Лекция 20

§20. Гранични теореми

1. Закон за големите числа. Твърденията в този раздел имат мирогледно значение в теорията на вероятностите. Отначало ще докажем неравенството на Чебишов, което оценява отклонението на дадена случайна величина X от нейното математическо очакване посредством оценка вероятността на събития от вида $|X-\mathbf{E}[X]|\geq\varepsilon$, $\varepsilon>0$.

Теорема 20.1 ***(Неравенство на Чебишов).*** Нека X е случайна величина, $\mathbf{D}[X]>0$. Тогава за всяко $\varepsilon>0$ е изпълнено неравенството

(20.1) $P(|X-\mathbf{E}[X]|\geq\varepsilon)\leq\dfrac{\mathbf{D}[X]}{\varepsilon^2}$.

Доказателство. Нека X е дискретна случайна величина с разпределение $p_k=P(X=x_k)$, $k=1,2,\ldots,n$. Тук имаме вероятностно пространство с елементарни изходи $\omega_k=(X=x_k)$ и $P(\omega_k)=p_k$, $k=1,2,\ldots,n$. Да изберем някакво $\varepsilon>0$. Тогава събитието $(|X-\mathbf{E}[X]|\geq\varepsilon)$ включва онези елементарни изходи ω_k, за които е изпълнено $|x_k-\mathbf{E}[X]|\geq\varepsilon$, което означава, че

$$P(|X-\mathbf{E}[X]|\geq\varepsilon)=\sum_{|x_k-\mathbf{E}[X]|\geq\varepsilon}p_k .$$

За всичките събираеми в сумата отдясно е изпълнено $|x_k-\mathbf{E}[X]|\geq\varepsilon$, следователно можем да напишем

$$P(|X-\mathbf{E}[X]|\geq\varepsilon)\leq\sum_{|x_k-\mathbf{E}[X]|\geq\varepsilon}\left(\frac{|x_k-\mathbf{E}[X]|}{\varepsilon}\right)^2p_k=\frac{1}{\varepsilon^2}\sum_{|x_k-\mathbf{E}[X]|\geq\varepsilon}|x_k-\mathbf{E}[X]|^2p_k .$$

Добавяйки и (евентуално) липсващите събираеми в горната сума, получаваме

$$P(|X-\mathbf{E}[X]|\geq\varepsilon)\leq\frac{1}{\varepsilon^2}\sum_{k=1}^{n}|x_k-\mathbf{E}[X]|^2p_k=\frac{1}{\varepsilon^2}\mathbf{D}[X],$$

което доказва неравенството (20.1) в този случай.

Нека сега X е непрекъсната с плътност $f(x)$. Тогава от основното свойство на плътността имаме

$$P(|X-\mathbf{E}[X]|\geq\varepsilon)=\int_{|x-\mathbf{E}[X]|\geq\varepsilon}f(x)dx .$$

Тук интегрирането е върху множеството, определено от условието $|x-\mathbf{E}[X]|\geq\varepsilon$, следователно

$$P(|X-\mathbf{E}[X]|\geq\varepsilon)\leq\int_{|x-\mathbf{E}[X]|\geq\varepsilon}\left(\frac{|x-\mathbf{E}[X]|}{\varepsilon}\right)^2f(x)dx=\frac{1}{\varepsilon^2}\int_{|x-\mathbf{E}[X]|\geq\varepsilon}|x-\mathbf{E}[X]|^2f(x)dx .$$

Заменяйки интегрирането над множеството $|x-\mathbf{E}[X]|\geq\varepsilon$ с интегриране над цялата числова ос получаваме

$$P(|X-\mathbf{E}[X]|\geq\varepsilon)\leq\frac{1}{\varepsilon^2}\int_{-\infty}^{\infty}|x-\mathbf{E}[X]|^2f(x)dx=\frac{1}{\varepsilon^2}\mathbf{D}[X],$$

което доказва неравенството (20.1) и в този случай. ■

Сходството между доказателствата на двата случая в теорема 20.1 не е случайно. В рамките на една по-сложна теория на интеграла – ***интеграл на Стилтес***, обикновеното интегриране и сумирането се обединяват в единни означения.

Неравенството на Чебишов е в основата на доказателството на ***закона за големите числа***.

