка на R^{n}.

Определение 13.14. Нека функцията $f(\mathbf{x})$ е определена в някакво множество $E \subset \mathsf{R}^{\mathsf{n}}$, $A \subset E$, и $\mathbf{x}^{(0)}$ се явява точка на сгъстяване за A. Функцията $f(\mathbf{x})$ се нарича непрекъсната по множеството A при $\mathbf{x}$ клонящо към $\mathbf{x}^{(0)}$, когато $\lim\limits_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}^{(0)}, \mathbf{x} \in A} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}^{(0)})$.

При определението за непрекъснатост в точка се иска функцията да бъде дефинирана в тази точка и по този начин определението за непрекъснатост може да се изкаже в следния вид.

Твърдение 13.9. Функцията $f(\mathbf{x})$, определена в множеството E, е непрекъсната в точката $\mathbf{x}^{(0)} \in E$ тогава и само тогава, когато:
1) за всяка редица от точки $\{\mathbf{x}^{(m)} \in E\}$, за която $\lim\limits_{m\to\infty} \mathbf{x}^{(m)} = \mathbf{x}^{(0)}$, числовата редица $\{f(\mathbf{x}^{(m)})\}$ е сходяща и клони към $f(\mathbf{x}^{(0)})$;
2) за всяко $\varepsilon > 0$ съществува δ такова, че $\left|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}^{(0)})\right| < \varepsilon$, когато $\rho(\mathbf{x}, \mathbf{x}^{(0)}) < \delta$. ■

Твърдение 13.9 се модифицира по очевиден начин за случая на непрекъснатост по множество.

От твърдение 13.8 следва, че ако $f(\mathbf{x})$ и $g(\mathbf{x})$ са непрекъснати в точката $\mathbf{x}^{(0)}$, то $f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})$, $f(\mathbf{x})g(\mathbf{x})$ и $f(\mathbf{x})/g(\mathbf{x})$ $(g(\mathbf{x}^{(0)}) \neq 0)$ също са непрекъснати в $\mathbf{x}^{(0)}$. Аналогично твърдение е вярно и когато $f(\mathbf{x})$ и $g(\mathbf{x})$ са непрекъснати в някакво множество E.

Композицията на непрекъснати функции също е непрекъсната функция.

Функциите, които се получават от променливите x_1, x_2, ..., x_n чрез краен брой композиции на основните елементарни функции на една променлива и операциите събиране, умножение и деление се наричат ***елементарни функции*** на променливите x_1, x_2, ..., x_n. ***Елементарните функции са непрекъснати във всяка вътрешна точка на дефиниционната си област.***

Ако една функция е определена и непрекъсната над компактно множество, то тя е ограничена и равномерно непрекъсната. Една функция се нарича ***ограничена*** (отгоре/отдолу) в дадено множество, когато множеството на нейните стойности е ограничено (отгоре/отдолу).

Теорема 13.5. Нека функцията $f(\mathbf{x})$ е определена над компактното множество $K \subset \mathrm{R}^n$. Тогава $f(\mathbf{x})$ е ограничена, при което $f(\mathbf{x})$ достига най-голяма и най-малка стойности. Съществуват точка $\mathbf{x}_{\max} \in K$ и точка $\mathbf{x}_{\min} \in K$, за които

$$f(\mathbf{x}_{\max}) = \max_{\mathbf{x}\in K} f(\mathbf{x}) \text{ и } f(\mathbf{x}_{\min}) = \min_{\mathbf{x}\in K} f(\mathbf{x}).$$

Доказателство. Да допуснем, че $f(\mathbf{x})$ не е ограничена, т.е. че множеството от нейните стойности не е ограничено. Тогава за всяко $m \in \mathrm{N}$ може да се намери $\mathbf{x}^{(m)} \in K$, за което $\left|f(\mathbf{x}^{(m)})\right| > m$. По условие множеството K е компактно, следователно от редицата $\{\mathbf{x}^{(m)}\}$ може да се избере сходяща подредица с граница от K, $\lim\limits_{\nu\to\infty} \mathbf{x}^{(m_\nu)} = \mathbf{x}^{(0)} \in K$. По условие функцията $f(\mathbf{x})$ е непрекъсната, следователно $\lim\limits_{\nu\to\infty} f(\mathbf{x}^{(m_\nu)}) = f(\mathbf{x}^{(0)})$, което противоречи на заключението, че $\left|f(\mathbf{x}^{(m_\nu)})\right| > m_\nu$.

Нека $\mathbf{M}$ и $\mathbf{m}$ са точната горна и точната долна граница на множеството от стойностите на $f(\mathbf{x})$. Тогава за всяко $\varepsilon > 0$ съществува някакво $x_\varepsilon \in K$, за което $\mathbf{M} - \varepsilon < f(\mathbf{x}_\varepsilon) \le \mathbf{M}$; в частност за всяко $m \in \mathrm{N}$ съществува $\mathbf{x}^{(m)} \in K$, за което $\mathbf{M} - 1/m < f(\mathbf{x}_m) \le \mathbf{M}$. Понеже K е компактно, от редицата $\{\mathbf{x}^{(m)}\}$ може да се избере сходяща подредица с граница от K, $\lim\limits_{\nu\to\infty} \mathbf{x}^{(m_\nu)} = \mathbf{x}^{(0)} \in K$, за която

$$\mathbf{M} - 1/m_\nu < f(\mathbf{x}_{m_\nu}) \le \mathbf{M}.$$

Сега от непрекъснатостта на $f(\mathbf{x})$, след граничен преход по $\nu \to \infty$, от последното следва, че $f(\mathbf{x}^{(0)}) = \mathbf{M}$ и можем да положим $\mathbf{x}_{\max} = \mathbf{x}^{(0)}$. Аналогично се доказва съществуването на $\mathbf{x}_{\min} \in K$ с указаното свойство. ■

Определение 13.15. Казва се, че функцията $f(\mathbf{x}): E \to \mathsf{R}$, $E \subset \mathsf{R}^n$, е равномерно непрекъсната, когато за всяко $\varepsilon > 0$ може да се намери δ такова, че $|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})| < \varepsilon$, винаги когато $\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) < \delta$, $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E$.

Ако една функция $f(\mathbf{x})$ е равномерно непрекъсната в множеството E, то тя е и непрекъсната във всяка точка от $\mathbf{x}^{(0)} \in E$ ($f(\mathbf{x})$ е непрекъсната в E), понеже за всяко $\varepsilon > 0$ може да се намери δ такова, че $\left|f(\mathbf{x}) - f\left(\mathbf{x}^{(0)}\right)\right| < \varepsilon$, когато $\rho\left(\mathbf{x}, \mathbf{x}^{(0)}\right) < \delta$. Равномерната непрекъснатост означава, че това δ може да се избере едно също за всяко $\mathbf{x}^{(0)} \in E$, докато обикновената непрекъснатост допуска δ да зависи от $\mathbf{x}^{(0)}$.

