

### Лекция 3

## §3. Матрична алгебра. Формули на Крамер

**1. Матрична алгебра.** Матриците могат да се събират и умножават по определение правила. Всяка матрица може да се **умножава с число поелементно**, при което се получава матрица от същия тип. Ако

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \text{ то } \lambda A = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}.$$

**Пример 3.1.** Ако

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \text{ то } 2A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ -2 & 6 & 2 \end{pmatrix}.$$

Еднотипните матрици могат да се **събират поелементно**, при което отново се получава матрица от същия тип. Ако

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix},$$

то

$$A \pm B = \begin{pmatrix} a_{11} \pm b_{11} & a_{12} \pm b_{12} & \cdots & a_{1n} \pm b_{1n} \\ a_{21} \pm b_{21} & a_{22} \pm b_{22} & \cdots & a_{2n} \pm b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} \pm b_{m1} & a_{m2} \pm b_{m2} & \cdots & a_{mn} \pm b_{mn} \end{pmatrix}.$$

**Пример 3.2.** Ако

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \text{ то } A + B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}.$$

Матрицата, от даден тип  $(m \times n)$ , която се състои само от нули се нарича **нулева матрица** и има същото значение като числото нула при операцията събиране.

Въведените по-горе операции в пространството от еднотипните матрици  $K_{m \times n}$  (над полето  $K$ ) го превръщат в **линейно пространство**, при наличието на следните елементарни свойства.

- 1)  $(A + B) + C = A + (B + C)$  (асоциативност на събирането).
- 2)  $A + B = B + A$  (комутативност на събирането).
- 3)  $A + \mathbf{0} = \mathbf{0} + A = A$ .
- 4)  $A + (-A) = (-A) + A = \mathbf{0}$ , където  $-A = (-1)A$ .
- 5)  $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$ .
- 6)  $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$ .
- 7)  $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$ .

Две матрици  $A$  от тип  $(m \times s)$  и  $B$  от тип  $(s \times n)$  могат да се умножават по правилото "**ред по стълб**", при което се получава матрица  $C$  от тип  $(m \times n)$ . Елементите на матрицата произведение  $C = AB$  се дават по формулата

$$(3.1) \quad c_{ij} = \sum_{k=1}^s a_{ik} b_{kj} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \dots + a_{is} b_{sj}.$$

За да получим елемента  $c_{ij}$  трябва да вземем елементите от  $i$ -тия ред на левия множител  $A$ , да ги умножим със съответните елементи от  $j$ -тия стълб на десния множител  $B$  и да съберем получените произведения, което оправдава и наименованието на тази операция като умножение "ред по стълб".

**Пример 3.3.** Ако

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \text{ то } AB = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -3 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

За да бъде възможно умножението трябва да бъде налице следното **условие за съгласуваност**. Броят на стълбовете на левия множител трябва да бъде равен на броя на редовете на десния множител. В противен случай умножението не може да се извърши. В последния пример произведението  $BA$  не съществува понеже броят на стълбовете на  $B$  е различен от броя на редовете на  $A$ .

**Пример 3.4.** Нека  $A$  е матрица от тип  $(1 \times 3)$ , а  $B$  е матрица от тип  $(3 \times 1)$ , определени както следва

$$A = (1 \ 3 \ -1) \text{ и } B = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Тогава произведението  $AB$  е матрица от тип  $(1 \times 1)$ , т.е. число,  $AB = -5$ , докато произведението  $BA$  е матрица от тип  $(3 \times 3)$ ,

$$BA = \begin{pmatrix} 2 & 6 & -2 \\ -2 & -6 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Последният пример показва, че в общия случай двете произведения  $AB$  и  $BA$  (ако съществуват) са различни. Ако и двата множителя  $A$  и  $B$  са квадратни матрици от ред  $n$ , то можем да образуваме и двете произведения  $AB$  и  $BA$ , понеже в този случай не възниква проблем със съгласуваността на множителите. И тук в общия случай  $AB \neq BA$ , т.е. умножението на матрици не е комутативно, което обаче не изключва възможността в отделни случаи да има равенство.