Теорема 20.2 ***(закон за големите числа).*** Нека X_1, X_2, ..., X_n, ... са редица от две по две независими случайни величини с равномерно ограничени дисперсии, $\mathbf{D}[X_n] \le C$, $n = 1,2,\dots$. Тогава за всяко $\varepsilon > 0$ е изпълнено

(20.2) $\lim\limits_{n\to\infty} P\left(\left|\dfrac{X_1 + X_1 + \dots + X_n}{n} - \dfrac{\mathbf{E}[X_1] + \mathbf{E}[X_2] + \dots + \mathbf{E}[X_n]}{n}\right| \ge \varepsilon\right) = 0$.

Доказателство. Да изберем едно $\varepsilon > 0$ и да положим

$$Y_n = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} = \frac{1}{n}X_1 + \frac{1}{n}X_2 + \dots + \frac{1}{n}X_n,\ n = 1,2,\dots.$$

Тогава от свойствата на очакването и дисперсията намираме

$$\mathbf{E}[Y_n] = \frac{\mathbf{E}[X_1] + \mathbf{E}[X_2] + \dots + \mathbf{E}[X_n]}{n},$$

$$\mathbf{D}[Y_n] = \frac{\mathbf{D}[X_1] + \mathbf{D}[X_2] + \dots + \mathbf{D}[X_n]}{n^2},$$

следователно от условието за равномерна ограниченост на дисперсиите имаме

$$\mathbf{D}[Y_n] \le \frac{C + C + \dots + C}{n^2} = \frac{C}{n}.$$

Съотношението (20.2) може да се препише във вида

(20.3) $\lim\limits_{n\to\infty} P(|Y_n - \mathbf{E}[Y_n]| \ge \varepsilon) = 0$.

Сега неравенството на Чебишов заедно с оценката за $\mathbf{D}[Y_n]$ ни дават

$$P(|Y_n - \mathbf{E}[Y_n]| \ge \varepsilon) \le \frac{\mathbf{D}[Y_n]}{\varepsilon^2} \le \frac{C}{n\varepsilon^2},$$

което веднага доказва граничното съотношение (20.3), а следователно и (20.2). ■

С други думи средното аритметично на сбор от случайни величини с нарастването на техния брой все по малко се отклонява от собственото си математическо очакване.

В качеството на пример да разгледаме схема на Бернули със серия от повторения с вероятност за успех при единичен опит p. Всеки пореден опит с номер k определя една случайна величина X_k приемаща две стойност $X_k = 1$ при успех и $X_k = 0$ в противен случай с вероятности $P(X_k = 1) = p$ и $P(X_k = 0) = 1 - p = q$. Таблицата на нейното разпределение има вида

X_k	0	1
P	p	q

Табл. 20.1.

Следвайки определенията пресмятаме

$$\mathbf{E}[X_k] = 1 * p + 0 * q = p \text{ и } \mathbf{D}[X_k] = (1-p)^2 * p + (0-p)^2 * q = pq.$$

Нека случайната величина U_n представя броя на успехите в схемата на Бернули, т.е. U_n има биномно разпределение с параметри n и p, $U_n \in B(n, p)$. Тогава

(20.4) $U_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$,

където по условие величините X_1, X_2, ..., X_n са независими (условие за независимост на отделните елементарни опити).

Твърдение 20.1. Нека $U_n \in B(n, p)$. Тогава $\mathbf{E}[U_n] = np$ и $\mathbf{D}[U_n] = npq$.

Доказателство. От (20.4) и от основните свойства на очакването и дисперсията получаваме

$$\mathbf{E}[U_n] = \mathbf{E}[X_1] + \mathbf{E}[X_2] + \cdots + \mathbf{E}[X_n] = p + p + \cdots + p = np,$$
$$\mathbf{D}[U_n] = \mathbf{D}[X_1] + \mathbf{D}[X_2] + \cdots + \mathbf{D}[X_n] = pq + pq + \cdots + pq = npq. \ \blacksquare$$

Сега от неравенството на Бернули приложено за величината $\frac{U}{n}$ представляваща относителния брой на успехите, която има очакване и дисперсия съответно

$$\mathbf{E}\left[\frac{U_n}{n}\right] = \frac{1}{n}\mathbf{E}[U_n] = \frac{1}{n}np = p \text{ и } \mathbf{D}\left[\frac{U_n}{n}\right] = \frac{1}{n^2}\mathbf{D}[U_n] = \frac{1}{n^2}npq = \frac{pq}{n},$$

получаваме оценката

$$(20.5)\quad P\left(\left|\frac{U_n}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{pq}{n\varepsilon^2},$$

откъдето непосредствено следва верността на

Теорема 20.3 ***(Бернули).*** За броя на успехите в схема с независими повторения на опитите е изпълнено

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{U_n}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right) = 0. \ \blacksquare$$

Теоремата на Бернули следва веднага и от закона за големите числа, понеже тук е изпълнено условието за равномерна ограниченост на дисперсиите на величините X_k.