Една функция може да бъде непрекъсната, но да не бъде равномерно непрекъсната, например функцията на една променлива $f(x): (0,1] \to \mathsf{R}$ е непрекъсната в дефиниционното си множество $(0,1]$ но не е равномерно непрекъсната. Ако обаче дефиниционната област на една непрекъсната функция е компактно множество, то тя е и равномерно непрекъсната.

Теорема 13.6. Нека функцията $f(\mathbf{x})$ е определена и непрекъсната над компактното множество $K \subset \mathsf{R}^n$. Тогава $f(\mathbf{x})$ е равномерно непрекъсната. ■

Нека $f(\mathbf{x})$ е определена в областта $E \subset \mathsf{R}^n$ и нека $\mathbf{x}^{(1)}$ и $\mathbf{x}^{(2)}$ са две точки от E. По определение E е отворено и линейно свързано множество, следователно точките $\mathbf{x}^{(1)}$ и $\mathbf{x}^{(2)}$ могат да бъдат съединени с непрекъсната (начупена) линия $\gamma : \mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$, $\alpha \le t \le \beta$, $\mathbf{x}(\alpha) = \mathbf{x}^{(1)}$, $\mathbf{x}(\beta) = \mathbf{x}^{(2)}$. Да положим $f\left(\mathbf{x}^{(1)}\right) = a$ и $f\left(\mathbf{x}^{(2)}\right) = b$, при което за определеност да предположим, че $a \le b$. Тогава функцията $\varphi(t) = f(\mathbf{x}(t))$ е определена и непрекъсната в интервала $[\alpha, \beta]$ и съгласно теоремата за междинните стойности за непрекъсната функция на една променлива, за всяко c между a и b съществува някакво $\theta \in [\alpha, \beta]$, за което $\varphi(\theta) = c$, което означава, че съществува точка $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\theta) \in \gamma$, за която $f(\mathbf{x}) = c$. Последното твърдение е обобщение на познатата ***теорема за междинните стойности*** на функция на една променлива.

3. Частни производни и диференцируемост. Нека функцията $f(\mathbf{x})$ е определена в някаква околност на точката $\mathbf{x}^{(0)}\left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}\right)$. Да разгледаме функцията на една променлива $\varphi(x_1) = f\left(x_1, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}\right)$. Ако функцията $\varphi(x_1)$ е диференцируема в точката $x_1 = x_1^{(0)}$, то нейната производна $\varphi'\left(x_1^{(0)}\right)$ се нарича ***частна производна*** на $f(\mathbf{x})$ относно променливата x_1 в точката $\mathbf{x}^{(0)}$ и се бележи с

$$\frac{\partial f\left(\mathbf{x}^{(0)}\right)}{\partial x_1} = \lim_{\Delta x_1 \to 0} \frac{f\left(x_1^{(0)} + \Delta x_1, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}\right) - f\left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}\right)}{\Delta x_1}.$$

Аналогично се определят и останалите частни производни,

$$\frac{\partial f\left(\mathbf{x}^{(0)}\right)}{\partial x_k}, \ k = 2, \dots, n.$$

За частните производни се употребяват следните означения

$$\frac{\partial f\left(\mathbf{x}^{(0)}\right)}{\partial x_k} = f_{x_k}(\mathbf{x}) = D_k f(\mathbf{x}) = f'_{x_k}(\mathbf{x}) = \frac{\partial}{\partial x_k} f(\mathbf{x}).$$

При функция на две променливи $f(x, y)$ имаме две частни производни

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \text{ и } \frac{\partial f(x, y)}{\partial y},$$

а за функция на три променливи $f(x,y,z)$,

$$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x},\ \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y} \text{ и } \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z}.$$

От определението следва, че когато търсим частната производна на елементарна функция по дадена променлива, останалите променливи се интерпретират като константи.

Пример 13.1. За функцията $f(x,y,z)=xy^2+\sin(x^2-y^3)+2xyz+1$ намираме

$$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x}=y^2+2x\cos(x^2-y^3)+2yz,$$

$$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y}=2xy-3y^2\cos(x^2-y^3)+2xz,$$

$$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z}=2xy.$$

Определение 13.16. Нека функцията $f(\mathbf{x})$ е определена в околност на $\mathbf{x}^{(0)}$. Казва се, че $f(\mathbf{x})$ е диференцируема в $\mathbf{x}^{(0)}$, когато в тази околност

(13.4) $f(\mathbf{x})-f(\mathbf{x}^{(0)})=A_1(x_1-x_1^{(0)})+A_2(x_2-x_2^{(0)})+\dots+A_n(x_n-x_n^{(0)})+o(\rho(\mathbf{x},\mathbf{x}^{(0)}))$,

за някакви константи A_1, A_2, ..., A_n.

Тук $\rho(\mathbf{x},\mathbf{x}^{(0)})=|\mathbf{x}-\mathbf{x}^{(0)}|$ е евклидовото разстояние между $\mathbf{x}$ и $\mathbf{x}^{(0)}$,

$$\rho(\mathbf{x},\mathbf{x}^{(0)})=\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(x_k-x_k^{(0)})^2}.$$

С помощта на символа $o(q)$ означаваме величина, за която $\lim\limits_{q\to 0}\frac{o(q)}{q}=0$. В тези означения е полезен записът $o(|\mathbf{x}-\mathbf{x}^{(0)}|)=|\mathbf{x}-\mathbf{x}^{(0)}|\varepsilon(|\mathbf{x}-\mathbf{x}^{(0)}|)$, където $\varepsilon(q)$ е величина, за която $\lim\limits_{q\to 0}\varepsilon(q)=0$. Ако използваме записа $\mathbf{x}=\mathbf{x}^{(0)}+\Delta\mathbf{x}$, където $\Delta\mathbf{x}=(\Delta x_1,\Delta x_2,\dots,\Delta x_n)$, и $\Delta f(\mathbf{x}^{(0)})=f(\mathbf{x}^{(0)}+\Delta\mathbf{x})-f(\mathbf{x}^{(0)})$, то (13.4) приема вида

(13.5) $\Delta f(\mathbf{x}^{(0)})=A_1\Delta x_1+A_2\Delta x_2+\dots+A_n\Delta x_n+|\Delta\mathbf{x}|\varepsilon(|\Delta\mathbf{x}|)$.