**Ако  $A$  и  $B$  са квадратни матрици от ред  $n$  и  $AB = BA$ , то се казва, че  $A$  и  $B$  са комутативни.**

Непосредствено се проверява, че ако  $A$  е матрица от тип  $(m \times n)$ , то е изпълнено

$$E_m A = A E_n = A,$$

където  $E_n$  е единичната матрица от ред  $n$ , а  $E_m$  е единичната матрица от ред  $m$ . В частност, ако  $A$  е квадратна матрица от ред  $n$ , то  $E_n A = A E_n = A$ . По този начин в пространството на квадратните матрици  $M_n(K)$ , единичната матрица има същата роля както числото 1 при умножението на числа.

**Твърдение 3.1. Умножението на матрици е асоциативно.** Ако  $A$  е  $(m \times p)$  матрица,  $B$  е  $(p \times q)$  матрица, а  $C$  е  $(q \times n)$  матрица, то

$$(AB)C = A(BC).$$

*Доказателство.* Да положим  $D' = (AB)C$  и  $D'' = A(BC)$ . Тогава прилагайки последователно формулата (3.1), за елементите на  $D'$  и  $D''$  получаваме

$$d'_{ij} = \sum_{\alpha=1}^p \sum_{\beta=1}^q a_{i\alpha} b_{\alpha\beta} c_{\beta j} = d''_{ij}.$$

Елементите на тройното произведение се получават чрез пълно сумиране по вътрешните индекси, независимо последователността на умножение. ■

**Асоциативното свойство** на умножението се запазва и при повече множители. Ако  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $D$  са съгласувани за умножение матрици, то произведението  $ABCD$  е едно и също независимо от реда на последователните умножения, например

$$(AB)(CD) = (A(BC))D = A(B(CD)) \text{ и т.н.}$$

Тук е важно само да не се сменят местата на множителите, даже когато са изпълнени условия за съгласуваност, например ако всичките матрици са квадратни от един и същ ред.

Следните свойства на умножението са практически очевидни, когато алгебричните операции могат да бъдат извършени.

- 1)  $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$ .
- 2)  $(A+B)C = AC + BC$ .
- 3)  $C(A+B) = CA + CB$ .
- 4)  $(AB)^T = B^T A^T$ .

Последното свойство се обобщава за повече множители. Например ако  $A$ ,  $B$  и  $C$  са съгласувани за умножение матрици, то  $(ABC)^T = C^T B^T A^T$ , т.е. транспонирането на произведение е еквивалентно на произведението от транспонираните матрици но взети в обратен ред.

Едно от най-важните свойства на матричното произведение се съдържа в

**Теорема 3.1.** Нека  $A$  и  $B$  са квадратни матрици от ред  $n$ . Тогава

$$(3.2) \quad \det(AB) = (\det A)(\det B).$$

*Доказателство.* Да положим  $C = AB$  и да разгледаме следните преобразувания, които са обратими и не променят верността на формулата (3.2), която трябва да докажем.

- П1)** Смяна местата на два реда в матрицата  $A$ , което съответства на смяна местата на същите два реда при  $C$ .
- П2)** Умножаване един ред на матрицата  $A$  с число и прибавянето му към друг ред на  $A$ , което съответства на същото преобразуваните по редове при матрицата  $C$ .
- П3)** Пренареждане стълбовете на матрицата  $A$  и пренареждане по същия начин редовете на  $B$ , което не променя матрицата  $C$ .

За да докажем теоремата ще прилагаме последователно **П1**, **П2** и **П3** докато формулата (3.2) стане лесна за непосредствено доказване.

Според твърдение 3.6, прилагайки по подходящ начин **П1**, **П2** и **П3** върху  $A$  (което води до съответните промени в  $B$  и  $C$ ) ще стигнем до един от двата случая.