Теоремата на Бернули има много ясно тълкуване. Емпиричната честота на сбъдване на дадено събитие при повторения на опита се отклонява малко от вероятността за поява на събитието, когато броят на повторенията нараства неограничено. Този резултат може да се съпостави с най-вероятния брой на успехи при схемата на Бернули, от който направихме заключение със сходен характер, че най-вероятният брой успехи се отклонява малко от стойността на p. Тези два резултата насочват недвусмислено към здравия фундамент, върху който почива теорията на вероятностите. Не бива обаче да се забравя, че теорията на вероятностите, както и всяка друга теория (математическа или не), се явява преди всичко плод на въображението на изследователите с всички плюсове и минуси от това.

2. Централна гранична теорема. Отначало ще дадем сведения за аналитичния апарат, необходим при формулировката и доказването на централната гранична теорема, макар че самото доказателство ще бъде само скицирано.

Казва се, че ***редицата от случайните величини*** $\{X_n\}$ ***клони към случайната величина*** X ***по разпределение***, когато редицата от функциите на разпределение $\{F_n(x)\}$ клони към функцията на разпределение $F(x)$, във всяка точка $x \in \mathrm{R}$, в която $F(x)$ е непрекъсната. Тук $F_n(x)$ е функцията на разпределение на X_n, а $F(x)$ е функцията на разпределение на X. Пишем $X_n \xrightarrow{d} X$.

Ако X е непрекъсната, то нейната функция на разпределение също е непрекъсната. Следователно, ако $X_n \xrightarrow{d} X$, то

$$\lim_{n\to\infty} P(a < X_n < b) = \lim_{n\to\infty}[F_n(b) - F_n(a)] = F(b) - F(a).$$

В този случай $F(x)$ се нарича ***гранично разпределение*** за редицата $\{X_n\}$.

Съгласно формулата на Ойлер $e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha$, където $i = \sqrt{-1}$ е имагинерната единица, при което за всяко реално α имаме $\left|e^{i\alpha}\right| = 1$.

Нека X е случайна величина. Тогава $\varphi(t) = \mathbf{E}\left[e^{iXt}\right]$ се нарича ***характеристична функция*** на X. Характеристичната функция представлява комплекснозначна функция на реалната променлива $t \in \mathrm{R}$. Ако X е дискретна с разпределение $P(X = x_k) = p_k$, $k = 1,2,\ldots$, то $\varphi(t) = \sum_k e^{ix_k t}$. Ако X е непрекъсната с плътност $f(x)$, то

(20.6) $\varphi(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{ixt} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \cos xt\, f(x)dx + i\int\limits_{-\infty}^{\infty} \sin xt\, f(x)dx$.

Ако $f(x)$ е четна функция, то вторият интеграл в горната формула е нула, следователно в този случай характеристичната функция е реална. Очевидно $\varphi(0) = 1$.

Да намерим например характеристичната функция на нормалното стандартно разпределение. По определение

$$\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} e^{ixt} dx .$$

Тук е възможно диференциране под знака на интеграла. След това диференциране получаваме

$$\varphi'(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} (ix) e^{ixt} dx = \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} x e^{ixt} dx = \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} e^{ixt} d\frac{x^2}{2} .$$

Сега интегрираме по части,

$$\varphi'(t) = \frac{-i}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{ixt} de^{-\frac{x^2}{2}} = \frac{-i}{\sqrt{2\pi}} e^{ixt} e^{-\frac{x^2}{2}} \Bigg|_{-\infty}^{\infty} + \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} de^{ixt} ,$$

$$\varphi'(t) = \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} (it) e^{ixt} dx = \frac{i^2 t}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} e^{ixt} dx = -t\varphi(t),$$

понеже

$$\frac{-i}{\sqrt{2\pi}} e^{ixt} e^{-\frac{x^2}{2}} \Bigg|_{-\infty}^{\infty} = \lim_{x\to\infty} \left[\frac{-i}{\sqrt{2\pi}} e^{ixt} e^{-\frac{x^2}{2}}\right] - \lim_{x\to-\infty} \left[\frac{-i}{\sqrt{2\pi}} e^{ixt} e^{-\frac{x^2}{2}}\right] = 0 - 0 = 0 .$$