Диференцируемостта една функция в дадена точка е локално свойство. Формулите (13.4) и (13.5) означават, че ако $f(\mathbf{x})$ е диференцируема в точката $\mathbf{x}^{(0)}$, то нейното локално поведение в околност на $\mathbf{x}^{(0)}$ е линейно, като на линейната функция

$$l(\mathbf{x})=f(\mathbf{x}^{(0)})+A_1(x_1-x_1^{(0)})+A_2(x_2-x_2^{(0)})+\dots+A_n(x_n-x_n^{0}).$$

Изразът

(13.6) $df(\mathbf{x}^{(0)})=A_1dx_1+A_2dx_2+\dots+A_ndx_n$

се нарича ***пълен диференциал*** на функцията $f(\mathbf{x})$ в $\mathbf{x}^{(0)}$.

Твърдение 13.10. Нека функцията $f(\mathbf{x})$ е определена в околност на точката $\mathbf{x}^{(0)}$ и диференцируема в $\mathbf{x}^{(0)}$. Тогава частните производни на $f(\mathbf{x})$ в $\mathbf{x}^{(0)}$ съществуват, при което $A_k=\frac{\partial f(\mathbf{x}^{(0)})}{\partial x_k}$, $k=1,2,\dots,n$, следователно

$$\Delta f(\mathbf{x}^{(0)})=\frac{\partial f(\mathbf{x}^{(0)})}{\partial x_1}\Delta x_1+\frac{\partial f(\mathbf{x}^{(0)})}{\partial x_2}\Delta x_2+\dots+\frac{\partial f(\mathbf{x}^{(0)})}{\partial x_n}\Delta x_n+|\Delta\mathbf{x}|\varepsilon(|\Delta\mathbf{x}|),$$

а формулата за пълния диференциал (13.3) приема вида

$$df\left(\mathbf{x}^{(0)}\right)=\frac{\partial f\left(\mathbf{x}^{(0)}\right)}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial f\left(\mathbf{x}^{(0)}\right)}{\partial x_2}dx_2+\cdots+\frac{\partial f\left(\mathbf{x}^{(0)}\right)}{\partial x_2}dx_n .$$

Доказателство. Ще докажем, че $A_1=\frac{\partial f\left(\mathbf{x}^{(0)}\right)}{\partial x_1}$. Останалите равенства се доказват аналогично. Нека дадем нарастване само по x_1, $\Delta\mathbf{x}=\left(\Delta x_1,0,\ldots,0\right)$. Тогава от (13.2) получаваме

$$f\left(x_1^{(0)}+\Delta x_1,x_2^{(0)},\ldots,x_n^{(0)}\right)-f\left(x_1^{(0)},x_2^{(0)},\ldots,x_n^{(0)}\right)=A_1\Delta x_1+\left|\Delta x_1\right|\varepsilon\left(\Delta x_1\right),$$

следователно

$$\frac{f\left(x_1^{(0)}+\Delta x_1,x_2^{(0)},\ldots,x_n^{(0)}\right)-f\left(x_1^{(0)},x_2^{(0)},\ldots,x_n^{(0)}\right)}{\Delta x_1}=A_1+\varepsilon\left(\left|\Delta x_1\right|\right),$$

$$\lim_{\Delta x_1\to 0}\frac{f\left(x_1^{(0)}+\Delta x_1,x_2^{(0)},\ldots,x_n^{(0)}\right)-f\left(x_1^{(0)},x_2^{(0)},\ldots,x_n^{(0)}\right)}{\Delta x_1}=A_1 .$$

Последното по определение означава, че $A_1=\frac{\partial f\left(\mathbf{x}^{(0)}\right)}{\partial x_1}$. ■

Според твърдение 13.10, ако функцията е диференцируема, то тя притежава частни производни. За да бъде вярно обратното твърдение, е необходимо да бъдат налице допълнителни условия.

Теорема 13.7. Нека функцията $f\left(\mathbf{x}\right)$ е определена в околност на точката $\mathbf{x}^{(0)}$ и нека в тази околност всичките частни производни $\frac{\partial f\left(\mathbf{x}^{(0)}\right)}{\partial x_k}$, $k=1,2,\ldots,n$, съществуват и са непрекъснати в $\mathbf{x}^{(0)}$. Тогава $f\left(\mathbf{x}\right)$ е диференцируема в $\mathbf{x}^{(0)}$. ■

Да отбележим, че при функция на една променлива, диференцируемостта и съществуването на производна като граница на диференчното частно са еквивалентни условия без изискване за непрекъснатост на производната.

Теорема 13.7 оправдава следното определение. Функцията $f\left(\mathbf{x}\right)$ се нарича ***непрекъснато диференцируема в областта*** D (отворено и линейно свързано множество), когато всичките частни производни на $f\left(\mathbf{x}\right)$ съществуват и са непрекъснати в D. Ако $f\left(\mathbf{x}\right)$ е непрекъснато диференцируема в D, то тя е диференцируема във всяка точка на D. Освен това, ще казваме, че функцията $f\left(\mathbf{x}\right)$ е ***непрекъснато диференцируема в множеството*** M, когато съществува област D, съдържаща M, $M\subset D$, такава, че $f\left(\mathbf{x}\right)$ е непрекъснато диференцируема в D. Например $f\left(\mathbf{x}\right)$ е ***непрекъснато диференцируема в точката*** $\mathbf{x}^{(0)}$, когато е непрекъснато диференцируема в някаква околност на $\mathbf{x}^{(0)}$.

Непосредствено от определението се вижда верността на

Твърдение 13.11. Нека функцията $f\left(\mathbf{x}\right)$ е диференцируема в точката $\mathbf{x}^{(0)}$. Тогава $f\left(\mathbf{x}\right)$ е непрекъсната в $\mathbf{x}^{(0)}$. ■

За функция на много променливи можем да прилагаме формулата за крайните нараствания по всяка от променливите, когато са налице съответните условия. Например

$$f\left(x_2,y\right)-f\left(x_1,y\right)=\frac{\partial f\left(\xi,y\right)}{\partial x}\left(x_2-x_1\right),$$

където ξ е число между x_1 и x_2. Да разгледаме функцията на две променливи $f(x,y)$, която е непрекъснато диференцируема в точката (x_0,y_0), и нека променливите x и y са функции на променливата t, при което $x(t)$ и $y(t)$ са диференцируеми в точката t_0 и $x_0=x(t_0)$, $y_0=y(t_0)$. Да намерим производната на съставната функция $\Phi(t)=f(x(t),y(t))$ в точката t_0. Имаме

$$\Delta\Phi=\Phi(t_0+\Delta t)-\Phi(t_0)=f(x(t_0+\Delta t),y(t_0+\Delta t))-f(x(t_0),y(t_0))=$$
$$=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)$$

където $\Delta x=x(t_0+\Delta t)-x(t_0)$ и $\Delta y=y(t_0+\Delta t)-y(t_0)$. Преобразуваме последното във вида

$$\Delta\Phi=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0+\Delta y)+f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0),$$