- 1) Преобразуваната матрица  $A$  съдържа нулев ред, следователно  $\det A = 0$ . Тогава редът със същия номер в матрицата  $C$  също ще бъде нулев и  $\det C = 0$ , което доказва формулата (3.2).
- 2) Преобразуваната матрица  $A$  е диагонална (с различни от нула елементи по главния диагонал)

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} \text{ и } \det A = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n.$$

В този случай редовете на матрицата произведение  $C = AB$  се получават от редовете на матрицата  $B$  след умножение със съответните по номера диагонални елементи на  $A$ . Сега от основните свойства на детерминантите получаваме

$$\det C = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n \det B = (\det A)(\det B),$$

което доказва теоремата и в този случай. ■

**2. Обратна матрица.** Квадратната матрица  $A$  от ред  $n$  се нарича *обратима*, когато съществува квадратна матрица  $B$  от ред  $n$ , за която

$$AB = BA = E_n,$$

където  $E_n$  е единичната матрица от ред  $n$ . В този случай матрицата  $B$  се нарича *обратна* на  $A$  и се бележи с  $A^{-1}$ .

Обратната матрица, когато съществува, е *единствена*. Ако  $B_1$  и  $B_2$  са две матрици, за които  $AB_1 = B_1A = AB_2 = B_2A = E_n$ , то след умножение на равенството  $AB_1 = E_n$  отляво с  $B_2$  получаваме  $B_2AB_1 = B_2E_n = B_2$ , откъдето отчитайки, че  $B_2A = E_n$ , намираме  $E_nB_1 = B_2$ , следователно  $B_1 = B_2$ .

Ако матрицата  $A$  е обратима, то  $AA^{-1} = E_n$  и съгласно теорема 3.1

$$(\det A)(\det A^{-1}) = \det(AA^{-1}) = \det E_n = 1,$$

следователно по необходимост  $\det A \neq 0$ . По нататък ще се убедим, че това условие е същевременно и достатъчно.

Да разгледаме *присъединената матрица*  $A^*$ , която се образува от адюнгираните количества на матрицата  $A$  по следния начин

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

Адюнгираните количества на елементите на първия ред на  $A$  образуват първия стълб на  $A^*$ , адюнгираните количества на елементите на втория ред на  $A$  образуват втория стълб на  $A^*$  и т.н.

Според теорема 3.1, ако елементите на един ред умножим по техните адюнгираните количества и съберем получените произведения, ще получим стойността на детерминантата, а съгласно свойство 7, ако елементите на един ред умножим по адюнгираните количества на елементите на друг ред и съберем получените произведения, ще получим нула. Сега непосредствено се проверява, че за всяка квадратна матрица е изпълнено

$$(3.3) \quad AA^* = \begin{pmatrix} \det A & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \det A & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \det A \end{pmatrix} = A^*A.$$

Нека  $\det A \neq 0$  и да положим

$$B = \frac{1}{\det A} A^*.$$

Тогава отчитайки (3.3) получаваме

$$AB = BA = \frac{1}{\det A} AA^* = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} \det A & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \det A & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \det A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = E_n,$$

което показва, че в този случай матрицата  $A$  е обратима с обратна  $B$ . По този начин доказахме

**Теорема 3.2.** Квадратната матрица  $A$  от ред  $n$  е обратима тогава и само тогава, когато  $\det A \neq 0$ . В този случай

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^* = \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{\det A} & \frac{A_{21}}{\det A} & \cdots & \frac{A_{n1}}{\det A} \\ \frac{A_{12}}{\det A} & \frac{A_{22}}{\det A} & \cdots & \frac{A_{n2}}{\det A} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{A_{1n}}{\det A} & \frac{A_{2n}}{\det A} & \cdots & \frac{A_{nn}}{\det A} \end{pmatrix}. \blacksquare$$

