

Лекция 5

§5. Линейни и векторни пространства

1. Линейни пространства. Едно множество V се нарича *линейно пространство* над числовото поле F , когато в него са определени двете линейни операции *събиране* и *умножение с число*. По аналогия с геометричните вектори, е удобно елементите на линейното пространство да наричаме *вектори*, а числата от полето – *скалари*. Събирането означава, че за всеки два вектора $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in V$ е определена тяхната сума $\mathbf{a} + \mathbf{b} \in V$. Умножението със скалар означава, че за всеки вектор $\mathbf{a} \in V$ и всяко число $\lambda \in F$ е определено произведението $\lambda \mathbf{a} \in V$, при което по определение са налице следните естествени и очаквани свойства.

- 1) За всеки два вектора \mathbf{a} и \mathbf{b} е изпълнено $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$ – комутативност на събирането.
- 2) За всеки три вектора \mathbf{a} , \mathbf{b} и \mathbf{c} е изпълнено $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{b} + (\mathbf{a} + \mathbf{c})$ – асоциативност на събирането.
- 3) Съществува нулев вектор $\mathbf{0} \in V$ такъв, че за всеки вектор \mathbf{a} е изпълнено $\mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{a}$.
- 4) За всеки вектор \mathbf{a} съществува противоположен вектор $-\mathbf{a}$, за който $\mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = \mathbf{0}$.
- 5) За всеки вектор \mathbf{a} е изпълнено $1 \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a}$.
- 6) За всеки две числа λ и μ и всеки вектор \mathbf{a} е изпълнено $(\lambda + \mu)\mathbf{a} = \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{a}$.
- 7) За всяко число λ и всеки два вектора \mathbf{a} и \mathbf{b} е изпълнено $\lambda(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \lambda\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b}$.
- 8) За всеки две числа λ и μ и всеки вектор \mathbf{a} е изпълнено $\lambda(\mu\mathbf{a}) = (\lambda\mu)\mathbf{a}$.

Пример 5.1. Линейно пространство е множеството на всичките еднотипни $(m \times n)$ матрици $F_{m \times n}$. Тук нулевият елемент е нулевата матрица.

Пример 5.2. Специфичен пример за линейно пространство получаваме ако разгледаме полиномите $\pi_n[x]$ от ред не по-висок от n с коефициенти от полето F .

Пример 5.3. От особена важност е линейното пространство на *геометричните вектори*, за което ще стане дума по нататък.

Наличието на асоциативност и комутативност при събирането дава основание да разгледаме следния сбор на повече от две събираеми $\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \dots + \mathbf{a}_n$, при който е без значение редът на извършване на отделните събирания, както и самият ред на събираемите.

Векторът $\lambda_1 \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \mathbf{a}_2 + \dots + \lambda_n \mathbf{a}_n$, където $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ са числа, се нарича *линейна комбинация* на векторите $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$. Едно линейно пространство съдържа всевъзможните линейни комбинации на своите вектори.

Нека V е линейно пространство, а W е някакво линейно пространство, което е подмножество на V . Тогава се казва, че W е *линейно подпространство* на V . Например *линейната обвивка* $l(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n)$ на векторите $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$, която се състои от всичките техни линейни комбинации е едно линейно подпространство на V ,

$$l(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n) = \{\mathbf{a} \in V \mid \mathbf{a} = \lambda_1 \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \mathbf{a}_2 + \dots + \lambda_n \mathbf{a}_n\} \subseteq V.$$

Определение 5.1. Казва се, че векторите $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ са *линейно независими* (образуват линейно независима система), ако равенството $\lambda_1 \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \mathbf{a}_2 + \dots + \lambda_n \mathbf{a}_n = \mathbf{0}$ е възможно, единствено когато всичките коефициенти на тази линейна комбинация са нули, $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$. Казва се, че векторите $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ са *линейно зависими*, когато не са линейно независими.

От горното определение следва, че векторите $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ са линейно зависими тогава и само тогава, когато може да се намерят числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, поне едно от които различно от нула, за които съответната линейна комбинация дава нулевия вектор,

$\lambda_1 \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \mathbf{a}_2 + \dots + \lambda_n \mathbf{a}_n = \mathbf{0}$. Един вектор \mathbf{a} е линейно независими (зависим) тогава и само тогава, когато е различен (равен) на нулевия вектор.

Твърдение 5.1. Нека системата вектори $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ е линейно независима. Тогава всяка нейна подсистема $\mathbf{a}_{i_1}, \mathbf{a}_{i_2}, \dots, \mathbf{a}_{i_k}$ също е линейно независима. Следователно, ако една система от вектори притежава линейно зависима подсистема, то тя също е линейно зависима.

Доказателство. Без ограничение на общността можем да предположим, че подсистемата се състои от първите k вектора $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$ ($k < n$) и да разгледаме една тяхна линейна комбинация, която дава нулевия вектор, $\lambda_1 \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \mathbf{a}_2 + \dots + \lambda_k \mathbf{a}_k = \mathbf{0}$. Тогава, ако добавим и останалите вектори с множители нула, получаваме линейната комбинация

$$\lambda_1 \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \mathbf{a}_2 + \dots + \lambda_k \mathbf{a}_k + 0 \cdot \mathbf{a}_{k+1} + \dots + 0 \cdot \mathbf{a}_n = \mathbf{0}.$$

Системата $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ е линейно независима и следователно последното равенство е възможно, единствено когато $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_k = 0$. Направеното разсъждение показва, че подсистемата също е линейно независима. ■

От твърдение 5.1 следва, че една линейно независима система не може да съдържа нулевия вектор и обратно, ако един от векторите на системата е нулевият, то системата е линейно зависима.

Твърдение 5.2. Системата вектори $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ е линейно зависима тогава и само тогава, когато някой от векторите може да се изрази като линейна комбинация на останалите.

Доказателство. 1) Нека системата е линейно зависима. Тогава съществува линейна комбинация $\lambda_1 \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \mathbf{a}_2 + \dots + \lambda_n \mathbf{a}_n = \mathbf{0}$, при което поне един от коефициентите е различен от нула. Без ограничение на общността да предположим, че $\lambda_1 \neq 0$. Сега непосредствено се получава, че векторът \mathbf{a}_1 е следната линейна комбинация на останалите вектори

$$\mathbf{a}_1 = \left(-\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right) \mathbf{a}_2 + \dots + \left(-\frac{\lambda_n}{\lambda_1} \right) \mathbf{a}_n.$$

2) Сега да предположим, че някой от векторите, например \mathbf{a}_1 , може да се запише като линейна комбинация $\mathbf{a}_1 = \mu_2 \mathbf{a}_2 + \mu_3 \mathbf{a}_3 + \dots + \mu_n \mathbf{a}_n$. Тогава линейната комбинация

$$1 \cdot \mathbf{a}_1 - \mu_2 \mathbf{a}_2 - \mu_3 \mathbf{a}_3 - \dots - \mu_n \mathbf{a}_n = \mathbf{0}$$

има поне един ненулев коефициент, например коефициентът пред \mathbf{a}_1 е равен на $-1 \neq 0$, което по определение означава, че системата е линейно зависима. ■

Най простият случай на линейно пространство V е когато то съдържа само нулевия вектор, $V = \{\mathbf{0}\}$. Ако $V \neq \{\mathbf{0}\}$, то V съдържа линейно независими системи с някакъв брой вектори. Например всеки ненулев вектор $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ сам образува линейно независима система.

Определение 5.2. Казва се, че линейното пространство $V \neq \{\mathbf{0}\}$ е *крайномерно* и има *размерност* $\dim V = n$, когато могат да се намерят някакви n на брой линейно независими вектори и всяка система от $n+1$ на брой вектори е линейно зависима. Ако за всяка n може да се намери линейно независима система от n на брой вектори, то пространството се нарича *безкрайномерно*, $\dim V = \infty$.

Ако $V = \{\mathbf{0}\}$, то полагаме по целесъобразност $\dim V = 0$. Съгласно твърдение 5.1, ако V е крайномерно и $\dim V = n$, то не само всяка система от $n+1$ на брой вектори е

линейно зависима, но всяка система от $n+2$ и повече на брой вектори е линейно зависима. От определението непосредствено следва верността на

Твърдение 5.3. Нека в линейното пространство V могат да се намерят n на брой вектори $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ такива, че всеки вектор $\mathbf{a} \in V$ може да се представи като тяхна линейна комбинация. Тогава $\dim V \leq n$. Ако освен това $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ са линейно независими, то $\dim V = n$. ■

Пример 5.4. Линейното пространство $K_{m \times n}$ на еднотипните $(m \times n)$ матрици е крайномерно и има размерност $\dim K_{m \times n} = m \cdot n$, понеже всяка такава матрица $A = (a_{ij})$ може да се запише като линейна комбинация

$$A = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} E_{ij},$$

където E_{ij} е матрица, чийто елемент в ред i и стълб j е равен на 1, а всички останали елементи са нули и освен това тези матрици са линейно независими.