Получихме, че характеристичната функция удовлетворява диференциалното уравнение $\varphi'(t) = -t\varphi(t)$, чиито решения имат вида $\varphi(t) = Ce^{-\frac{t^2}{2}}$ с някаква константа $C = \varphi(0)$. От друга страна винаги е изпълнено равенството $\varphi(0) = 1$, откъдето окончателно за характеристичната функция на нормалното стандартно разпределение получаваме

(20.7) $\varphi(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$.

Твърдение 20.2. Нека X_k са независими по съвкупност случайни величини с характеристични функции $\varphi_k(t)$, $k = 1,2,\ldots,n$, и нека $X = \alpha_0 + \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \cdots + \alpha_n X_n$, с някакви константи α_k, $k = 0,1,\ldots,n$. Тогава за характеристичната функция $\varphi(t)$ на величината X е изпълнено

$$\varphi(t) = e^{it\alpha_0} \varphi_1(\alpha_1 t)\varphi_2(\alpha_2 t)\cdots\varphi_n(\alpha_n t).$$

В частност характеристичната функция на сума от независими случайни величини се равнява на произведението на отделните характеристични функции.

Доказателство. Когато величините са независими, всякакви функции от тези величини представляват също независими случайни величини. От друга страна математическото очакване от произведение на независими величини е равно на произведението на отделните очаквания, следователно

$$\mathbf{E}\left[e^{it(\alpha_0+\alpha_1X_1+\alpha_2X_2+\cdots+\alpha_nX_n)}\right]=\mathbf{E}\left[e^{it\alpha_0}e^{it\alpha_1X_1}e^{it\alpha_2X_2}\cdots e^{it\alpha_nX_n}\right],$$

$$\mathbf{E}\left[e^{it(\alpha_0+\alpha_1X_1+\alpha_2X_2+\cdots+\alpha_nX_n)}\right]=e^{it\alpha_0}\mathbf{E}\left[e^{it\alpha_1X_1}\right]\mathbf{E}\left[e^{it\alpha_2X_2}\right]\cdots\mathbf{E}\left[e^{it\alpha_nX_n}\right],$$

$$\mathbf{E}\left[e^{it(\alpha_0+\alpha_1X_1+\alpha_2X_2+\cdots+\alpha_nX_n)}\right]=e^{it\alpha_0}\mathbf{E}\left[e^{i(t\alpha_1)X_1}\right]\mathbf{E}\left[e^{i(t\alpha_2)X_2}\right]\cdots\mathbf{E}\left[e^{i(t\alpha_n)X_n}\right],$$

$$\mathbf{E}\left[e^{it(\alpha_0+\alpha_1X_1+\alpha_2X_2+\cdots+\alpha_nX_n)}\right]=e^{it\alpha_0}\varphi_1(t\alpha_1)\varphi_2(t\alpha_2)\cdots\varphi_n(t\alpha_n),$$

което доказва твърдението. ■

Нека $X\in N(\mu,\sigma^2)$ има нормално разпределение с параметри μ и σ^2. Тогава както знаем $X=\sigma Z+\mu$, където $Z\in N(0,1)$ има нормално стандартно разпределение. Сега от твърдение 20.2 и (20.7) за характеристичната функция на X намираме

(20.8) $\varphi(t)=e^{it\mu-\frac{\sigma^2t^2}{2}}$.

Следните две теореми оправдават въвеждането на понятието характеристична функция. Първата от тях ни учи, че характеристичната функция определя разпределението по единствен начин.

Теорема 20.4 ***(за единственост).*** Характеристичната функция определя разпределението еднозначно, т.е. на всяка характеристична функция съответства само едно разпределение. ■

Освен това е валидна

Теорема 20.5 ***(за непрекъснатост).*** Нека $\{X_n\}$ е редица от случайни величини с функции на разпределение $\{F_n(x)\}$ и характеристични функции $\{\varphi_n(t)\}$. Тогава редицата $\{X_n\}$ клони по разпределение към случайната величина X с функция на разпределение $F(x)$ и характеристична функция $\varphi(t)$ тогава и само тогава, когато $\lim\limits_{n\to\infty}\varphi_n(t)=\varphi(t)$ при всяко $t\in\mathsf{R}$. ■

Поточковата сходимост на характеристичните функции се оказа еквивалентна на сходимостта по разпределение.