**Пример 3.5.** Да намерим обратната на матрицата

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тук  $\det A = -4 \neq 0$ , следователно матрицата е обратима. За да намерим нейната обратна първо пресмятаме адюнгираните количества. Имаме

$$\begin{aligned} A_{11} &= (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3, & A_{12} &= (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -1, & A_{13} &= (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -1, \\ A_{21} &= (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -4, & A_{22} &= (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 0, & A_{23} &= (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -4, \\ A_{31} &= (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1, & A_{32} &= (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1, & A_{33} &= (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1. \end{aligned}$$

Сега по теорема 3.2 получаваме

$$A^{-1} = \frac{1}{-4} \begin{pmatrix} -3 & -4 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & 1 & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & 1 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

Обратимостта на една матрица изцяло зависи от стойността на нейната детерминанта. По тази причина, ако детерминантата на една квадратна матрица е равна на нула, то матрицата се нарича *особена*.

**Твърдение 3.2.** Нека  $A$  и  $B$  са обратими квадратни матрици. Тогава тяхното произведение  $AB$  също е обратима матрица, при което  $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ .

*Доказателство.* Матриците  $A$  и  $B$  са обратими, което означава, че  $\det A \neq 0$  и  $\det B \neq 0$ . Съгласно теорема 3.1,  $\det(AB) = (\det A)(\det B) \neq 0$ , следователно матрицата  $AB$  също е обратима. Да положим  $C = B^{-1}A^{-1}$ . Тогава

$$(AB)C = (AB)(B^{-1}A^{-1}) = AB B^{-1} A^{-1} = A(BB^{-1})A^{-1} = AEA^{-1} = AA^{-1} = E,$$

следователно  $(AB)^{-1} = C = B^{-1}A^{-1}$ . ■

Горното твърдение се обобщава и за повече множители. Например, ако  $A$ ,  $B$  и  $C$  са обратими матрици, то произведението  $ABC$  също е обратима матрица, при което  $(ABC)^{-1} = C^{-1}B^{-1}A^{-1}$  и т.н.

Следващото твърдение дава връзка между операциите транспониране и обръщане на матрица.

**Твърдение 3.3.** Нека  $A$  е обратима квадратна матрица. Тогава нейната транспонирана  $A^T$  също е обратима матрица, при което  $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$ .

*Доказателство.* Матрицата  $A$  е обратима, което означава, че  $\det A \neq 0$ . Съгласно твърдение 3.3,  $\det A^T = \det A \neq 0$ , следователно матрицата  $A^T$  също е обратима. Да положим  $C = (A^{-1})^T$ . Тогава

$$A^T C = A^T (A^{-1})^T = (A^{-1} A)^T = E^T = E,$$

следователно  $(A^T)^{-1} = C = (A^{-1})^T$ . ■

**3. Формули на Крамер.** Да разгледаме *линейната система* от  $n$  уравнения със също толкова на брой неизвестни  $x_1, x_2, \dots, x_n$

$$(3.4) \quad \begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \dots & \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned}$$

Под решене на тази система се разбира всяка наредена съвкупност от  $n$  на брой числа, които след заместване в неизвестните удовлетворяват всичките уравнения на системата. Константите  $a_{ij}$ ,  $1 \leq i, j \leq n$ , се наричат *коэффициенти* на системата, а  $b_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , се наричат *свободни коэффициенти*. Коэффициентите на системата (3.4), нейните свободни коэффициенти и съвкупността на неизвестните величини могат да се представят съответно като квадратна матрица  $A$  от ред  $n$  и два вектор-стълба с  $n$  елемента по следния начин

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

с помощта на които системата линейни уравнения (3.4) може да се запише в матрично-векторен вид

$$(3.5) \quad Ax = b.$$

Ако  $n = 1$ , то равенството (3.5) се превръща в просто линейно уравнение  $ax = b$ , където  $a$  и  $b$  са някакви числа, а  $x$  е търсеното неизвестно, което уравнение има решение когато коэффициентът  $a$  е различен от нула. В този случай решението се записва във вида  $x = a^{-1}b$ . В общия случай системата (3.5) също се решава лесно, ако  $\det A \neq 0$ . Тогава матрицата  $A$  е обратима и като умножим (3.5) отляво с обратната  $A^{-1}$ ,