Пример 5.5. Линейното пространство на полиномите $\pi_n[x]$ от ред не по-висок от n с реални или комплексни коефициенти също е крайномерно и има размерност $\dim \pi_n[x] = n+1$, понеже всеки такъв полином

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

може да се схваща като линейна комбинация на елементарните полиноми $p_k(x) = x^k$, $k = 0, 1, \dots, n$, които са $n+1$ на брой и освен това са линейно независими.

Нека $V \neq \{\mathbf{0}\}$ е крайномерно и има размерност $\dim V = n$. Тогава по определение във V може да се намери поне една система от n на брой линейно независими вектори.

Определение 5.3. Всяка система от n на брой линейно независими вектори във крайномерното линейно пространство $V \neq \{\mathbf{0}\}$ с размерност $\dim V = n$ се нарича **базис** във V .

Ползата от понятието базис се показва добре от следната

Теорема 5.1. Нека векторите $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ образуват базис в крайномерното линейно пространство V , $\dim V = n$. Тогава всеки вектор $\mathbf{a} \in V$ може да се представи при това по единствен начин като линейна комбинация на базисните вектори,

$$(5.1) \quad \mathbf{a} = \lambda_1 \mathbf{e}_1 + \lambda_2 \mathbf{e}_2 + \dots + \lambda_n \mathbf{e}_n.$$

Доказателство. Векторите $\mathbf{a}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ са $n+1$ на брой, следователно са линейно зависими и съществува тяхна линейна комбинация

$$\mu \mathbf{a} + \mu_1 \mathbf{e}_1 + \mu_2 \mathbf{e}_2 + \dots + \mu_n \mathbf{e}_n = \mathbf{0},$$

където поне един от коефициентите $\mu, \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ е различен от нула. Ако допуснем, че $\mu = 0$, то получим противоречие с линейната независимост на базисните вектори, следователно $\mu \neq 0$, откъдето намираме

$$\mathbf{a} = \left(-\frac{\mu_1}{\mu}\right) \mathbf{e}_1 + \left(-\frac{\mu_2}{\mu}\right) \mathbf{e}_2 + \dots + \left(-\frac{\mu_n}{\mu}\right) \mathbf{e}_n = \mathbf{0}.$$

Да предположим сега, че имаме две представяния

$$\mathbf{a} = \lambda'_1 \mathbf{e}_1 + \lambda'_2 \mathbf{e}_2 + \dots + \lambda'_n \mathbf{e}_n \quad \text{и} \quad \mathbf{a} = \lambda''_1 \mathbf{e}_1 + \lambda''_2 \mathbf{e}_2 + \dots + \lambda''_n \mathbf{e}_n.$$

Тогава след почленно изваждане на двете равенства намираме

$$\mathbf{0} = (\lambda'_1 - \lambda''_1) \mathbf{e}_1 + (\lambda'_2 - \lambda''_2) \mathbf{e}_2 + \dots + (\lambda'_n - \lambda''_n) \mathbf{e}_n,$$

което отново поради линейната независимост на базисните вектори е възможно, единствено когато

$$(\lambda'_1 - \lambda''_1) = (\lambda'_2 - \lambda''_2) = \dots = (\lambda'_n - \lambda''_n) = 0,$$

което означава, че представянето е единствено. ■

Нека векторите $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ образуват базис. Съгласно теорема 5.1 всеки вектор се идентифицира еднозначно чрез своите коефициенти $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ в линейната комбинация (5.1), които се наричат още координати на вектора \mathbf{a} в дадения базис. Пишем $\mathbf{a}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ или $\mathbf{a} = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$.

Непосредствено се проверява, че линейните операции събиране и умножение със скалар могат да бъдат извършени върху координатите на участващите вектори. Ако

$$\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n), \text{ т.е. } \mathbf{a} = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + \dots + a_n\mathbf{e}_n$$

и

$$\mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n), \text{ т.е. } \mathbf{b} = b_1\mathbf{e}_1 + b_2\mathbf{e}_2 + \dots + b_n\mathbf{e}_n,$$

то

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_1 + b_1)\mathbf{e}_1 + (a_2 + b_2)\mathbf{e}_2 + \dots + (a_n + b_n)\mathbf{e}_n,$$

следователно $\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n)$ и

$$\lambda\mathbf{a} = (\lambda a_1)\mathbf{e}_1 + (\lambda a_2)\mathbf{e}_2 + \dots + (\lambda a_n)\mathbf{e}_n,$$

следователно $\lambda\mathbf{a} = (\lambda a_1, \lambda a_2, \dots, \lambda a_n)$.

Твърдение 5.4. Нека векторите $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ образуват базис във V и $\mathbf{a}_k(a_{k1}, a_{k2}, \dots, a_{kn})$, $k = 1, 2, \dots, m$, ($m \leq n$), са някакви вектори, зададени чрез техните координати в този базис и да разгледаме матрицата от техните координати

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Тогава векторите $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m$ са линейно независими тогава и само тогава, когато $r(A) = m$, т.е. когато рангът на матрицата A е максимален. Следователно, ако $m = n$, то векторите $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m$ образуват базис тогава и само тогава, когато $r(A) = n$, т.е. когато $\det A \neq 0$.

Доказателство. Ще докажем еквивалентното твърдение, че векторите $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m$ са линейно зависими тогава и само тогава, когато $r(A) < m$.

1) Нека векторите $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m$ са линейно зависими. Тогава някой от тях може да се представи като линейна комбинация на останалите, следователно според основните свойства на детерминантите, в матрицата A всеки минор от ред m е равен на нула и $r(A) < m$. 2) Да предположим сега, че $r(A) < m$. Тогава съгласно теоремата за базисния минор в матрицата A има редове (небазисни редове), които се представят като линейна комбинация на други (базисни) редове, следователно между редовете на A съществува линейна зависимост, което означава, че същата линейна зависимост има между векторите $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m$. ■

Нека V е линейно пространство и $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m$ са някакви вектори. Тогава тяхната линейна обвивка $l(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m)$ представлява крайномерно линейно пространство (което е подпространство на V) и неговата размерност се нарича ранг на системата вектори $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m$, $r(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m) = \dim[l(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m)]$. Рангът на една система вектори е равен на най-големия брой линейно независими между тях. В

частност, $r(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m) = m$ тогава и само тогава, когато $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m$ са линейно независими.

2. Геометрични вектори. Тук предполагаме, че читателят е запознат с някои основни геометрични понятия. По целесъобразност различаваме три вида пространства на геометрични вектори, вектори върху права, вектори върху равнина и вектори в пространството. И в трите случая векторът представлява *насочена отсечка* $\vec{a} = \overline{AB}$ с начало точката A и край в точката B (рис. 5.1).

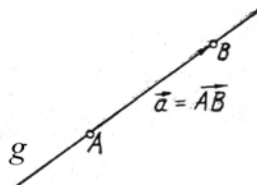


Рис. 5.1.

При нулевият вектор $\vec{0}$, началната и крайната точка съвпадат. Една насочена отсечка \vec{a} притежава следните геометрични характеристики.

1) **Дължина** (модул на вектор), която се бележи с $|\vec{a}|$. Дължината е относително понятие. Ако имаме еталон (машаб) – вектор \vec{e} с дължина $|\vec{e}| \neq 0$, то можем да изразим дължината на всеки друг вектор като пропорция от дължината на \vec{e} . Всеки два вектора могат да бъдат сравнявани по дължина. Нулевият вектор и само той има нулева дължина, $|\vec{0}| = 0$.

2) **Направление и посока.** За всеки ненулев вектор $\vec{a} \neq \vec{0}$, съществува единствена права g , върху която лежи \vec{a} . Тази права се нарича *директриса* и задава направлението на вектора \vec{a} . Едно направление, определено от правата g , задава две посоки, първата съвпада с посоката на вектора \vec{a} , а втората посока е противоположна на \vec{a} . Нулевият вектор няма определено направление и посока.

Ос се нарича права, върху която е избран машаб за дължина и едната от двете нейни посоки е определена като положителна. По този начин за всеки вектор \overline{AB} върху дадена ос g се определя *алгебрична мярка*, равна на неговата дължина в съответствие с машаба, когато \overline{AB} и g са еднопосочни и равна на неговата дължина със знак минус, когато \overline{AB} и g имат противоположни посоки.

Две насочени отсечки, които могат да се получат една от друга с помощта на успоредно пренасяне, по нататък ще разглеждаме като представители на един и същ вектор. По този начин не правим разлика между два вектора, които имат една и съща дължина и едно и също направление и една и съща посока.