откъдето чрез формулата за крайните нараствания получаваме

$$\Delta\Phi=\frac{\partial f(\xi,y_0+\Delta y)}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial f(x_0,\eta)}{\partial y}\Delta y, \tag{13.7}$$

където ξ е число между x_0 и $x_0+\Delta x$, а η е число между y_0 и $y_0+\Delta y$. Производната на $\Phi(t)$ в t_0 се определя като границата на диференчното частно $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta\Phi}{\Delta t}$, когато тази граница съществува. Сега от (13.7) намираме

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\left[\frac{\partial f(\xi,y_0+\Delta y)}{\partial x}\frac{\Delta x}{\Delta t}+\frac{\partial f(x_0,\eta)}{\partial y}\frac{\Delta y}{\Delta t}\right]=\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}x'(t_0)+\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}y'(t_0),$$

понеже при граничния преход

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t}=x'(t_0),\ \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta t}=y'(t_0),\ \lim_{\Delta t\to 0}\xi=x_0,\ \lim_{\Delta t\to 0}\eta=y_0,\ \lim_{\Delta t\to 0}\Delta x=\lim_{\Delta t\to 0}\Delta y=0,$$

а частните производни $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ се предполагат непрекъснати. По този начин получихме правилото за диференциране на съставни функции

$$\Phi'(t)=f'_x(x(t),y(t))x'(t)+f'_y(x(t),y(t))y'(t),$$

което можем да запишем като

$$\frac{df}{dt}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}.$$

За функция на три променливи $f(x,y,z)$ аналогично се доказва, че

$$\frac{df}{dt}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dt} \text{ и т.н.} \tag{13.8}$$

Да предположим сега, че променливите x, y и z от своя страна са функции на двете променливи u и v, $x=x(u,v)$, $y=y(u,v)$ и $z=z(u,v)$. Понеже частната производна е обикновена производна относно дадена променлива, от (13.8) следва

$$\frac{\partial f}{\partial u}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u} \text{ и } \frac{\partial f}{\partial v}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial v},$$

което се обобщава по очевиден начин за повече променливи. По този начин доказахме

Теорема 13.8. Нека функцията $f(\mathbf{y})$, $\mathbf{y}=(y_1,y_2,\ldots,y_m)$, е непрекъснато диференцируема в точката $\mathbf{y}^{(0)}=\left(y_1^{(0)},y_2^{(0)},\ldots,y_m^{(0)}\right)$ и освен това $y_k=y_k(\mathbf{x})$, $k=1,2,\ldots,m$, където функциите $y_k(\mathbf{x})$, $\mathbf{x}=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, са непрекъснато диференцируеми в точката

$\mathbf{x}^{(0)}=\left(x_1^{(0)},x_2^{(0)},\dots,x_n^{(0)}\right)$ и $y_k\left(\mathbf{x}^{(0)}\right)=y_k^{(0)}$, $k=1,2,\dots,m$. Тогава съставната функция $\Phi(\mathbf{x})=f\left(y_1(\mathbf{x}),y_2(\mathbf{x}),\dots,y_m(\mathbf{x})\right)$ е непрекъснато диференцируема в точката $\mathbf{x}^{(0)}$, при което

(13.9) $$\frac{\partial\Phi\left(\mathbf{x}^{(0)}\right)}{\partial x_k}=\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial\Phi\left(\mathbf{y}^{(0)}\right)}{\partial y_j}\frac{\partial y_j\left(\mathbf{x}^{(0)}\right)}{\partial x_k},\ k=1,2,\dots,n.\ ■$$

Формулата (13.9) се записва накратко

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}=\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial f}{\partial y_j}\frac{\partial y_j}{\partial x_k},\ k=1,2,\dots,n.$$

Да разгледаме диференциала на функцията $f(x,y)$, където $x=x(u,v)$, $y=y(u,v)$, разглеждана като функция на независимите променливи u и v

$$df=\frac{\partial f}{\partial u}du+\frac{\partial f}{\partial v}dv=\left[\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}\right]du+\left[\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}\right]dv,$$

откъдето след прегрупиране на събираемите намираме

$$df=\frac{\partial f}{\partial x}\left[\frac{\partial x}{\partial u}du+\frac{\partial x}{\partial v}dv\right]+\frac{\partial f}{\partial y}\left[\frac{\partial y}{\partial u}du+\frac{\partial y}{\partial v}dv\right],$$

което дава очакваната формула

$$df=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy,$$

понеже по определение

$$dx=\frac{\partial x}{\partial u}du+\frac{\partial y}{\partial v}dv,\ dy=\frac{\partial y}{\partial u}du+\frac{\partial y}{\partial v}dv.$$

Този извод показва свойството ***инвариантност на диференциала***, което означава, че стойността на диференциала в дадена точка не се променя при смяна на променливите.

Пълният диференциал притежава следните свойства

$$d(u+v)=du+dv,\ d(uv)=vdu+udv,\ d\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{vdu-udv}{v^2},$$

които се проверяват лесно от определенията.

Пример 13.2. Да намерим диференциала на функцията $\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$. Полагаме $u=\frac{y}{x}$ и пресмятаме

$$d\left(\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\right)=d(\operatorname{arctg}u)=\frac{du}{1+u^2}=\frac{d\frac{y}{x}}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}=\frac{x^2}{x^2+y^2}\frac{xdy-ydx}{x^2}=\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}.$$

Градиент $\nabla f(\mathbf{x})$ на функцията $f(\mathbf{x})$ се нарича векторът от нейните частни производни

$$\nabla f(\mathbf{x})=\left(\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_1},\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_2},\dots,\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_n}\right).$$

Нека $f(\mathbf{x})$ е непрекъснато диференцируема по отсечката I с краища точките $\mathbf{x}^{(1)}$ и $\mathbf{x}^{(2)}$, които предполагаме различни. Тази отсечка има следното параметрично представяне $I:\mathbf{x}=\mathbf{x}^{(1)}+t\left(\mathbf{x}^{(2)}-\mathbf{x}^{(1)}\right)$, $t\in[0,1]$. Да разгледаме функцията на една променлива $\varphi(t)=f\left(\mathbf{x}^{(1)}+t\left(\mathbf{x}^{(2)}-\mathbf{x}^{(1)}\right)\right)$. Имаме

$$\varphi(t)=f\left(x_1^{(1)}+t\left(x_1^{(2)}-x_1^{(1)}\right),x_2^{(1)}+t\left(x_2^{(2)}-x_2^{(1)}\right),\dots,x_n^{(1)}+t\left(x_n^{(2)}-x_n^{(1)}\right)\right).$$

