Лекция 11

§11. Определен интеграл.

1. Дефиниция на интеграла чрез интегрални суми. Определеният интеграл е фундаментално средство в математиката с разнообразни и съдържателни приложения. Той се използва за пресмятане на геометрични и физични величини.

Интегрално деление τ на интервала $[a,b]$, $a<b$, се нарича системата от точки $\tau=\{x_k\}_{k=0}^n$, за която $a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$. Диаметър на делението τ наричаме числото $d(\tau)=\max\limits_{1\le k\le n}\Delta x_k$, където $\Delta x_k=x_k-x_{k-1}$, $k=1,2,\dots,n$. Ако диаметърът на делението намалява, то броят на точките на делението нараства. Когато $\tau_1\subseteq\tau_2$, се казва, че делението τ_2 следва делението τ_1. Да отбележим, че за всеки две деления τ_1 и τ_2, делението $\tau_3=\tau_1\cup\tau_2$ следва τ_1 и τ_2.

Нека функцията $f(x):[a,b]\to\mathrm{R}$ е ограничена и да положим $m=\inf\limits_{a\le x\le b}f(x)$ и $M=\sup\limits_{a\le x\le b}f(x)$. Имаме $m\le f(x)\le M$, за всяко $x\in[a,b]$, при което константите m и M са избрани по оптималния възможен начин. Да положим

$$m_k=\inf_{x\in[x_{k-1},x_k]}f(x) \text{ и } M_k=\sup_{x\in[x_{k-1},x_k]}f(x).$$

Очевидно $m\le m_k\le M_k\le M$, $k=1,2,\dots,n$. От всеки интервал $[x_{k-1},x_k]$, $k=1,2,\dots,n$, да изберем по произволен начин някакво число ξ_k. Тогава сумите

$$s(f,\tau)=\sum_{k=1}^n m_k\Delta x_k \text{ и } S(f,\tau)=\sum_{k=1}^n M_k\Delta x_k$$

се наричат съответно ***долна и горна сума на Дарбу*** за функцията $f(x)$, образувани по делението τ, а сумата

$$r(f,\tau)=\sum_{k=1}^n f(\xi_k)\Delta x_k$$

се нарича ***интегрална сума на Риман***. Интегралната сума на Риман зависи от избора на междинните точки ξ_k, $k=1,2,\dots,n$, по начин, който не е съществен за нейното използване и затова тази зависимост не е отбелязана в означението.

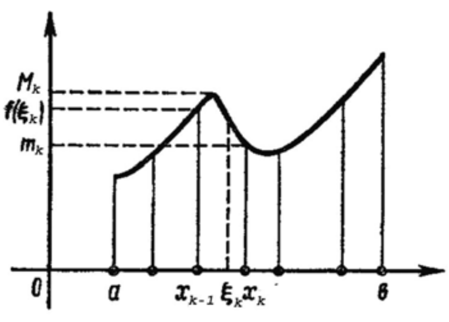

Рис. 11.1.

Пример 11.1. Да разгледаме функцията $f(x)=x^2$ в интервала $[a,b]=[0,1]$ и да изберем ***равномерно*** разделяне посредством точките $x_k=\dfrac{k}{n}$, $k=0,1,\dots,n$. Понеже $f(x)$

е монотонно растяща, то $m_k = \left(\frac{k-1}{n}\right)^2$ и $M_k = \left(\frac{k}{n}\right)^2$, $k = 1,2,\ldots,n$, следователно за разделянето $\tau = \left\{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}, 1\right\}$ имаме

$$s(f,\tau) = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k-1}{n}\right)^2 \frac{1}{n} \text{ и } S(f,\tau) = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^2 \frac{1}{n},$$

понеже $\Delta x_k = x_k - x_{k-1} = \frac{1}{n}$, $k = 1,2,\ldots,n$. Ако изберем точките ξ_k среди на съответните интервали,

$$\xi_k = \frac{1}{2}(x_{k-1} + x_k) = \frac{1}{2}\left(\frac{k-1}{n} + \frac{k}{n}\right) = \frac{k}{n} - \frac{1}{2n},$$

то ще получим една риманова сума във вида

$$r(f,\tau) = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n} - \frac{1}{2n}\right)^2 \frac{1}{n}.$$

Твърдение 11.1. Интегралните суми имат следните свойства.