Нека $X_k\in N(\mu_k,\sigma_k^2)$, $k=1,2,\ldots,n$, и нека $X=\alpha_0+\alpha_1X_1+\alpha_2X_2+\cdots+\alpha_nX_n$, с някакви константи α_k, $k=0,1,\ldots,n$. Тогава съгласно твърдение 20.2 и формулата (20.8) имаме

$$\varphi_X(t)=e^{it\alpha_0}e^{it\alpha_1\mu_1-\frac{\alpha_1^2\sigma_1^2t^2}{2}}e^{it\alpha_2\mu_2-\frac{\alpha_2^2\sigma_2^2t^2}{2}}\cdots e^{it\alpha_n\mu_n-\frac{\alpha_n^2\sigma_n^2t^2}{2}},$$

$$\varphi_X(t)=e^{it[\alpha_0+\alpha_1\mu_1+\alpha_2\mu_2+\cdots+\alpha_n\mu_n]-\frac{[\alpha_1^2\sigma_1^2+\alpha_2^2\sigma_2^2+\cdots+\alpha_n^2\sigma_n^2]t^2}{2}},$$

което представлява характеристична функция на нормално разпределение с параметри

$$\mu=\alpha_0+\alpha_1\mu_1+\alpha_2\mu_2+\cdots+\alpha_n\mu_n \text{ и } \sigma^2=\alpha_1^2\sigma_1^2+\alpha_2^2\sigma_2^2+\cdots+\alpha_n^2\sigma_n^2.$$

Сега от теоремата за единственост получаваме доказателство на теорема 17.2, че линейна комбинация на нормални разпределения представлява също нормално разпределение.

Характеристичната функция може да се използва за пресмятане числовите характеристики на величината. Да разгледаме за илюстрация случая на непрекъсната величина X с плътност $f(x)$. По определение имаме

$$\varphi(t)=\mathbf{E}\left[e^{itX}\right]=\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f(x)dx,$$

откъдето след диференциране намираме

$$\varphi'(t)=\int_{-\infty}^{\infty}(ix)e^{itx} f(x)dx=i\int_{-\infty}^{\infty} xe^{itx} f(x)dx,$$

следователно

(20.9) $\varphi'(0)=i\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx=i\mathbf{E}[X]$ или още $\mathbf{E}[X]=-i\varphi'(0)$.

Аналогично

$$\varphi''(t)=i\int_{-\infty}^{\infty} x(ix)e^{itx} f(x)dx=i^2\int_{-\infty}^{\infty} x^2e^{itx} f(x)dx,$$

следователно

(20.10) $\varphi''(0)=-\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx=-\mathbf{E}\left[X^2\right]$.

Сега имайки предвид, че $\mathbf{D}[X]=\mathbf{E}\left[X^2\right]-(\mathbf{E}[X])^2$, получаваме

$$\mathbf{D}[X]=-\varphi''(0)-(-i\varphi(0))^2=\varphi'^2(0)-\varphi''(0).$$

Нека $\{X_k\}$ е редица от независими случайни величини с очаквания $\mu_k=\mathbf{E}[X_k]$ и дисперсии $\sigma_k^2=\mathbf{D}[X_k]$ и да положим

$$Y_n=X_1+X_2+\cdots+X_n.$$

Тогава

$$\mathbf{E}[Y_n]=\mathbf{E}[X_1]+\mathbf{E}[X_2]+\cdots+\mathbf{E}[X_n]=\mu_1+\mu_2+\cdots+\mu_n,$$
$$\mathbf{D}[Y_n]=\mathbf{D}[X_1]+\mathbf{D}[X_2]+\cdots+\mathbf{D}[X_n]=\sigma_1^2+\sigma_2^2+\cdots+\sigma_n^2.$$

При централната гранична теорема се разглеждат величините

$$Z_n=\frac{Y_n-\mathbf{E}[Y_n]}{\sqrt{\mathbf{D}[Y_n]}}$$

и твърди, че (при определени условия) ***величините Z_n клонят по разпределение към нормално стандартно разпределение***, т.е.