По определение $\varphi(0)=f\left(\mathbf{x}^{(1)}\right)$ и $\varphi(1)=f\left(\mathbf{x}^{(2)}\right)$. От формулата за крайните нараствания следва, че $\varphi(1)-\varphi(0)=\varphi'(\xi)$, за някое $\xi\in(0,1)$. Сега от правилото за диференциране на съставна функция се получава, че

$$f\left(\mathbf{x}^{(2)}\right)-f\left(\mathbf{x}^{(1)}\right)=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial f\left(\mathbf{x}^{(1)}+\xi\left(\mathbf{x}^{(2)}-\mathbf{x}^{(1)}\right)\right)}{\partial x_k}\left(x_k^{(2)}-x_k^{(1)}\right).$$

На езика на скаларното произведение, последната формула може да се запише

$$f\left(\mathbf{x}^{(2)}\right)-f\left(\mathbf{x}^{(1)}\right)=\left\langle\nabla f\left(\mathbf{x}^{(1)}+\xi\left(\mathbf{x}^{(2)}-\mathbf{x}^{(1)}\right)\right),\mathbf{x}^{(2)}-\mathbf{x}^{(1)}\right\rangle.$$

Точката $\mathbf{x}^{(0)}=\mathbf{x}^{(1)}+\xi\left(\mathbf{x}^{(2)}-\mathbf{x}^{(1)}\right)$ лежи вътре в отсечката I. По този начин доказахме

Теорема 13.9 ***(за крайните нараствания).*** Нека $f(\mathbf{x})$ е непрекъснато диференцируема по отсечката I с краища $\mathbf{x}^{(1)}$ и $\mathbf{x}^{(2)}$ ($\mathbf{x}^{(1)}\neq\mathbf{x}^{(2)}$). Тогава

$$f\left(\mathbf{x}^{(2)}\right)-f\left(\mathbf{x}^{(1)}\right)=\left\langle\nabla f\left(\mathbf{x}^{(0)}\right),\mathbf{x}^{(2)}-\mathbf{x}^{(1)}\right\rangle,$$

за някоя точка $\mathbf{x}^{(0)}$ от отсечката I. ■

Нека $\mathbf{n}=(l_1,l_2,\ldots,l_n)$ е даден единичен вектор и функцията $f(\mathbf{x})$ е непрекъснато диференцируема в точката $\mathbf{x}^{(0)}$. Да положим $\varphi(t)=f\left(\mathbf{x}^{(0)}+t\mathbf{n}\right)$. Тогава производната $\varphi'(0)$ се нарича ***производна*** на функцията $f(\mathbf{x})$ ***по направление*** $\mathbf{n}$ в точката $\mathbf{x}^{(0)}$ и се бележи с $\dfrac{\partial f\left(\mathbf{x}^{(0)}\right)}{\partial\mathbf{n}}$. Имаме

$$\varphi(t)=f\left(x_1^{(0)}+tl_1,x_2^{(0)}+tl_2,\ldots,x_n^{(0)}+tl_n\right),$$

следователно, съгласно правилото за диференциране на съставни функции

$$\frac{\partial f\left(\mathbf{x}^{(0)}\right)}{\partial\mathbf{n}}=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial f\left(\mathbf{x}^{(0)}\right)}{\partial x_k}l_k=\left\langle\nabla f\left(\mathbf{x}^{(0)}\right),\mathbf{n}\right\rangle. \tag{13.10}$$

Частните производни могат да се разглеждат като частни случаи на производни по направление. Производната по направление $\mathbf{n}=(1,0,\ldots,0)$ съвпада с частната производна $\dfrac{\partial f\left(\mathbf{x}^{(0)}\right)}{\partial x_1}$, производната по направление $\mathbf{n}=(0,1,\ldots,0)$ съвпада с частната производна $\dfrac{\partial f\left(\mathbf{x}^{(0)}\right)}{\partial x_2}$ и т.н.

При функция на три променливи $f(x,y,z)$, векторът $\mathbf{n}$ се задава чрез своите направляващи косинуси, $\mathbf{n}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$, и формулата (13.10) приема вида

$$\frac{\partial f(x_0,y_0,z_0)}{\partial\mathbf{n}}=\frac{\partial f(x_0,y_0,z_0)}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f(x_0,y_0,z_0)}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial f(x_0,y_0,z_0)}{\partial z}\cos\gamma. \tag{13.11}$$

Чрез оператора ∇ (***набла***), определен в тримерното пространство, както следва

$$\nabla=\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x}+\mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y}+\mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z},$$

градиентът на $f(x,y,z)$ може да се разглежда като вектор, получен след прилагането на ∇ върху функцията $f(x,y,z)$,

$$\nabla f(x,y,z)=\left(\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x}+\mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y}+\mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)f(x,y,z)=\mathbf{i}\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x}+\mathbf{j}\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y}+\mathbf{k}\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z}.$$

Формалното скаларно произведение на $\mathbf{n}$ и ∇ има вида

$$\langle\mathbf{n},\nabla\rangle=\cos\alpha\frac{\partial}{\partial x}+\cos\beta\frac{\partial}{\partial y}+\cos\gamma\frac{\partial}{\partial z}$$

и по този начин производната (13.11) се записва

$$\frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial \mathbf{n}} = \langle \mathbf{n}, \nabla \rangle f(x_0, y_0, z_0).$$

Производната по направление показва поведението на функцията в това направление от тип нарастване/намаляване по добре известния начин.

Частните производни от втори и по висок ред се определят последователно чрез производните от по-нисък ред

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_j}\right) = \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_i \partial x_j}.$$

За функция на две променливи имаме следните четири производни от втори ред

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial x} = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}, \ \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y}, \ \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x}, \ \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}.$$

Оказва се, че при достатъчно общи предположения ***смесените производни са равни***

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x}.$$

Такова равенство е налице например, ако и двете смесени производни са непрекъснати. Ние винаги ще предполагаме равенство на смесените производни, което се отнася и за частните производни от ред трети и по-висок, когато се налага да боравим с тях. Например

$$\frac{\partial^3 f(x,y)}{\partial x \partial x \partial y} = \frac{\partial^3 f(x,y)}{\partial x \partial y \partial x} = \frac{\partial^3 f(x,y)}{\partial y \partial x \partial x} \text{ и т.н.}$$

Това предположение оправдава означението

$$\frac{\partial^m f(x,y)}{\partial x^j \partial y^{m-j}},$$

което означава, че частната производна е от ред m, по променливата x е диференцирано j пъти, а по променливата y е диференцирано $m-j$ пъти, при което последователността, по която се извършва това диференциране е без значение.