Тези вектори можем да разглеждаме като получени от множеството на насочените отсечки след прилагане на описаното *отношение на еквивалентност* между тях.

Между геометричните вектори разглеждаме следните линейни операции.

1) **Умножение с число** λ . За нулевия вектор определяме $\lambda \vec{0} = \vec{0}$. Нека сега $\vec{a} \neq \vec{0}$. Ако $\lambda = 0$ то полагаме $0 \cdot \vec{a} = \vec{0}$. Ако $\lambda \neq 0$, то под произведение $\lambda \vec{a}$ на вектора \vec{a} с числото λ се разбира вектор с дължина $|\lambda \vec{a}| = |\lambda| |\vec{a}|$, който има направление като вектора \vec{a} и посока, която съвпада с тази на \vec{a} , когато $\lambda > 0$, и посока противоположна на тази на вектора \vec{a} , когато $\lambda < 0$.

2) **Събиране.** Сборът $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ двата вектора \vec{a} и \vec{b} е векторът, който се получава, когато приложим \vec{b} в крайната точка на \vec{a} (рис. 5.2), $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{OB}$.

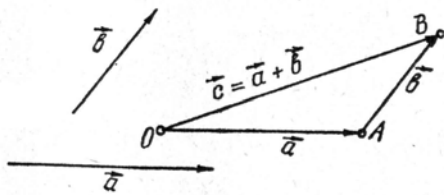


Рис. 5.2.

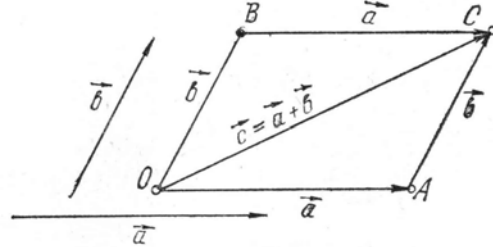


Рис. 5.3.

Събирането може да бъде извършено по **правилото на успоредника** (рис. 5.3), при което двата вектора $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ и $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$ се прилагат в една и съща точка O , след което триъгълникът $\triangle OAB$ се допълва до успоредник $OABC$. Тук сборът $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ се явява векторът, който представлява диагонала \overrightarrow{OC} .

Разликата $\vec{c} = \vec{b} - \vec{a}$ може да се разгледа като сбора на \vec{b} с $-\vec{a}$, $\vec{c} = \vec{b} + (-\vec{a})$ и отново да се определи по правилото на успоредника (рис. 5.4 и рис 5.5).

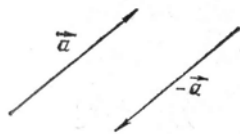


Рис. 5.5.

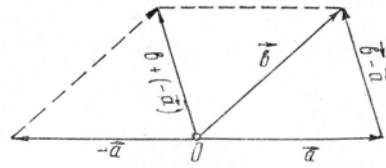


Рис. 5.5.

Непосредствено се проверява, че така определеното множество на геометрични вектори и линейни операции между тях удовлетворяват всички основни изисквания за линейно пространство. Между тези свойства да обърнем внимание на асоциативността на операцията събиране, която е доказана илюстративно на (рис. 5.6).

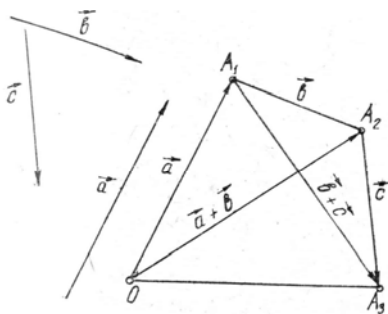


Рис. 5.5.

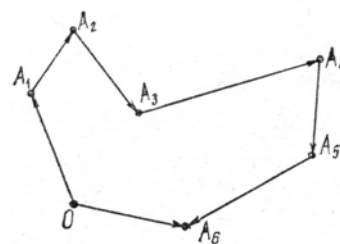


Рис. 5.7.

На рис. 5.7 е илюстриран начинът на събиране на повече от два вектора.

Два вектора \vec{a} и \vec{b} в равнината или в пространството се наричат **колинеарни (успоредни)**, когато са линейно зависими, т.е. когато могат да се намерят две числа λ и μ , поне едното от които различно от нула такива, че $\lambda\vec{a} + \mu\vec{b} = \vec{0}$. По този начин нулевият вектор е колинеарен с всеки друг вектор. Тук е по-интересен случаят когато и двата вектора са ненулеви. Нека за определеност $\mu \neq 0$. Тогава имаме $\vec{b} = \left(-\frac{\lambda}{\mu}\right)\vec{a}$, което

означава, че векторите \vec{a} и \vec{b} имат едно и също направление (успоредни директриси), откъдето и произлиза терминът "колинеарни".

Три вектора \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} в пространството се наричат **компланарни**, когато са линейно зависими, т.е. когато могат да се намерят три числа λ , μ и ν , поне едно от които различно от нула такива, че $\lambda\vec{a} + \mu\vec{b} + \nu\vec{c} = \vec{0}$. По този начин нулевият вектор е компланарен с всеки друг вектор и освен това, ако кои да е два от векторите \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} са колинеарни, то те са компланарни. И тук е по-интересен случаят когато и трите вектора са ненулеви. Нека за определеност $\nu \neq 0$. Тогава имаме $\vec{c} = \left(-\frac{\lambda}{\nu}\right)\vec{a} + \left(-\frac{\mu}{\nu}\right)\vec{b}$,

което означава, че векторът \vec{c} лежи в равнина, определена от векторите \vec{a} и \vec{b} , откъдето и произлиза терминът "компланарни". Тази равнина се явява единствена, когато векторите \vec{a} и \vec{b} не са колинеарни. Пренебрегвайки някои технически уточнения, даваме следното

Определение 5.4. Базис в равнината се наричат всеки два линейно независими (неколинеарни) вектори \vec{e}_1 и \vec{e}_2 . **Базис в пространството** се наричат всеки три линейно независими (некомпланарни) вектори \vec{e}_1 , \vec{e}_2 и \vec{e}_3 .

По-нататък ще се убедим, че горното определение за базис се съгласува напълно с даденото в предишния раздел общо определение за базис.

Теорема 5.2. Нека векторите \vec{e}_1 и \vec{e}_2 образуват базис в равнината. Тогава всеки вектор \vec{a} от тази равнина може да се представи при това по единствен начин като линейна комбинация на базисните, $\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2$. Числата a_1 и a_2 се наричат **координати** на вектора \vec{a} в базиса \vec{e}_1 , \vec{e}_2 . Нека векторите \vec{e}_1 , \vec{e}_2 и \vec{e}_3 образуват базис в пространството. Тогава всеки вектор \vec{a} от пространството може да се представи при това по единствен начин като линейна комбинация на базисните, $\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3$. Числата a_1 , a_2 и a_3 се наричат **координати** на вектора \vec{a} в базиса \vec{e}_1 , \vec{e}_2 , \vec{e}_3 .

Доказателство. 1) Нека \vec{e}_1 и \vec{e}_2 образуват базис в равнината. Да приложим трите вектора $\vec{e}_1 = \overrightarrow{OE_1}$, $\vec{e}_2 = \overrightarrow{OE_2}$ и $\vec{a} = \overrightarrow{OM}$ в една и съща точка O и да допълним конструкцията до успоредник, както е показано на рис. 5.8, при което числовите оси по директрисите на \vec{e}_1 и \vec{e}_2 да означим съответно с Ox и Oy . Тогава

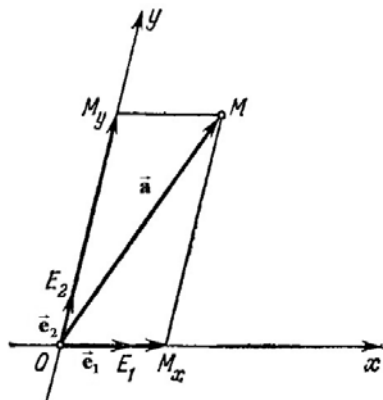


Рис. 5.8.

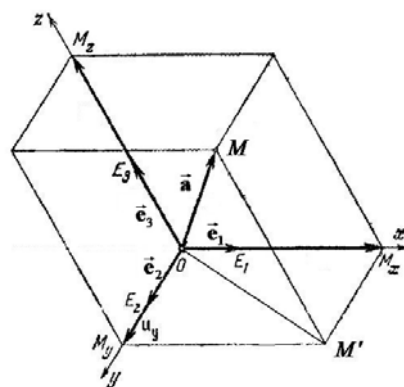


Рис. 5.9.

по правилото на успоредника следва, че $\vec{a} = \overrightarrow{OM_x} + \overrightarrow{OM_y}$. От друга страна имаме $\overrightarrow{OM_x} = a_1\vec{e}_1$ и $\overrightarrow{OM_y} = a_2\vec{e}_2$, за някои числа a_1 и a_2 , следователно $\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2$.