(20.11) $\lim\limits_{n\to\infty} P\left(\dfrac{Y_n-\mathbf{E}[Y_n]}{\sqrt{\mathbf{D}[Y_n]}}<x\right)=\Phi(x)$,

където

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$

е функцията на разпределение за нормалното стандартно разпределение. Формулата (20.11) открива възможност за приблизително пресмятане на вероятности както следва

$$P\left(a<\frac{Y_n-\mathbf{E}[Y_n]}{\sqrt{\mathbf{D}[Y_n]}}<b\right)\approx\Phi(b)-\Phi(a).$$

Ако величините $\{X_k\}$ са независими и еднакво разпределени с очаквания $\mathbf{E}[X_k]=\mu$ и дисперсии $\mathbf{D}[X_k]=\sigma^2$, то $\mathbf{E}[Y_n]=n\mu$ и $\mathbf{D}[Y_n]=n\sigma^2$. В този случай за величините Z_n имаме

$$Z_n = \frac{Y_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}},$$

а централната гранична теорема се формулира както следва.

Теорема 20.6 ***(централна гранична теорема за еднакво разпределени величини).*** Нека $\{X_n\}$ е редица от независими и еднакво разпределени случайни величини с очаквания $\mathbf{E}[X_n] = \mu$ и дисперсии $\mathbf{D}[X_n] = \sigma^2$. Тогава е изпълнено

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{Y_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} < x\right) = \Phi(x). \tag{20.12}$$

Доказателство. Да запишем Z_n във вида

$$Z_n = \frac{Y_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} = \frac{X_1 - \mu}{\sqrt{n}\sigma} + \frac{X_2 - \mu}{\sqrt{n}\sigma} + \cdots + \frac{X_n - \mu}{\sqrt{n}\sigma}.$$

Нека $\psi(t)$ е характеристичната функция на величините $\frac{X_n - \mu}{\sigma}$, която е една и съща за всички, понеже по условие те са разпределени еднакво. Имаме

$$\mathbf{E}\left[\frac{X_n - \mu}{\sigma}\right] = 0 \text{ и } \mathbf{D}\left[\frac{X_n - \mu}{\sigma}\right] = 1,\ n = 1,2,\ldots,$$

следователно съгласно (20.9) и (20.10) е изпълнено $\psi'(0) = 0$ и $\psi''(0) = -1$. В околност на точката $t = 0$ за функцията $\psi(t)$ е в сила представянето

$$\psi(t) = \psi(0) + \psi'(0)t + \frac{\psi''(t)}{2}t^2 + t^2\varepsilon(t),$$

където $\varepsilon(t) \to 0$ при $t \to 0$. По този начин за $\psi(t)$ намираме

$$\psi(t) = 1 - \frac{1}{2}t^2 + t^2\varepsilon(t).$$

Сега от твърдение 20.2 следва, че характеристичната функция $\hat{\psi}(t)$ на еднакво разпределените величини $\frac{X_n - \mu}{\sqrt{n}\sigma}$ има вида

$$\hat{\psi}(t) = 1 - \frac{1}{2n}t^2 + \frac{t^2}{n}\varepsilon\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right).$$

Нека $\varphi_n(t)$ е характеристичната функция за случайната величина Z_n. Тогава отново съгласно твърдение 20.2, функцията $\varphi_n(t)$ представлява произведението от характеристичните функции на величините $\frac{X_n - \mu}{\sqrt{n}\sigma}$, следователно

$$\varphi_n(t) = \prod_{k=1}^{n} \hat{\psi}(t) = \left[1 - \frac{1}{2n}t^2 + \frac{t^2}{n}\varepsilon\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right]^n. \tag{20.13}$$

От правилата за пресмятане на граници знаем, че ако $\lim_{n\to\infty}\alpha_n = \alpha$, то

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{\alpha_n}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{(n/\alpha_n)}\right)^{(n/\alpha_n)\alpha_n} = e^{\alpha}. \tag{20.14}$$

Преобразуваме

$$1 - \frac{1}{2n}t^2 + \frac{t^2}{n}\varepsilon\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) = 1 + \frac{1}{n}\left(-\frac{t^2}{2} + t^2\varepsilon\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right) = 1 + \frac{\alpha_n}{n},$$

където

$$\alpha_n = -\frac{t^2}{2} + t^2\varepsilon\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) \to -\frac{t^2}{2} \text{ при } n \to \infty .$$

Съгласно (20.13) и (20.14) намираме

$$\lim_{n\to\infty}\varphi_n(t) = \lim_{n\to\infty}\left[1+\frac{\alpha_n}{n}\right]^n = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n} = e^{-\frac{t^2}{2}} .$$