Без да привеждаме съображения за целесъобразност, определяме пълен диференциал от втори ред за функцията $f(\mathbf{x})$,

$$d^2 f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j,$$

а пълният диференциал от трети ред е

$$d^3 f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^3 f(\mathbf{x})}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} dx_i dx_j dx_k \text{ и т.н.}$$

4. Формула на Тейлър. Да разгледаме отначало функцията на две променливи $f(x,y)$, за която ще предполагаме, че е $m+1$ пъти непрекъснато диференцируема в околност на точката $M_0(x_0, y_0)$. Нека $M = M(x,y)$ е точката с текущи координати. Да положим $\varphi(t) = f(x_0 + t(x - x_0), y_0 + t(y - y_0))$. За функцията на една променлива $\varphi(t)$ ще приложим познатата формула на Тейлър с остатъчен член във формата на Лагранж, в околност на $t_0 = 0$. Съгласно тази формула

$$(13.12)\ \varphi(1) = \varphi(0) + \varphi'(0) + \frac{\varphi''(0)}{2} + \frac{\varphi'''(0)}{6} + \cdots + \frac{\varphi^{(m)}(0)}{m!} + \frac{\varphi^{(m+1)}(\xi)}{(m+1)!},$$

където $\xi \in (0,1)$. Формулата за развитие на функцията $f(x,y)$ по Тейлър в околност на точката $M_0(x_0, y_0)$ се получава от (13.12) след привеждане на събираемите в подходящ вид. Очевидно

$$\varphi(0) = f(x_0, y_0) = f(M_0) \text{ и } \varphi(1) = f(x,y) = f(M).$$

За да пресметнем $\varphi'(0)$ трябва първо на намерим $\varphi'(t)$. От правилото за диференциране на съставни функции имаме

$$\text{(13.13)}\quad \varphi'(t) = \frac{\partial f(x_0 + t(x - x_0), y_0 + t(y - y_0))}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial f(x_0 + t(x - x_0), y_0 + t(y - y_0))}{\partial y}(y - y_0),$$

следователно

$$\varphi'(0) = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}(y - y_0) = f'_x(M_0)\Delta x + f'_y(M_0)\Delta y,$$

където $\Delta x = x - x_0$ и $\Delta y = y - x_0$. За да намерим $\varphi''(t)$ диференцираме (13.13) въз основа на правилото за диференциране на съставни функции, след което по същия начин получаваме

$$\varphi''(0) = \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2}(x - x_0)^2 + 2\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x \partial y}(x - x_0)(y - y_0) + \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y^2}(y - y_0)^2 =$$

$$= f''_{xx}(M_0)\Delta x^2 + 2 f''_{xy}(M_0)\Delta x \Delta y + f''_{xx}(M_0)\Delta y^2$$

Разсъждавайки аналогично, за $\varphi^{(k)}(0)$, $k = 1,2,\ldots,m$, получаваме

$$\varphi^{(k)}(0) = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \frac{\partial^k f(M_0)}{\partial x^j \partial y^{m-j}} \Delta x^j \Delta y^{k-j}, \quad \varphi^{(m+1)}(\xi) = \sum_{j=0}^{m+1} \binom{m+1}{j} \frac{\partial^{m+1} f(M_1)}{\partial x^j \partial y^{m+1-j}} \Delta x^j \Delta y^{m+1-j},$$

където M_1 е точка от отсечката с краища M_0 и M (формулата е вярна и за $k = 0$).

От тези изрази получаваме формулата на Тейлър,

$$\text{(13.14)}\quad \begin{aligned} f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) &= \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \frac{\partial^k f(M_0)}{\partial x^j \partial y^{k-j}} \Delta x^j \Delta y^{k-j} + \\ &+ \frac{1}{(m+1)!} \sum_{j=0}^{m+1} \binom{m+1}{j} \frac{\partial^{m+1} f(M_1)}{\partial x^j \partial y^{m+1-j}} \Delta x^j \Delta y^{m+1-j} \end{aligned}$$

първите няколко члена на която имат вида

$$\begin{aligned} f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) &= f(M_0) + \left[f'_x(M_0)\Delta x + f'_y(M_0)\Delta y\right] + \\ &+ \frac{1}{2}\left[f''_{xx}(M_0)\Delta x^2 + 2 f''_{xy}(M_0)\Delta x \Delta y + f''_{xx}(M_0)\Delta y^2\right] + \\ &+ \frac{1}{6}\left[f'''_{xxx}(M_0)\Delta x^3 + 3 f'''_{xxy}(M_0)\Delta x^2 \Delta y + 3 f'''_{xyy}(M_0)\Delta x \Delta y^2 + f'''_{yyy}(M_0)\Delta y^3\right] + \cdots \end{aligned}$$

За остатъчния член на формулата имаме

$$R_m = \frac{1}{(m+1)!} \sum_{j=0}^{m+1} \binom{m+1}{j} \frac{\partial^{m+1} f(M_1)}{\partial x^j \partial y^{m+1-j}} \Delta x^j \Delta y^{m+1-j} = o\left(\left|\overline{M_0 M}\right|^m\right),$$

където $\left|\overline{M_0 M}\right| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$ е дължината на отсечката $\overline{M_0 M}$. Използвайки диференциалните оператори $\dfrac{\partial}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial}{\partial y}$, общият член на (13.14) се записва като

$$\frac{1}{k!} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \frac{\partial^k f(M_0)}{\partial x^j \partial y^{k-j}} \Delta x^j \Delta y^{k-j} = \frac{1}{k!}\left(\Delta x \frac{\partial}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial}{\partial y}\right)^k f(M_0), \quad k = 0,1,2,\ldots,m,$$

а самата формула приема вида

$$f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)=\sum_{k=0}^{m}\frac{1}{k!}\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x}+\Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)^k f(M_0)+o\left(\left|\overline{M_0M}\right|^m\right).$$

Разсъждавайки по същия начин, за случая на функция на три променливи $f(x,y,z)$ получаваме

$$f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y, z_0+\Delta z)=\sum_{k=0}^{m}\frac{1}{k!}\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x}+\Delta y\frac{\partial}{\partial y}+\Delta z\frac{\partial}{\partial z}\right)^k f(M_0)+o\left(\left|\overline{M_0M}\right|^m\right),$$

и т.н.