2) Нека \vec{e}_1, \vec{e}_2 и \vec{e}_3 образуват базис в пространството. Да приложим четирите вектора $\vec{e}_1 = \overrightarrow{OE_1}, \vec{e}_2 = \overrightarrow{OE_2}, \vec{e}_3 = \overrightarrow{OE_3}$ и $\vec{a} = \overrightarrow{OM}$ в една и съща точка O и да допълним конструкцията до паралелепипед, както е показано на рис. 5.9, при което числовите оси по директрисите на \vec{e}_1 и \vec{e}_2 да означим съответно с Ox, Oy и Oz . През точката M да прекараме права, успоредна на оста Oz до пресичане с равнината Oxy в точка M' . Тогава, $\vec{a} = \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM'} + \overrightarrow{M'M}$. От друга страна, $\overrightarrow{OM'} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2$ и $\overrightarrow{M'M} = a_3\vec{e}_3$, за някои числа a_1, a_2 и a_3 следователно $\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3$. Единствеността и в двата случая се доказва както при теорема 5.1. ■

Последните разсъждения трябва да се схващат по скоро като резултат на геометричната интуиция отколкото като строги дедукции в рамките на апарата на линейната алгебра.

Сега вече лесно можем да установим, че *всеки три вектора в равнината са линейно зависими и всеки четири вектора в пространството са линейно зависими*. Да разгледаме векторите \vec{a}_1, \vec{a}_2 и \vec{a}_3 от някоя равнина. Ако \vec{a}_1 и \vec{a}_2 са колинеарни, то няма какво да се доказва, ако \vec{a}_1 и \vec{a}_2 не са колинеарни, то те образуват базис и следователно третият вектор \vec{a}_3 се представя като тяхна линейна комбинация. Да разгледаме сега векторите $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ и \vec{a}_4 от пространството. Ако \vec{a}_1, \vec{a}_2 и \vec{a}_3 са компланарни, то няма какво да се доказва, ако \vec{a}_1 и \vec{a}_2 не са компланарни, то те образуват бази и следователно четвъртият вектор \vec{a}_4 се представя като тяхна линейна комбинация.

По този начин се убедихме, че равнината е линейно пространство с размерност 2, а пространството може да бъде разглеждано като линейно пространство с размерност 3. По тази причина понякога равнината се означава с \mathbb{R}^2 , а пространството чрез \mathbb{R}^3 .

Афинна координатна система $O\vec{e}_1\vec{e}_2$ в равнината се получава, когато имаме налице някакъв базис \vec{e}_1, \vec{e}_2 и фиксираме една точка O за начало на координатната система. Базисът позволява да адресираме по единствен начин векторите в равнината, посредством техните координати. Координатната система позволява да адресираме всяка точки M в равнината чрез координатите на нейния *радиус вектор* \overrightarrow{OM} . По същия начин *афинна координатна система $O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$ в пространството* се получава, когато имаме налице някакъв базис $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ и фиксираме една точка O за начало на координатната система. Базисът позволява да адресираме по единствен начин векторите в пространството, посредством техните координати. Координатната система позволява да адресираме всяка точки M в пространството чрез координатите на нейния *радиус вектор* \overrightarrow{OM} .

Ако е зададена една афинна координатна система, то правите през началото O , успоредни на базисните вектори се наричат *координатни оси*. Координатните оси са оси, за които мащабът е посоката се задават от съответните базисни вектори. Всеки две координатни оси на афинната координатна система $O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$ в пространството образуват съответната *координатна равнина*.

Ако базисните вектори сключват помежду си прави ъгли, то базисът се нарича *ортогонален*, а когато базисът е ортогонален и базисните вектори имат единична дължина, то базисът се нарича *ортонормиран*.

Ако базисът е ортонормиран, то съответната афинна координатна система се нарича **декартова (правоъгълна)**. В декартова координатна система координатните оси могат да бъдат разглеждани като **числови** оси.

По нататък в геометричните изследвания ще разглеждаме като правило само декартови координатни системи с базисни вектори, означени с \vec{i} и \vec{j} със съответни числови оси Ox и Oy за случай на равнина (рис 5.10) и \vec{i} , \vec{j} и \vec{k} със съответни числови оси Ox , Oy и Oz за случай на пространство (рис 5.11).

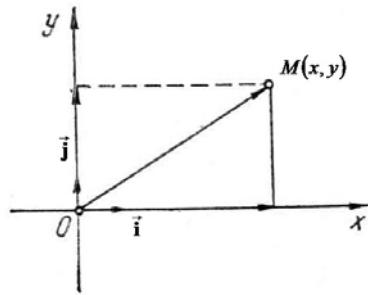


Рис. 5.10.

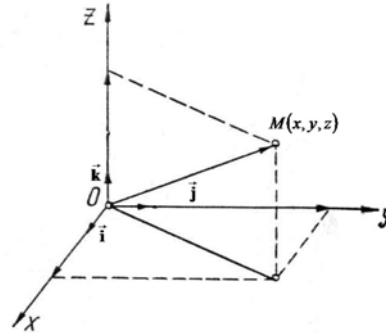


Рис. 5.11.

Когато трябва да означим дадена точка M чрез нейните координати пишем $M(x, y)$ и $M(x, y, z)$ съответно за случая на равнина и пространство.

Декартовата координатна система в равнината Oxy се нарича **положително ориентирана**, когато по-краткият път на завъртане на първата числова ос Ox до сливане с втората ос Oy е в посока, **обратна на движението на часовниковата стрелка**, както е в случая, изобразен на рис. 5.10. В противен случай координатната система Oxy се нарича **отрицателно ориентирана**. Очевидно ако координатната система Oxy е положително ориентирана, то системата Oyx е отрицателно ориентирана.

Декартовата координатна система в пространството $Oxyz$ се нарича **положително ориентирана**, когато координатната система Oxy в съответната координатна равнина е положително ориентирана, "погледнато от върха" на третата ос Oz , както е в случая, изобразен на рис. 5.11. В противен случай координатната система $Oxyz$ се нарича **отрицателно ориентирана**.

Аналогични означения за координатните оси както и аналогични определения за ориентация могат да бъдат въведени и за произволна афинна координатна система.

Освен декартови координатни системи могат да бъдат използвани и други координатни системи, които имат същото основно предназначение – да адресират точките в равнината и пространството, например полярна, цилиндрична и сферична координатна система.

3. Евклидовото пространство R^n . Един от най-важните за приложенията примери за линейни пространства е линейното пространство R^n , елементите на което са вектори стълбове (еднотипни $(n \times 1)$ матрици), които за удобство в текста ще изписваме понякога като редове,

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}.$$

Координатите на тези вектори се предполагат *реални числа*, макар че при доказателството на основните твърдения в много случаи се допуска възможността координатите да приемат и комплексни стойности. Размерността на \mathbf{R}^n е равна на n , $\dim \mathbf{R}^n = n$. Тук най-често се използва *каноничният базис*

$$\bar{\mathbf{e}}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \bar{\mathbf{e}}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \bar{\mathbf{e}}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix},$$

за които имаме $\bar{\mathbf{a}} = a_1 \bar{\mathbf{e}}_1 + a_2 \bar{\mathbf{e}}_2 + \dots + a_n \bar{\mathbf{e}}_n$. Съгласно твърдение 5.4, векторите $\bar{\mathbf{a}}_k (a_{k1}, a_{k2}, \dots, a_{kn})$, $k = 1, 2, \dots, n$, образуват базис тогава и само тогава, когато

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \neq 0.$$

По аналогия се определя и линейното пространство K^n , където K е някакво друго числово поле, например $K = \mathbf{C}$.

В този раздел ще разгледаме понятия като собствено число, собствен вектор, ортогонална матрица и характеристичен полином, които имат огромно значение за цялата линейна алгебра, при което ще дадем определенията в общия случай, както и ще докажем някои основни свойства.

Преди всичко в \mathbf{R}^n се въвежда скалярно произведение и по тази причина то се нарича *евклидово пространство* (другата причина е, че координатите на векторите се приемат основно за реални числа). Нека $\bar{\mathbf{a}}(a_1, a_2, \dots, a_n)$ и $\bar{\mathbf{b}}(b_1, b_2, \dots, b_n)$ са два вектора. Тогава тяхното *скалярно произведение* $\langle \bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}} \rangle$ се определя като сбор от произведенията на съответните координати.

$$\langle \bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}} \rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n.$$

По нататък ще установим, че горното определение се съгласува правилото на пресмятане на геометричното скалярно произведение, когато геометричните вектори се разглеждат в ортонормирания базис $\bar{\mathbf{i}}, \bar{\mathbf{j}}, \bar{\mathbf{k}}$.

Лесно се проверява, че са налице следните основни свойства.