получаваме  $A^{-1}Ax = A^{-1}b$ , откъдето отчитайки равенството  $A^{-1}A = E_n$ , за решението на системата (3.5) по необходимост намираме формулата

$$(3.6) \quad x = A^{-1}b,$$

за която веднага се проверява, че наистина определя решение на системата (3.4), понеже  $A(A^{-1}b) = (AA^{-1})b = E_nb = b$ . Съгласно теорема 3.2, в разгърнат вид, това матрично равенство има следната форма

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix},$$

следователно

$$x_1 = \frac{b_1 A_{11} + b_2 A_{21} + \cdots + b_n A_{n1}}{\det A} = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\det A} = \frac{\Delta_1}{\Delta},$$

$$x_2 = \frac{b_1 A_{12} + b_2 A_{22} + \cdots + b_n A_{n2}}{\det A} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\det A} = \frac{\Delta_2}{\Delta},$$

...

$$x_n = \frac{b_1 A_{1n} + b_2 A_{2n} + \cdots + b_n A_{nn}}{\det A} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b_n \end{vmatrix}}{\det A} = \frac{\Delta_n}{\Delta}.$$

По този начин доказахме следната

**Теорема 3.3.** Нека матрицата на коефициентите на линейната система (3.4) е обратима,  $\det A \neq 0$ . Тогава тази система има (при това единствено) решение, което се задава по формулите (*формули на Крамер*)

$$x_k = \frac{\Delta_k}{\Delta}, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

където  $\Delta = \det A$ , а детерминантата  $\Delta_k$  се получава като  $k$ -тия стълб на  $\Delta$  заменим със стълба на свободните коефициенти. ■

**Пример 3.6.** Да решим следната система

$$x + y + z = 6$$

$$2x - y + z = 3$$

$$x - y + 2z = 5$$

Поради малкия брой на неизвестните, те са означени с  $x$ ,  $y$  и  $z$ , вместо  $x_1$ ,  $x_2$  и  $x_3$ . Изобщо индексирането е целесъобразно означение само при голям брой употребени еднотипни величини в съответния запис. За детерминантата на системата пресмятаме

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -5 \neq 0,$$

следователно решението, което е единствено, може да се намери по формулите на Крамер, съгласно които

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 5 & -1 & 2 \end{vmatrix}}{-5} = \frac{-5}{-5} = 1, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & 2 \end{vmatrix}}{-5} = \frac{-10}{-5} = 2, \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 5 \end{vmatrix}}{-5} = \frac{-15}{-5} = 3.$$

Ако всичките свободни коефициенти са нули, то системата се нарича **хомогенна**. Очевидно, една хомогенна система винаги има решение, което се състои само от нули. Ако обаче детерминантата на една хомогенна система е различна от нула, то тази система няма друго решение.

**Твърдение 3.4.** Нека матрицата на коефициентите на хомогенната система линейни уравнения

$$(3.7) \quad \begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= 0 \\ &\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n &= 0 \end{aligned}$$

е обратима, т.е.  $\det A \neq 0$ . Тогава тази система има само нулевото решение.

*Доказателство.* Понеже  $\det A \neq 0$ , за решенията на (3.7) можем да приложим формулите на Крамер. В този случай обаче всяка от детерминантите  $\Delta_k$  има нулев стълб, следователно  $\Delta_k = 0$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ , и съответно  $x_k = 0$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ . ■

От основната теорема на алгебрата следва, че един полином от степен  $n$  не може да има повече от  $n$  на брой различни корени. Сега ще докажем този факт като следствие от твърдение 3.4.

**Твърдение 3.5.** Нека

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

е полином, за който съществуват  $n+1$  на брой числа  $x_0, x_1, \dots, x_n$  такива, че  $f(x_k) = 0$ , за всяко  $k = 0, 1, \dots, n$ . Тогава  $f(x)$  е тъждествено равен на нула.