В общия случай на функция $f(\mathbf{x})$, $\mathbf{x}=(x_1,x_2,\dots,x_n)$, от основен интерес представляват събираемите от първи и втори ред. Да въведем матрицата на Хесе ***(хесиан)*** $\mathbf{H}(\mathbf{x})$,

$$\mathbf{H}(\mathbf{x})=\begin{pmatrix} f''_{x_1x_1}(\mathbf{x}) & f''_{x_1x_2}(\mathbf{x}) & \cdots & f''_{x_1x_n}(\mathbf{x}) \\ f''_{x_2x_1}(\mathbf{x}) & f''_{x_2x_2}(\mathbf{x}) & \cdots & f''_{x_2x_n}(\mathbf{x}) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f''_{x_nx_1}(\mathbf{x}) & f''_{x_nx_1}(\mathbf{x}) & \cdots & f''_{x_nx_n}(\mathbf{x}) \end{pmatrix},$$

която е симетрична $(n\times n)$ матрица, поради равенството на смесените производни. Тогава чрез скаларно произведение и матрично умножение формулата на Тейлър с точност до събираеми от втори ред може да се запише

(13.15) $f(\mathbf{x}+\Delta\mathbf{x})=f(\mathbf{x})+\langle\nabla f(\mathbf{x}),\Delta\mathbf{x}\rangle+\dfrac{1}{2}\langle\mathbf{H}(\mathbf{x})\Delta\mathbf{x},\Delta\mathbf{x}\rangle+o\left(|\Delta\mathbf{x}|^2\right).$

Тук $\mathbf{H}(\mathbf{x})\Delta\mathbf{x}$ е векторът, който се получава като умножим матрицата $\mathbf{H}(\mathbf{x})$ с вектор стълба на нарастванията $\Delta\mathbf{x}$. В този вид формулата на Тейлър е особено полезна при изследване локалното поведение на функцията $f(\mathbf{x})$.

Геометрична тълкуване на производните. Такова тълкуване е възможно за функция на две променливи $z=f(x,y)$, понеже свойствата на функцията се показват върху нейната графика Γ в тримерното пространство. Нека функцията $z=f(x,y)$ е непрекъснато диференцируема, в околност на точката $M_0(x_0,y_0)$. Тогава от формулата на Тейлър следва представянето

$$f(x,y)=f(M_0)+\left[f'_x(M_0)(x-x_0)+f'_y(M_0)(y-y_0)\right]+o\left(\left|\overline{M_0M}\right|\right).$$

Събираемите от нулев и първи ред формират ***допирателната равнина*** π към графиката на функцията за точката M_0

(13.16) $\pi: z=f(M_0)+f'_x(M_0)(x-x_0)+f'_y(M_0)(y-y_0).$

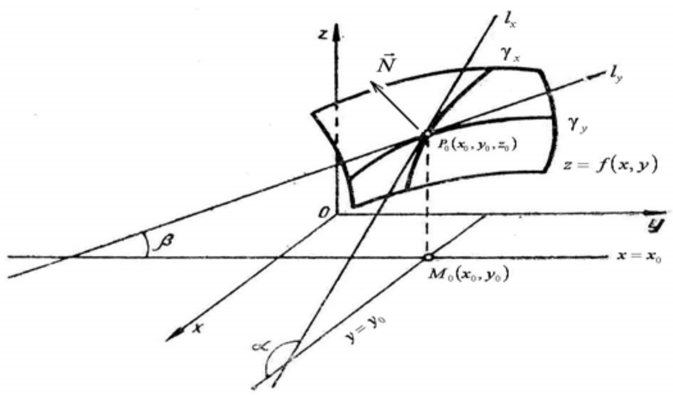

Рис. 13.5.

Нека γ_x (Рис. 13.5) е пространствената линия, която се получава от пресичането на равнината $y = y_0$ с графиката Γ и аналогично, γ_y е сечението на Γ с равнината $x = x_0$. Линиите γ_x и γ_y се пресичат върху Γ в точката $P_0(x_0, y_0, z_0)$, където $z_0 = f(x_0, y_0)$. Нека правата l_x лежи в равнината $y = y_0$ и е допирателна към γ_x, при която α е ъгълът, който сключва l_x с правата $y = y_0$ от координатната равнина Oxy. Тогава в равнината $y = y_0$ уравнението на правата l_x е $l_x : z = z_0 + f'_x(x_0, y_0)(x - x_0)$ и според известното тълкуване на производната имаме $\operatorname{tg}\alpha = f'_x(x_0, y_0)$. Разсъждавайки аналогично за правата l_y (Рис. 13.5) получаваме, че в равнината $x = x_0$ уравнението тази права е $l_y : z = z_0 + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0)$ и $\operatorname{tg}\beta = f'_y(x_0, y_0)$, което представлява геометричното тълкуване на стойностите на частните производни. Правите l_x и l_y лежат в допирателната равнина π. От уравнението (13.16) следва, че π има нормален вектор $\vec{N}(-f'_x(M_0), -f'_y(M_0), 1)$ с положителен направляващ косинус относно базисния вектор $\mathbf{k}$. Този вектор се нарича ***нормален вектор към повърхнината*** $z = f(x, y)$ за точката $M_0(x_0, y_0)$.

5. Неявни функции. Основната идея на диференциалното смятане е моделиране локалното поведение на сложно структурирани нелинейни функции с помощта на линейни такива. Тази идея се откроява най-добре при работа с неявни функции и обратни изображения.

Да разгледаме отначало уравнението $f(x, y) = 0$, което се удовлетворява $(f(x_0, y_0) = 0)$ в дадена (начална) точка $M_0(x_0, y_0)$ от областта G. За функцията $f(x, y)$ ще предполагаме, че е непрекъснато диференцируема в областта G. В типичния случай, когато $|f'_x(x_0, y_0)| + |f'_y(x_0, y_0)| > 0$ (поне една от двете частни производни не се анулира в M_0), множеството от точки в равнината, което удовлетворява това уравнение представлява крива γ, съдържаща M_0. В много случаи е невъзможно уравнението да се реши в елементарни функции относно y (или относно x) въпреки, че в околност на x_0 кривата γ във всяко отношение наподобява графика на някаква функция $y = \varphi(x)$ (Рис. 13.6).

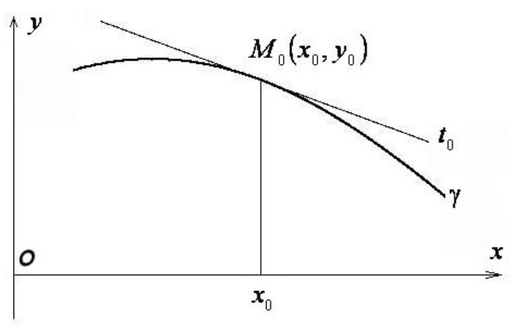

Рис. 13.6.

Кривата γ има допирателна t_0 в точката M_0, чието уравнение се получава по следния начин. Пресмятайки пълния диференциал на лявата и дясната страна на равенството $f(x, y) = 0$ в точката M_0 получаваме $f'_x(x_0, y_0)dx + f'_y(x_0, y_0)dx = 0$. Сега като заместим $dx = \Delta x = x - x_0$ и $dy = \Delta y = y - y_0$, за допирателната намираме

$$t_0 : f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_x(x_0, y_0)(y - y_0) = 0 .$$

В частност векторът $\vec{N}\left(f'_x(x_0, y_0), f'_y(x_0, y_0)\right)$ е нормален към допирателната. Този вектор се нарича ***нормален вектор към кривата*** γ в точката M_0.