- 1) $\langle \bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{a}} \rangle \geq 0$, при което равенство има единствено в случая $\bar{\mathbf{a}} = \bar{\mathbf{0}}$.
- 2) $\langle \bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}} \rangle = \langle \bar{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{a}} \rangle$ (*симетричност*).
- 3) $\langle \lambda_1 \bar{\mathbf{a}}_1 + \lambda_2 \bar{\mathbf{a}}_2 + \dots + \lambda_p \bar{\mathbf{a}}_p, \bar{\mathbf{b}} \rangle = \lambda_1 \langle \bar{\mathbf{a}}_1, \bar{\mathbf{b}} \rangle + \lambda_2 \langle \bar{\mathbf{a}}_2, \bar{\mathbf{b}} \rangle + \dots + \lambda_p \langle \bar{\mathbf{a}}_p, \bar{\mathbf{b}} \rangle$ (*линейност*).

Поради симетрията, скалярното произведение е линейно и по двата аргумента, което позволява при работа да се разкриват скобите по обичайния начин.

Строго погледнато даденото определение представлява един частен (макар и най-важния) случай на скалярно произведение. В \mathbf{R}^n могат да се въведат различни скалярни произведения, следвайки изискването да са изпълнени изброените по горе три свойства.

Скалярното произведение може да се запише във вида

$$\langle \bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}} \rangle = \bar{\mathbf{b}}^T \bar{\mathbf{a}},$$

в който се използва познатото матрично умножение "ред по стълб".

Векторите \vec{a} и \vec{b} се наричат *ортогонални*, когато тяхното скалярно произведение е равно на нула, $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = 0$. В този случай понякога се пише $\vec{a} \perp \vec{b}$.

Дължината $|\vec{a}|$ (модула) на вектора \vec{a} се определя като $|\vec{a}| = \sqrt{\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle}$ (също както при геометричните вектори).

Следващото твърдение намира различни полезни приложения.

Твърдение 5.5. Собствените вектори, отговарящи на дадено собствено число λ образуват линейно подпространство.

Доказателство. Нека $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m$ са собствени вектори, отговарящи на собственото число λ и да разгледаме една тяхна линейна комбинация

$$\vec{v} = \mu_1 \vec{v}_1 + \mu_2 \vec{v}_2 + \dots + \mu_m \vec{v}_m.$$

Тогава

$$A\vec{v} = A(\mu_1 \vec{v}_1 + \mu_2 \vec{v}_2 + \dots + \mu_m \vec{v}_m) = \mu_1 A\vec{v}_1 + \mu_2 A\vec{v}_2 + \dots + \mu_m A\vec{v}_m,$$

$$A\vec{v} = \mu_1 \lambda \vec{v}_1 + \mu_2 \lambda \vec{v}_2 + \dots + \mu_m \lambda \vec{v}_m = \lambda(\mu_1 \vec{v}_1 + \mu_2 \vec{v}_2 + \dots + \mu_m \vec{v}_m) = \lambda \vec{v},$$

което доказва твърдението. ■

В частност, ако $\vec{v} \neq \vec{0}$ е собствен вектор за матрицата A , отговарящ на собствено значение λ , то всеки вектор $\mu \vec{v}$, $\mu \neq 0$, също е собствен за това значение.

Твърдение 5.6. Собствените вектори, отговарящи на различни собствени значения на дадена $(n \times n)$ матрица A са линейно независими.

Доказателство. Нека $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_s$ са собствени вектори, отговарящи на различните помежду си собствени значения $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$ и да образуваме една тяхна нулева линейна комбинация

$$\mu_1 \vec{v}_1 + \mu_2 \vec{v}_2 + \dots + \mu_s \vec{v}_s = \vec{0}.$$

Като приложим матрицата A върху горното равенство, намираме

$$\mu_1 A\vec{v}_1 + \mu_2 A\vec{v}_2 + \dots + \mu_s A\vec{v}_s = \vec{0},$$

$$\mu_1 \lambda_1 \vec{v}_1 + \mu_2 \lambda_2 \vec{v}_2 + \dots + \mu_s \lambda_s \vec{v}_s = \vec{0},$$

понеже по определение $A\vec{v}_k = \lambda_k \vec{v}_k$, за всяко $k=1,2,\dots,s$. Прилагайки отново матрицата A намираме

$$\mu_1 \lambda_1 A\vec{v}_1 + \mu_2 \lambda_2 A\vec{v}_2 + \dots + \mu_s \lambda_s A\vec{v}_s = \vec{0},$$

$$\mu_1 \lambda_1^2 \vec{v}_1 + \mu_2 \lambda_2^2 \vec{v}_2 + \dots + \mu_s \lambda_s^2 \vec{v}_s = \vec{0},$$

и т.н. намираме, че за всяко цяло положително число m е налице равенството

$$\mu_1 \lambda_1^m \vec{v}_1 + \mu_2 \lambda_2^m \vec{v}_2 + \dots + \mu_s \lambda_s^m \vec{v}_s = \vec{0}.$$

Да разгледаме тези равенства за $m=0,1,2,\dots,s-1$ и да ги подредим в матричен вид.

Получаваме матричното равенство

$$(5.2) \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_s \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{s-1} & \lambda_2^{s-1} & \dots & \lambda_s^{s-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_1 \vec{v}_1^T \\ \mu_2 \vec{v}_2^T \\ \vdots \\ \mu_s \vec{v}_s^T \end{pmatrix} = \vec{0},$$

в което първата матрица множител отляво има детерминанта от тип на Вандермонд, която е различна от нула по условие, вторият множител отляво е $(n \times n)$ матрица, чиито редове са образувани от собствените вектори на A , умножени с коефициентите на

линейната комбинация, а матрицата отлясно е нулевата $(n \times n)$ матрица. Умножавайки (5.2) отляво с обратната матрица на вандермондовия множител, получаваме

$$\begin{pmatrix} \mu_1 \bar{\mathbf{v}}_1^T \\ \mu_2 \bar{\mathbf{v}}_2^T \\ \vdots \\ \mu_s \bar{\mathbf{v}}_s^T \end{pmatrix} = \mathbf{0},$$

което означава, че всичките вектори редове $\mu_k \bar{\mathbf{v}}_k^T$, $k=1,2,\dots,s$, са нулеви, а това е възможно, единствено когато всичките коефициенти $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_s$ на линейната комбинация са равни на нула. ■

В общия случай собствените значения на реалните матрици могат да бъдат и комплексни числа. Симетричните матрици обаче имат само реални собствени значения.

Твърдение 5.7. Нека A е реална симетрична матрица от ред n . Тогава всичките нейни собствени значения са реални.

Доказателство. Нека $\lambda = \alpha + i\beta$ е едно собствено число на A , на което отговаря собствен вектор $\bar{\mathbf{h}} = \bar{\mathbf{u}} + i\bar{\mathbf{v}}$, където α и β са реалната и имагинерната част на λ , а $\bar{\mathbf{u}}$ и $\bar{\mathbf{v}}$ са реални вектори, задаващи реалната и имагинерната част на собствения вектор $\bar{\mathbf{h}}$. Трябва да покажем, че $\beta = 0$. По условие имаме $A\bar{\mathbf{h}} = \lambda\bar{\mathbf{h}}$,

$$A(\bar{\mathbf{u}} + i\bar{\mathbf{v}}) = (\alpha + i\beta)(\bar{\mathbf{u}} + i\bar{\mathbf{v}}), \quad A\bar{\mathbf{u}} + iA\bar{\mathbf{v}} = (\alpha\bar{\mathbf{u}} - \beta\bar{\mathbf{v}}) + i(\alpha\bar{\mathbf{v}} + \beta\bar{\mathbf{u}}),$$

откъдето отделяйки реална и имагинерна част получаваме

$$A\bar{\mathbf{u}} = \alpha\bar{\mathbf{u}} - \beta\bar{\mathbf{v}} \quad \text{и} \quad A\bar{\mathbf{v}} = \alpha\bar{\mathbf{v}} + \beta\bar{\mathbf{u}}.$$

Умножавайки скалярно първото с $\bar{\mathbf{v}}$, а второто с $\bar{\mathbf{u}}$, получаваме

$$(5.3) \quad \langle A\bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{v}} \rangle = \alpha\langle \bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{v}} \rangle - \beta\langle \bar{\mathbf{v}}, \bar{\mathbf{v}} \rangle \quad \text{и} \quad \langle A\bar{\mathbf{v}}, \bar{\mathbf{u}} \rangle = \alpha\langle \bar{\mathbf{v}}, \bar{\mathbf{u}} \rangle + \beta\langle \bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{u}} \rangle.$$