Установихме, че редицата от характеристичните функции $\{\varphi_n(t)\}$ клони поточково към характеристичната функция на нормалното стандартно разпределение. Сега верността на централната гранична теорема следва непосредствено от теоремите за единственост и непрекъснатост. ■

От централната гранична теорема веднага се получава верността на

Теорема 20.7 ***(Моавър-Лаплас).*** Нека $U_n \in B(n,p)$ е броят на успехите в схемата на Бернули. Тогава

(20.15) $\lim\limits_{n\to\infty} P\left(\frac{U_n - np}{\sqrt{npq}} < x\right) = \Phi(x)$,

където $\Phi(x)$ е функцията на нормално стандартно разпределение.

Доказателство. Както вече обсъдихме, при схемата на Бернули със серия от независими повторения с вероятност за успех при единичен опит p, всеки пореден опит с номер k определя случайна величина X_k приемаща стойност $X_k = 1$ при успех и $X_k = 0$ в противен случай с вероятности p и $q = 1-p$. Освен това $\mu = \mathbf{E}[X_k] = p$ и $\sigma^2 = \mathbf{D}[X_k] = pq$. За броя на успехите U_n имаме $U_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$. Сега става очевидно, че формулата (20.15) се получава като частен случай на (20.12). ■

Формулата (20.15) се използва обикновено за приблизително пресмятане на вероятностите $P(a < U_n < b)$, понеже

$$P(a < U_n < b) = P\left(\frac{a-np}{\sqrt{npq}} < \frac{U_n - np}{\sqrt{npq}} < \frac{b-np}{\sqrt{npq}}\right),$$

откъдето съгласно (20.15) намираме

(20.16) $P(a < U_n < b) \approx \Phi\left(\frac{b-np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{a-np}{\sqrt{npq}}\right)$.

Аналогично се получават формулите

(20.17) $P(U_n < b) \approx \Phi\left(\frac{b-np}{\sqrt{npq}}\right)$ и $P(a < U_n) \approx 1 - \Phi\left(\frac{a-np}{\sqrt{npq}}\right)$.

Например да оценим вероятността при $n = 100$ броя хвърляне на монета, броят на показанията "герб" да бъде между 45 и 55. Тук $p = q = \frac{1}{2}$, $np = 50$, $npq = 25$. Търсим вероятността $P(45 < U_{100} < 55)$. Съгласно (20.16) имаме

$$P(45 < U_{100} < 55) \approx \Phi\left(\frac{55-50}{5}\right) - \Phi\left(\frac{45-50}{5}\right) = \Phi(1) - \Phi(-1),$$

$$P(45 < U_{100} < 55) \approx 0.841345 - 0.158655 = 0.682689 .$$

Да намерим сега вероятността броят на гербовете да бъде по-малък от 40. Съгласно (20.17) намираме

$$P(U_{100} < 40) \approx \Phi\left(\frac{40-50}{5}\right) = \Phi(-2) = 0.022750\,.$$

Поради симетрията в стандартното нормално разпределение, толкова е и вероятността броят на успехите да бъде по-голям от 60.

Заключението на централната гранична теорема с известни уговорки може да бъде прочетено по следния начин. Ако X_1, X_2, ..., X_n са независими случайни величини, то тяхната сума има приблизително нормално разпределение със средно и дисперсия

$$\mu = \mathbf{E}[X_1] + \mathbf{E}[X_2] + \cdots + \mathbf{E}[X_1] \text{ и } \sigma^2 = \mathbf{D}[X_1] + \mathbf{D}[X_2] + \cdots + \mathbf{D}[X_n]\,.$$

Тук по-важен е фактът, че сумата следва някакво нормално разпределение. При много величини от практиката, статистическите наблюдения показват, че те наистина се подчиняват на нормално разпределение със някакво конкретно математическо очакване и дисперсия. Това обстоятелство намира своето естествено обяснение именно посредством централната гранична теорема, понеже величините в динамично равновесие с околната среда е напълно разумно да се разглеждат като сума от голям брой случайни въздействия от необозрим характер. По този начин се оправдава предпочитането на нормалното разпределение като универсален модел в приложното статистическо моделиране. Разбира се има величини, за които вследствие тяхната специфика е ясно, че се подчиняват на други видове разпределения, например разпределение на Поасон, логонормално разпределение и т.н.