1) За всяко деление τ е изпълнено

$$m(b-a) \le s(f,\tau) \le r(f,\tau) \le S(f,\tau) \le M(b-a).$$

2) Ако $\tau_1 \subseteq \tau_2$, то $S(f,\tau_2) \le S(f,\tau_1)$ и $s(f,\tau_1) \le s(f,\tau_2)$, т.е. с увеличаване броя на точките на деление горните суми намаляват (не нарастват), а долните суми се увеличават (не намаляват).

3) За всеки две деления τ_1 и τ_2 е в сила неравенството

$$s(f,\tau_1) \le S(f,\tau_2),$$

което означава, че всяка долна сума не надвишава всяка горна сума.

Доказателство. **1**) За всяко $k = 1,2,\ldots,n$ имаме $m \le m_k \le \xi_k \le M_k \le M$, от което след умножаване с положителното число $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ получаваме

$$m\Delta x_k \le m_k \Delta x_k \le f(\xi_k)\Delta x_k \le M_k \Delta x_k \le M\Delta x_k,$$

откъдето след сумиране по всички $k = 1,2,\ldots,n$ получаваме

$$m\sum_{k=1}^{n} \Delta x_k \le \sum_{k=1}^{n} m_k \Delta x_k \le \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k \le \sum_{k=1}^{n} M_k \Delta x_k \le M\sum_{k=1}^{n} \Delta x_k,$$

което доказва серията от неравенства, понеже $\sum_{k=1}^{n} \Delta x_k = b - a$.

2) Ще докажем само неравенството $S(f,\tau_2) \le S(f,\tau_1)$, понеже другото неравенство $s(f,\tau_1) \le s(f,\tau_2)$ се доказва аналогично. Да предположим отначало, че делението τ_2 съдържа само една точка повече от делението τ_1, $\tau_2 = \tau_2 \cup \{\xi\}$, и нека тази точка ξ е от интервала (x_{j-1}, x_j), за някой индекс j, $1 \le j \le n$. Нека $M'_j = \sup\limits_{x_{j-1} \le x \le \xi} f(x)$ и $M''_j = \sup\limits_{\xi \le x \le x_j} f(x)$. От друга страна сумите $S(f,\tau_1)$ и $S(f,\tau_2)$ се различават само над интервала $[x_{j-1}, x_j]$, следователно

$$S(f,\tau_1) - S(f,\tau_2) = M_j(x_j - x_{j-1}) - M'_j(\xi - x_{j-1}) - M''_j(x_j - \xi).$$

Сумата в дясната страна няма да нарасне, ако заменим $M'_j(\xi - x_{j-1})$ с $M_j(\xi - x_{j-1})$ и $M''_j(\xi - x_{j-1})$ с $M_j(x_j - \xi)$, понеже $M'_j \le M_j$ и $M''_j \le M_j$. По този начин намираме

$$S(f,\tau_1) - S(f,\tau_2) \ge M_j(x_j - x_{j-1}) - M_j(\xi - x_{j-1}) - M_j(x_j - \xi) =$$
$$= M_j[(x_j - x_{j-1}) - (\xi - x_{j-1}) - (x_j - \xi)] = 0$$

т.е. $S(f,\tau_1) \ge S(f,\tau_2)$. Да предположим сега, че $\tau_2 = \tau_1 \cup \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_p\}$. Прилагайки последователно доказаното неравенство, когато деленията се различават само с една точка получаваме

$$S(f,\tau_1) \ge S(f,\tau_1 \cup \{\xi_1\}) \ge S(f,\tau_1 \cup \{\xi_1,\xi_2\}) \ge \dots \ge S(f,\tau_1 \cup \{\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_p\}) = S(f,\tau_2).$$

3) Да образуваме делението $\tau_3 = \tau_1 \cup \tau_2$. Тогава $\tau_1 \subseteq \tau_3$ и $\tau_2 \subseteq \tau_3$, следователно според предишните точки имаме $s(f,\tau_1) \le s(f,\tau_3) \le S(f,\tau_3) \le S(f,\tau_2)$. ■

На следващата рисунка 11.2 е дадена геометричната интерпретация на сумите на Дарбу при $f(x) \ge 0$, $x \in [a,b]$.