От друга страна матрицата A е симетрична, следователно

$$\langle A\bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{v}} \rangle = \bar{\mathbf{v}}^T A\bar{\mathbf{u}} = (\bar{\mathbf{v}}^T A\bar{\mathbf{u}})^T = \bar{\mathbf{u}}^T A^T \bar{\mathbf{v}}^T = \bar{\mathbf{u}}^T A\bar{\mathbf{v}} = \langle A\bar{\mathbf{v}}, \bar{\mathbf{u}} \rangle.$$

Сега изваждайки почленно двете равенства в (5.3) получаваме

$$\beta(\langle \bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{u}} \rangle + \langle \bar{\mathbf{v}}, \bar{\mathbf{v}} \rangle) = 0,$$

което показва, че $\beta = 0$, понеже ако $\langle \bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{u}} \rangle + \langle \bar{\mathbf{v}}, \bar{\mathbf{v}} \rangle = 0$, то ще следва, че $\bar{\mathbf{u}} = \bar{\mathbf{0}}$ и $\bar{\mathbf{v}} = \bar{\mathbf{0}}$, а това противоречи на изискването, че собственият вектор не е нулев. От факта, че $\beta = 0$ веднага се получава, че $A\bar{\mathbf{u}} = \alpha\bar{\mathbf{u}}$ и $A\bar{\mathbf{v}} = \alpha\bar{\mathbf{v}}$, при което поне един от двата вектора $\bar{\mathbf{u}}$ и $\bar{\mathbf{v}}$ е различен от нулевия. ■

Един базис $\bar{\mathbf{h}}_1, \bar{\mathbf{h}}_2, \dots, \bar{\mathbf{h}}_n$ се нарича **ортонормиран**, когато е **ортогонален**, т.е. базисните вектори са взаимно ортогонални,

$$\langle \bar{\mathbf{h}}_i, \bar{\mathbf{h}}_j \rangle = 0 \quad \text{за} \quad i \neq j, \quad i, j = 1, 2, \dots, n,$$

и **нормиран**, т.е. когато всичките базисни вектори имат единична дължина,

$$|\bar{\mathbf{h}}_1| = |\bar{\mathbf{h}}_2| = \dots = |\bar{\mathbf{h}}_n|.$$

В \mathbb{R}^n може да се определи ортонормиран базис, състоящ се само от собствени вектори на дадена симетрична матрица A . Това важно твърдение ще докажем за случая, когато собствените значения на матрицата са различни.

Твърдение 5.8. Нека A е реална симетрична матрица от ред n и нека нейните собствени значения са различни помежду си. Тогава в \mathbb{R}^n може да се намери ортонормиран базис от собствени вектори на A .

Доказателство. Нека реалната симетрична $(n \times n)$ матрица A има различни помежду си собствени значения $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, за които вече знаем че всичките са реални, и нека $\vec{h}_1, \vec{h}_2, \dots, \vec{h}_n$ са съответни собствени вектори. Съгласно твърдение 5.7 те са линейно независими, следователно образуват базис в \mathbf{R}^n понеже $\dim \mathbf{R}^n = n$. Сега ще покажем, че те са взаимно ортогонални помежду си. Да изберем два индекса $i \neq j$, $1 \leq i, j \leq n$. Тогава

$$\lambda_i \langle \vec{h}_i, \vec{h}_j \rangle = \langle A\vec{h}_i, \vec{h}_j \rangle = \langle \vec{h}_i, A\vec{h}_j \rangle = \lambda_j \langle \vec{h}_i, \vec{h}_j \rangle, (\lambda_i - \lambda_j) \langle \vec{h}_i, \vec{h}_j \rangle = 0,$$

следователно $\langle \vec{h}_i, \vec{h}_j \rangle = 0$, понеже $\lambda_i \neq \lambda_j$. По този начин установихме, че те образуват ортогонален базис. Сега веднага се проверява, че векторите

$$\begin{bmatrix} \vec{h}_1 \\ \vec{h}_1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \vec{h}_2 \\ \vec{h}_2 \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} \vec{h}_n \\ \vec{h}_n \end{bmatrix},$$

образуват ортонормиран базис. ■

Да подредим този ортонормиран базис в стълбове и да разгледаме така получената матрица $U = [\vec{h}_1 \vec{h}_2 \dots \vec{h}_n]$. Тогава непосредствено се проверява, че $U^T U = E_n$, което означава, че матрицата U е ортогонална.

Нека $\vec{h}_1, \vec{h}_2, \dots, \vec{h}_n$ е ортонормираният базис от собствени вектори за симетричната матрица A и нека $U = [\vec{h}_1 \vec{h}_2 \dots \vec{h}_n]$. По условие имаме $U\vec{h}_k = \lambda_k \vec{h}_k$, за всяко $k = 1, 2, \dots, n$, следователно

$$AU = U\Lambda, \text{ където } \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

По този начин доказахме частен случай на следната основна

Теорема 5.3. Нека A е реална симетрична матрица от ред n . Тогава съществува ортогонална матрица U , за която $U^T A U = \Lambda$, където Λ е диагонална матрица, по главния диагонал на която стоят собствените значения на матрицата A . ■

Теорема 5.3 е доказана строго по-горе за случая, когато собствените значения на A са различни помежду си.

Нека A е $(n \times n)$ матрица и $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbf{R}^n$ са вектори, зададени чрез техните координати в каноничния базис. Тогава

$$\langle A\vec{a}, \vec{b} \rangle = \vec{b}^T A\vec{a} \text{ и } \langle \vec{a}, A\vec{b} \rangle = (A\vec{b})^T \vec{a} = \vec{b}^T A^T \vec{a},$$

следователно винаги е налице равенството $\langle A\vec{a}, \vec{b} \rangle = \langle \vec{a}, A^T \vec{b} \rangle$. В частност, ако A е симетрична, то $\langle A\vec{a}, \vec{b} \rangle = \langle \vec{a}, A\vec{b} \rangle$.

Нека сега U е $(n \times n)$ ортогонална матрица. Тогава

$$\langle U\vec{a}, U\vec{b} \rangle = \langle \vec{a}, U^T U \vec{b} \rangle = \langle \vec{a}, E_n \vec{b} \rangle = \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle,$$

следователно преобразуването на векторите посредством ортогонална матрица запазва скаларното произведение, което е най-важното свойство на ортогоналните матрици. В частност се запазват и дължините на векторите, понеже

$$|U\vec{a}| = \sqrt{\langle U\vec{a}, U\vec{a} \rangle} = \sqrt{\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle} = |\vec{a}|.$$

4. Геометрично скалярно произведение. Скалярното произведение $\vec{a}\vec{b}$ на геометричните вектори \vec{a} и \vec{b} се определя като число, равно на произведението от техните дължини и косинуса от ъгъла между тях

$$(5.4) \quad \vec{a}\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi.$$

Скалярното произведение може да се определи и посредством *алгебричната проекция* $\text{pr}_l \vec{a}$ на вектора \vec{a} върху оста l на вектора \vec{b} (рис. 5.11).

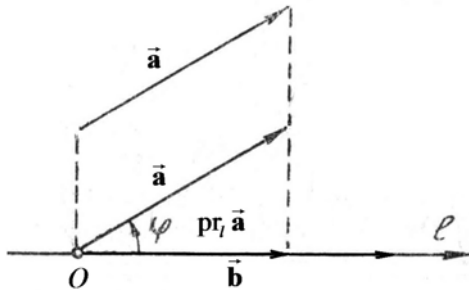


Рис. 5.11.

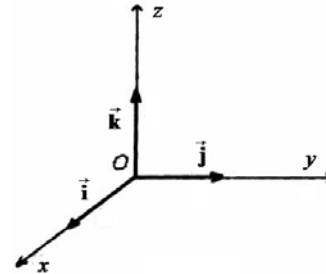


Рис. 5.12.

По определение имаме $\text{pr}_l \vec{a} = |\vec{a}|\cos\varphi$, следователно $\vec{a}\vec{b} = (\text{pr}_l \vec{a})|\vec{b}|$. По същия начин се установява, че $\vec{a}\vec{b} = (\text{pr}_l \vec{b})|\vec{a}|$ (където l е оста на вектора \vec{a}).

Непосредствено от определението на скалярно произведение чрез формулата (5.4), произтичат следните основни свойства.

- 1) $\vec{a}\vec{b} = \vec{b}\vec{a}$.
- 2) $(\vec{a}_1 + \vec{a}_2)\vec{b} = \vec{a}_1\vec{b} + \vec{a}_2\vec{b}$ и $\vec{a}(\vec{b}_1 + \vec{b}_2) = \vec{a}\vec{b}_1 + \vec{a}\vec{b}_2$.
- 3) Ако λ е число, то $(\lambda\vec{a})\vec{b} = \vec{a}(\lambda\vec{b}) = \lambda\vec{a}\vec{b}$.
- 4) $\vec{a}\vec{a} \geq 0$ и $\vec{a}\vec{a} = 0$, единствено когато $\vec{a} = \vec{0}$.