*Доказателство.* По условие имаме

$$\begin{aligned} a_0 + a_1 x_0 + \dots + a_{n-1} x_0^{n-1} + a_n x_0^n &= 0 \\ a_0 + a_1 x_1 + \dots + a_{n-1} x_1^{n-1} + a_n x_1^n &= 0 \\ &\dots \quad \dots \quad \dots \\ a_0 + a_1 x_n + \dots + a_{n-1} x_n^{n-1} + a_n x_n^n &= 0 \end{aligned}$$

което можем да разглеждаме като хомогенна система от  $n+1$  на брой линейни уравнения относно неизвестните  $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n$  с детерминанта, чиято транспонирана представлява детерминанта на Вандермонд  $VDM(x_0, x_1, \dots, x_n)$ . Тази детерминанта е различна от нула, понеже числата  $x_0, x_1, \dots, x_n$  се предполагат различни по между си. Сега от твърдение 3.4 следва, че въпросната система има само нулевото решение,  $a_0 = a_1 = \dots = a_{n-1} = a_n = 0$ , т.е. всичките коефициенти на дадения полином  $f(x)$  са равни на нула. ■



**3. Собствени значения и собствени вектори.** Нека  $A$  е квадратна матрица от ред  $n$  (с реални или комплексни елементи). Ако  $\lambda$  е някакво число (реални или комплексно), а  $\vec{v} \neq \vec{0}$  е някакъв вектор (с реални или комплексни координати), при което е налице равенството  $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$ ,

$$(3.8) \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix},$$

то се казва, че  $\lambda$  е **собствено значение** за матрицата  $A$  със **собствен вектор**  $\vec{v}$ .

Равенството (3.8) може да се схваща като хомогенна система линейни уравнения

$$(3.9) \quad \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (A - \lambda E_n)\vec{v} = \vec{0},$$

която по определение има ненулево решение. Сега от общите свойства на такива системи се вижда, че ако  $\lambda$  е собствено число, то  $\det(A - \lambda E_n) = 0$ , т.е.  $\lambda$  е корен на **характеристичния полином**  $\chi(z) = \det(A - zE_n)$  на матрицата  $A$ , което означава, че  $\lambda$  удовлетворява **характеристичното уравнение**  $\chi(z) = 0$ . Обратното също е вярно и също следва от основните свойства на хомогенните системи. Ако  $\lambda$  е корен на характеристичното уравнение, то  $\det(A - \lambda E_n) = 0$  и следователно хомогенната система (3.9) има ненулево решение, което се явява собствен вектор за матрицата  $A$ , отговарящ на собственото значение  $\lambda$ .

Характеристичният полином има степен точно  $n$ , следователно има  $n$  на брой корена, отчитайки тяхната кратност. Според основаната теорема на алгебрата можем да запишем

$$\chi(z) = (-1)^n (z - \lambda_1)(z - \lambda_2) \cdots (z - \lambda_n),$$

където  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  са корените на полинома, които както вече установихме се явяват собствените значения на матрицата  $A$ . В това представяне е отчетен фактът, че старшият коефициент на характеристичния полином е равен на  $(-1)^n$ . Полагайки  $z = 0$ , намираме

$$\chi(0) = (-1)^n (-\lambda_1)(-\lambda_2) \cdots (-\lambda_n) = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n.$$

От друга страна  $\chi(0) = \det(A - 0E_n) = \det A$ . По този начин доказахме

**Твърдение 3.6.** Произведението на всичките собствени значения на дадена матрица е равно на стойността на нейната детерминанта. ■

Нека  $U$  е  $(n \times n)$  матрица с реални елементи, за която  $UU^T = E_n$ , т.е.  $U^{-1} = U^T$ . Такива матрици се наричат **ортогонални**. В частност, ако  $U$  е ортогонална, то  $\det U = \pm 1$ , понеже

$$1 = \det E_n = \det(UU^T) = (\det U)(\det U^T) = (\det U)^2.$$

**Пример 3.7.** Матрицата

$$U = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$$

е ортогонална.