Средствата на диференциалното смятане позволяват при определени условия да разглеждаме променливата y като функция на x, $y = y(x)$, в някаква околност на x_0 (или x като функция на y в някаква околност на y_0). В този случай говорим за неявни функции. Идеята за неявна функция се състои в следното. Избираме една начална точка $M_0(x_0, y_0)$, която удовлетворява уравнението, $f(x_0, y_0) = 0$. Ако такава точка не може да се намери, то уравнението е безпредметно. След това се интересуваме от възможността променливата y да се изрази като неявна функция на променливата x, $y = y(x)$, в някаква (достатъчно малка) околност $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, $\delta > 0$, т.е. да бъде изпълнено $f(x, y(x)) = 0$, за всяко $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, при което да е налице и началното условие $y(x_0) = y_0$. Оказва се, че така формулираната задача за неявна функция има решение при условията на следната теорема.

Теорема 13.10. Нека функцията $f(x, y)$ е непрекъснато диференцируема в някаква околност на точката $M_0(x_0, y_0)$, при което $f(x_0, y_0) = 0$ и $f'_x(x_0, y_0) \neq 0$. Тогава променливата y може да се изрази като неявна функция на x в достатъчно малка околност на x_0. Освен това тази функция е диференцируема в околност на x_0, при което $y'(x_0) = -\dfrac{f'_x(x_0, y_0)}{f'_y(x_0, y_0)}$. ■

Горната теорема е типичен локален резултат, което означава, че се изследват свойства и характеристики в околност на някаква точка, която околност може да бъде много малка. По тази причина единственото достъпно за въпросната неявна функция са нейните локални свойства, като монотонност и изпъкналост. Всички тези свойства обикновено могат да бъдат открити в развитието на функцията по Тейлър около x_0,

$$(13.17)\ y(x) = y(x_0) + y'(x_0)(x - x_0) + \frac{y''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \frac{y'''(x_0)}{6}(x - x_0)^3 + \frac{y^{(4)}(x_0)}{24}(x - x_0)^4 + \cdots.$$

Макар функцията $y(x)$ да е неявна, коефициентите в горната формула могат да се определят ефективно. За да определим $y'(x_0)$ постъпваме по следния начин. Диференцираме $f(x, y(x)) = 0$, съгласно правилото за диференциране на съставни функции и получаваме $f'_x + f'_y y' = 0$. Сега заместваме $x \to x_0$, $y \to y_0$ и получаваме $f'_x(x_0, y_0) + f'_y(x_0, y_0) y'(x_0) = 0$, откъдето намираме $y'(x_0)$. Тук беше важно, че можем да разделим на $f'_y(x_0, y_0)$, което по условие е различно от нула. Както ще се убедим след малко, същото условие е достатъчно и за получаване на останалите коефициенти в развитието. За да пресметнем $y''(x_0)$, диференцираме по x съотношението $f'_x + f'_y y' = 0$ следвайки правилото за диференциране на съставни функции и помнейки, че $y = y(x)$. Получаваме $\left[f''_{xx} + f''_{yx} y'\right] y + \left[f''_{yx} + f''_{yy} y'\right] y' + f'_y y'' = 0$. Заместваме $x \to x_0$, $y \to y_0$ и $y'(x_0)$, което е вече пресметнато и получаваме

$$\textit{известни величини} + f'_y(x_0, y_0) y''(x_0) = 0,$$

което ни позволява да пресметнем $y''(x_0)$. Този механизъм може да се повтори за определяне на следващите коефициенти. Описаната току що процедура ще покажем върху следния пример.

Пример 13.3. Да разгледаме съотношението

(13.18) $f(x,y)=x^2+y^2-1=0$

и да фиксираме начално значение $x_0=0$. Тогава за начално значение на y остават две възможности $y_0=\pm1$. Избираме $y_0=1$. По този начин избрахме началната точка $M_0(0,1)$. В този илюстративен пример става дума за явната функция $y=\sqrt{1-x^2}$. Накрая на примера ще се върнем към явния вид на $y(x)$ за да съпоставим получения резултат. Първо трябва да се погрижим за условията на теорема 13.10. Функцията $f(x,y)$, както и нейните частни производни са непрекъснати навсякъде, при което $f'_y=2y$ и $f'_y(x_0,y_0)=2\neq0$. Следователно е валидно и заключението на теоремата, според което y може да се изрази като неявна функция на x в някаква околност на $x_0=0$ с изпълнение на началното условие $y(0)=1$.

Нашата следваща цел е да получим първите няколко коефициента в развитието (13.17). По условие $y(0)=1$. Диференцирайки (13.18) по x получаваме $2x+2yy'=0$, което може да опростим

(13.19) $x+yy'=0$.

Заместваме $x\to0$, $y\to1$ и получаваме $0+1.y'(0)=0$, откъдето намираме $y'(0)=0$. Сега диференцираме (13.19) и получаваме

(13.20) $1+y'y'+yy''=0$.

Заместваме $x\to0$, $y\to1$, $y'\to0$ и намираме $y''(0)=-1$. По-нататък за да определим $y'''(0)$, диференцираме (13.20) по x и получаваме

(13.21) $2y'y''+y'y''+yy'''=0$.

Заместваме $x\to0$, $y\to1$, $y'\to0$, $y''\to-1$ и намираме $y'''(0)=0$. Сега диференцирайки (13.21) по x получаваме $3y''y''+3y'y'''+y'y'''+yy^{(4)}=0$. Заместваме $x\to0$, $y\to1$, $y'\to0$, $y''\to-1$, $y'''\to0$ и получаваме $y^{(4)}(0)=-3$.

Събирайки получените дотук резултати можем да напишем следното развитие

(13.22) $y=1-\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{24}x^4+\cdots$.

Информацията с която разполагаме е достатъчна да установим, че $x_0=0$ е точка на строг локален максимум за въпросната неявна функция без да познаваме самата функция, понеже първата производна се анулира, а втората производна е отрицателна.

От друга страна, съгласно формулата за обобщения нютонов бином,

$$y=\sqrt{1-x^2}=\left(1-x^2\right)^{\frac{1}{2}}=1+\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix}\left(-x^2\right)^1+\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\2\end{pmatrix}\left(-x^2\right)^2+\cdots,$$

което е същото като (13.22), понеже за обобщените биномни коефициенти имаме

$$\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\ \text{и}\ \begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\2\end{pmatrix}=\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2}=-\frac{1}{8}.$$

Ако бяхме избрали другото начално условие $y_0=-1$, щяхме да разсъждаваме за явната функция $y=-\sqrt{1-x^2}$.