Два ненулеви геометрични вектора се наричат *ортогонални*, когато сключват прав ъгъл. По определение нулевият вектор е ортогонален на всеки друг.

- 5) $\vec{a}\vec{b} = 0$ тогава и само тогава, когато векторите \vec{a} и \vec{b} са ортогонални.
- 6) $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}\vec{a}}$, дължината на всеки вектор е равна на квадратния корен от скалярното произведение на вектора със себе си.

По нататък навсякъде ще предполагаме, че е зададена декартова координатна система $Oxyz$ с ортонормиран базис от единичните вектори \vec{i} , \vec{j} , \vec{k} . По определение $|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1$, $\vec{i} \perp \vec{j}$, $\vec{i} \perp \vec{k}$, $\vec{j} \perp \vec{k}$ (рис. 5.12). Да разгледаме векторите $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$ и $\vec{b}(b_1, b_2, b_3)$, зададени чрез техните координати в базиса \vec{i} , \vec{j} , \vec{k} , $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$ и $\vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$. Съгласно формулата (5.5) за взаимните скалярни произведения на базисните вектори намираме $\vec{i}\vec{i} = \vec{j}\vec{j} = \vec{k}\vec{k} = 1$ и $\vec{i}\vec{j} = \vec{i}\vec{k} = \vec{j}\vec{k} = 0$, следователно

$$(5.5) \quad \begin{aligned} \vec{a}\vec{b} &= (a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k})(b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}) = \\ &= a_1b_1\vec{i}\vec{i} + a_1b_2\vec{i}\vec{j} + a_1b_3\vec{i}\vec{k} + a_2b_1\vec{j}\vec{i} + a_2b_2\vec{j}\vec{j} + a_2b_3\vec{j}\vec{k} + a_3b_1\vec{k}\vec{i} + a_3b_2\vec{k}\vec{j} + a_3b_3\vec{k}\vec{k} = \\ &= a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 \end{aligned}$$

Последната формула показва, че скалярното произведение се изразява по твърде лесен начин като сума от произведенията на съответните координати в даден ортонормиран базис и по този начин обосновава предимството на такива базиси. Ако базисът не беше ортонормиран, то формулата (5.5) щеше в общия случай да съдържа девет събираеми.

Например ако са дадени векторите $\vec{a}(1,-2,3)$ и $\vec{b}(2,3,1)$, то за тяхното скалярно произведение намираме $\vec{a}\vec{b} = 1 \cdot 2 + (-2) \cdot 3 + 3 \cdot 1 = -1$.

Дължина на вектор. Съгласно формулата (5.5), за дължината на вектора $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$ намираме

$$(5.6) \quad |\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}\vec{a}} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}.$$

Да разгледаме точките $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$ са зададени чрез техните координати. Тогава за дължината на вектора $\overline{M_1M_2}(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$ получаваме

$$(5.7) \quad |\overline{M_1M_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Ъгъл между вектори. Ако $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$ и $\vec{b}(b_1, b_2, b_3)$ са два ненулеви вектора, то за ъгъла φ между тях получаваме формулата

$$(5.8) \quad \cos \varphi = \frac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}.$$

В частност векторите са ортогонални тогава и само тогава, когато $a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 0$.

Направляващи косинуси. Да разгледаме ненулевия вектор $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$. По определение базисните вектори имат следните координати, $\vec{i} = (1, 0, 0)$, $\vec{j} = (0, 1, 0)$ и $\vec{k} = (0, 0, 1)$. Нека α , β и γ са ъглите, които сключва \vec{a} със съответните базисни вектори (рис. 5.13).

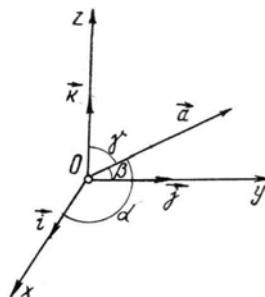


Рис. 5.13.

Тогава съгласно (5.8) намираме

$$\cos \alpha = \frac{\vec{i}\vec{a}}{|\vec{i}||\vec{a}|} = \frac{a_1}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}},$$

$$\cos \beta = \frac{\vec{j}\vec{a}}{|\vec{j}||\vec{a}|} = \frac{a_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}},$$

$$\cos \gamma = \frac{\vec{k}\vec{a}}{|\vec{k}||\vec{a}|} = \frac{a_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}},$$

откъдето веднага може да се провери, че

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1.$$

Единичен вектор. Нека $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$ е ненулев вектор. Тогава векторът \vec{n} , който се получава от вектора \vec{a} , след като го разделим на неговата дължина $|\vec{a}|$, представлява вектор, който има посоката на \vec{a} и има дължина $|\vec{n}| = 1$,

$$\vec{n} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}} = \frac{a_1}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}\vec{i} + \frac{a_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}\vec{j} + \frac{a_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}\vec{k},$$

$$(5.9) \quad \vec{n} = \left(\frac{a_1}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}, \frac{a_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}, \frac{a_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}} \right)$$

Формулите (5.5), (5.6), (5.7), (5.8), (5.9) както и формулите за направляващите косинуси се променят по очевиден начин, когато разсъжденията се провеждат в равнината. За да получим техния равнинен еквивалент е достатъчно да отстраним събираемите, които съдържат третия индекс.

5. Векторно произведение. Нека \vec{a} и \vec{b} са два вектора в пространството. Тяхното **векторно произведение** $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ винаги се определя като вектор с дължина $|\vec{c}| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\varphi$, където φ е ъгълът между тях, $0 \leq \varphi \leq \pi$. От това определение се вижда, че $\vec{a} \times \vec{b}$ е нулевият вектор тогава и само тогава, когато $|\vec{a}| = 0$ или $|\vec{b}| = 0$ или $\sin\varphi = 0$, което означава, че \vec{a} и \vec{b} са колинеарни. Нека \vec{a} и \vec{b} са неколинеарни (всеки от тях е ненулев и не са успоредни). Тогава тяхното векторно произведение се определя като единственият вектор в пространството, който притежава следните свойства (рис. 5.14).

- 1) $|\vec{c}| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\varphi$.
- 2) Векторът \vec{c} е ортогонален на \vec{a} и \vec{b} .
- 3) Векторите \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} в този ред образуват **дясна тройка**.

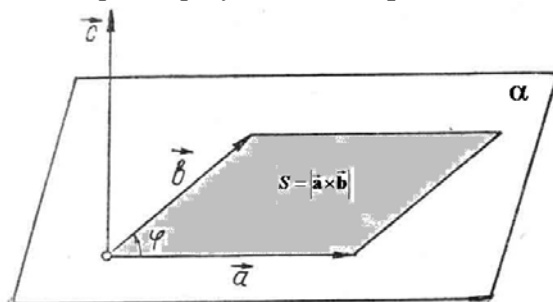


Рис. 5.15.

Ако приложим векторите \vec{a} и \vec{b} в една точка, то те определят единствена равнина α . Дължината на векторното произведение по определение е лицето на пространствения успоредник от равнината α , породен от \vec{a} и \vec{b} , освен това векторът \vec{c} е перпендикулярен на равнината α . Условието дотук определя точно два вектора, със зададена дължина и перпендикулярни на дадена равнина. Третото условие, векторите \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} в този ред да образуват дясна тройка, определя вече \vec{c} еднозначно.

Векторното произведение притежава следните основни свойства, които лесно се проверяват непосредствено от дадените определения.

- 1) $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$.
- 2) $(\vec{a}_1 + \vec{a}_2) \times \vec{b} = \vec{a}_1 \times \vec{b} + \vec{a}_2 \times \vec{b}$ и $\vec{a} \times (\vec{b}_1 + \vec{b}_2) = \vec{a} \times \vec{b}_1 + \vec{a} \times \vec{b}_2$.
- 3) Ако λ е число, то $(\lambda\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\lambda\vec{b}) = \lambda\vec{a} \times \vec{b}$.
- 4) $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$, единствено когато \vec{a} и \vec{b} са колинеарни.

Да разгледаме векторите $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$ и $\vec{b}(b_1, b_2, b_3)$, зададени чрез техните координати в базиса \vec{i} , \vec{j} , \vec{k} , при което допълнително предполагаме, че координатната

система е положително ориентирана, което означава, че базисните вектори \vec{i} , \vec{j} , \vec{k} , взети в този ред, образуват дясна тройка. Да намерим векторното произведение $\vec{i} \times \vec{j}$.

По определение $\vec{i} \times \vec{j}$ е единственият вектор с дължина $|\vec{i}||\vec{j}|\sin\frac{\pi}{2}=1$, който е

ортогонален едновременно на \vec{i} и \vec{j} , следователно $\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$. Аналогично се установява, че взаимните векторни произведения на тези вектори имат вида

$$\begin{aligned}\vec{i} \times \vec{i} &= \vec{0}, \quad \vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}, \quad \vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j}, \\ \vec{j} \times \vec{i} &= -\vec{k}, \quad \vec{j} \times \vec{j} = \vec{0}, \quad \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}, \\ \vec{k} \times \vec{i} &= \vec{j}, \quad \vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i}, \quad \vec{k} \times \vec{k} = \vec{0}.\end{aligned}$$

Горната таблица може да се запомни по следния начин. Във редицата \vec{i} , \vec{j} , \vec{k} , \vec{i} , \vec{j} , векторното произведение на всеки два поредни вектора е равно на вектора след тях и освен това векторното произведение на всеки вектор със себе си дава нулевият вектор, а смяната местата на векторните множители променя единствено знака на произведението. Пресмятаме

$$\begin{aligned}\vec{a} \times \vec{b} &= (a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}) \times (b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}) = \\ &= a_1b_1\vec{i} \times \vec{i} + a_1b_2\vec{i} \times \vec{j} + a_1b_3\vec{i} \times \vec{k} + \\ &+ a_2b_1\vec{j} \times \vec{i} + a_2b_2\vec{j} \times \vec{j} + a_2b_3\vec{j} \times \vec{k} + \\ &+ a_3b_1\vec{k} \times \vec{i} + a_3b_2\vec{k} \times \vec{j} + a_3b_3\vec{k} \times \vec{k} = \\ &= a_1b_2\vec{k} - a_1b_3\vec{j} + \\ &- a_2b_1\vec{k} + a_2b_3\vec{i} + \\ &+ a_3b_1\vec{j} - a_3b_2\vec{i} = \\ &= (a_2b_3 - a_3b_2)\vec{i} + (a_3b_1 - a_1b_3)\vec{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\vec{k}\end{aligned}$$

По този начин векторното произведение може да се разглежда като стойността на формалната детерминанта

$$(5.10) \quad \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \vec{i} + (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \vec{j} + (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \vec{k},$$

в първия ред на която стоят базисните вектори, във втория ред стоят координатите на левия векторен множител, а в третия ред стоят координатите на десния векторен множител, която детерминанта пресмятаме по адюнгираните количества на първия ред.

Пример 5.6. За векторно произведение на векторите $\vec{a}(1,-2,3)$ и $\vec{b}(2,3,1)$ имаме

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \vec{i} + (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \vec{j} + (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \vec{k},$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = (-11)\vec{i} + 5\vec{j} + 7\vec{k}.$$

Векторното произведение може да се използва за намиране лицето на пространствен успоредник, ако са известни векторите на две негови съседни страни.

Лице на триъгълник. Нека е даден пространственият триъгълник $\Delta M_1M_2M_3$ с върхове точките $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ и $M_3(x_3, y_3, z_3)$. Тогава неговото лице е

половината от лицето на успоредника, определен от двата вектора $\vec{a} = \overrightarrow{M_1M_2}$ и $\vec{b} = \overrightarrow{M_1M_3}$. За координатите на \vec{a} и \vec{b} имаме

$$\vec{a} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1) \text{ и } \vec{b} = (x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1),$$

следователно

$$S_{\Delta M_1 M_2 M_3} = \frac{1}{2} |\vec{a} \times \vec{b}| = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix},$$

откъдето за търсеното лице намираме формулата

$$(5.11) \quad S_{\Delta M_1 M_2 M_3} = \frac{1}{2} \sqrt{\begin{vmatrix} y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}^2}.$$

Да разгледаме сега равнинния триъгълник $\Delta M_1 M_2 M_3$ с върхове точките $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$ и $M_3(x_3, y_3)$, зададени чрез своите координати в декартовата координатна система Oxy с ортонормиран базис \vec{i} и \vec{j} . Тази равнина можем да разглеждаме като координатна равнина Oxy в пространствената декартова координатна система $Oxyz$ с ортонормиран базис \vec{i} , \vec{j} и \vec{k} , при което върховете на триъгълника ще имат координати $M_1(x_1, y_1, 0)$, $M_2(x_2, y_2, 0)$ и $M_3(x_3, y_3, 0)$. Сега от (5.11), за лицето на триъгълника получаваме формулата

$$(5.12) \quad S_{\Delta M_1 M_2 M_3} = \frac{1}{2} \sqrt{\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}^2} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}.$$

6. Смесено произведение. *Смесено произведение* $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ на трите пространствени вектора \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} се нарича числото, което се получава от скаларното произведение на вектора $\vec{a} \times \vec{b}$ с вектора \vec{c}

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}.$$

Да разгледаме векторите $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b}(b_1, b_2, b_3)$ и $\vec{c}(c_1, c_2, c_3)$, зададени чрез техните координати в базиса \vec{i} , \vec{j} , \vec{k} (координатната система се предполага положително ориентирана). Съгласно формулата (5.10) и правилото за пресмятане на скаларно произведение на вектори с известни координати (в ортонормиран базис), за смесеното произведение намираме

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \cdot \vec{c} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} c_1 + (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} c_2 + (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} c_3,$$

следователно смесеното произведение се изчислява като сбор на произведенията на адюнгираните количества на първия ред с координатите на вектора \vec{c} , от което веднага следва, че смесеното произведение е стойността на детерминантата

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix},$$

което може да се запише по естествен начин като

$$(5.13) \quad (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

От (5.13) следват всичките основни свойства на смесеното произведение.

- 1) Ако сменим местата на два вектора в смесеното произведение, то се променя единствено знака. Например $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = -(\vec{b}, \vec{a}, \vec{c})$ и т.н.
- 2) $(\lambda \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a}, \lambda \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a}, \vec{b}, \lambda \vec{c}) = \lambda (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$.
- 3) $(\vec{a}_1 + \vec{a}_2, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a}_1, \vec{b}, \vec{c}) + (\vec{a}_2, \vec{b}, \vec{c})$.

Твърдение 5.9. Стойността на смесеното произведение $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ е нула тогава и само тогава, когато векторите \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} са компланарни (линейно зависими).

Доказателство. От формулата (5.13) следва, че $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = 0$ тогава и само тогава, когато детерминантата

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0,$$

което от своя страна е налице тогава и само тогава, когато между редовете на тази детерминанта има линейна зависимост. Но всяка линейна зависимост между редовете на детерминанта задава същата линейна зависимост между векторите \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} . ■

Геометрична интерпретация на смесено произведение. Да приложим векторите \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} в една точка O , както е показано на рисунка 5.15 и да разгледаме паралелепипеда, построен върху тези вектори.

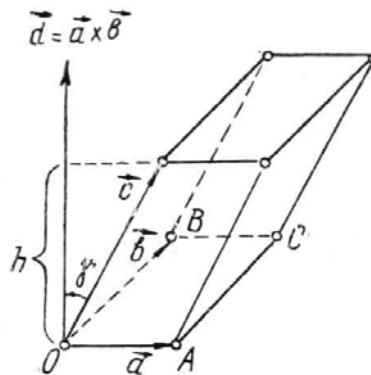


Рис. 5.15.

Да положим $\vec{d} = \vec{a} \times \vec{b}$. Тогава за обема на паралелепипеда знаем формулата $V = S_{OABC} h$, където h е неговата височина, която е равна на абсолютната стойност на алгебричната проекция на вектора \vec{c} върху оста на вектора \vec{d} . По тази причина $h = \|\vec{c}\| \cos \gamma$, където γ е ъгълът между векторите \vec{c} и \vec{d} , $0 \leq \gamma \leq \pi$. Следователно за обема на паралелепипеда получаваме $V = \|\vec{a} \times \vec{b}\| \|\vec{c}\| \cos \gamma$, което според геометричното определение за скалярно произведение представлява абсолютната стойност на скалярното произведение на векторите $\vec{a} \times \vec{b}$ и \vec{c} , откъдето, въз основа на геометричното определение за смесено произведение намираме, че търсеният обем се изразява посредством формулата

$$(5.14) \quad V = |(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})|.$$

Понякога е удобно да се говори за **ориентиран обем** на паралелепипед, построен върху векторите \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} , който се определя като стойността на смесеното произведение $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$.

Обем на тетраедър. Да разгледаме тетраедъра с върхове $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$ и $M_4(x_4, y_4, z_4)$. Неговият обем е една шеста част от обема на съответния паралелепипед, построен върху векторите

$$\vec{a} = \overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1),$$

$$\vec{b} = \overrightarrow{M_1M_3} = (x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1),$$

$$\vec{c} = \overrightarrow{M_1M_4} = (x_4 - x_1, y_4 - y_1, z_4 - z_1).$$

Сега от формулата (5.14) за обем на паралелепипед намираме

$$V_{M_1M_2M_3M_4} = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & z_4 - z_1 \end{vmatrix}.$$