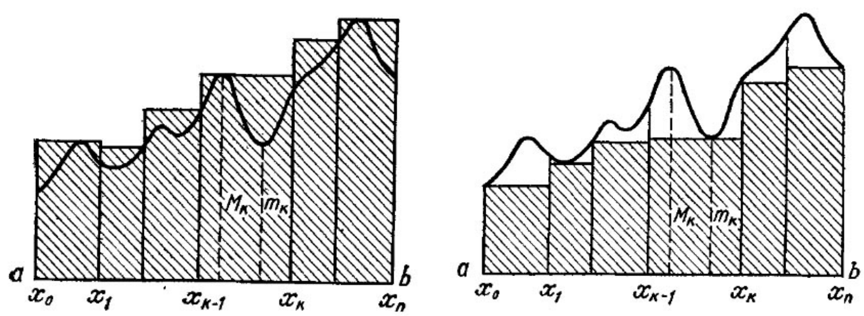

Рис. 11.2

Нека π_k и Π_k, $k = 1,2,\dots,n$, са правоъгълниците с основа интервала $[x_{k-1}, x_k]$ и височини съответно m_k и M_k. От рис. 11.2 се вижда, че $s(f,\tau)$ е сборът от лицата на правоъгълниците π_k, а $S(f,\tau)$ е сборът от лицата на правоъгълниците Π_k, $k = 1,2,\dots,n$. Нека A е криволинейният трапец, образуван от оста Ox, графиката на функцията $f(x)$ и вертикалните линии през точките $x = a$ и $x = b$. Да предположим, че фигурата A има лице и да означим това лице с $\mu(A)$ (мярка на A). Тогава за всяко деление τ е изпълнено неравенството $s(f,\tau) \le \mu(A) \le S(f,\tau)$ и по-общо, за всеки две деления τ_1 и τ_2 е изпълнено неравенството

(11.1) $s(f,\tau_1) \le \mu(A) \le S(f,\tau_2)$,

което е в основата на геометричната интерпретация на определения интеграл, която ще дадем по-надолу в тази лекция.

Точната горна граница на всичките долни суми на Дарбу се нарича ***долен интеграл на Дарбу*** и се бележи с

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx = \sup_\tau s(f,\tau),$$

а точната долна граница на всичките горни суми на Дарбу се нарича ***горен интеграл на Дарбу*** и се бележи с

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx = \inf_\tau S(f,\tau).$$

От теоремата за отделимост и от точка 3) на твърдение 11.1 следва, че за всяка ограничена функция $f(x): [a,b] \to \mathbb{R}$ е изпълнено

(11.2) $\underline{\int_a^b} f(x)dx \le \overline{\int_a^b} f(x)dx$.

С други думи, долният и горният интеграл на Дарбу са винаги определени, при което между тях е валидно неравенството (11.2). Сега можем да препишем неравенството (11.1) във вида

(11.3) $\underline{\int_a^b} f(x)dx \le \mu(A) \le \overline{\int_a^b} f(x)dx$.

Неравенството (11.2) може да се изкаже и по следния начин: между всичките долни суми и всичките горни суми има поне едно число, което ги разделя. Това твърдение е геометрично очевидно съгласно (11.3), което не бива да се схваща като точно разсъждение, понеже в (11.3) не разполагаме с определение за лице на A . Можем обаче да кажем, че каквото и число $\mu(A)$ да наречем лице на криволинейния трапец A , за него трябва да бъде изпълнено неравенството (11.3).

Определение 11.1. Казва се, че ограничената функция $f(x):[a,b]\to\mathsf{R}$ е интегруема по Риман (в риманов смисъл) в интервала $[a,b]$, когато долният и горният интеграл на Дарбу са равни. В този случай тяхната обща стойност се нарича определен (Риманов) интеграл на функцията $f(x)$ в интервала $[a,b]$ и се бележи с

$$\int_a^b f(x)dx\,, \quad \left(\int_a^b f(x)dx = \underline{\int_a^b} f(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx\right).$$

Пример 11.2. Ако $f(x)$ е константа, $f(x)=C$, то всяка долна и всяка горна сума на Дарбу имат една и съща стойност $C(b-a)$. Последното означава, че долният и горният интеграл на Дарбу имат една и съща стойност

$$\underline{\int_a^b} Cdx = \overline{\int_a^b} Cdx = C(b-a),$$

следователно константата $f(x)=C$ е интегруема функция, при което

$$\int_a^b f(x)dx = C(b-a).$$

2. Необходими и достатъчни условия за интегруемост. Оказва се, че класът на интегруемите функции е достатъчно широк. Преди всичко ще формулираме

Теорема 11.1. Ограничената функция $f(x):[a,b]\to\mathsf{R}$ е интегруема в интервала $[a,b]$ тогава и само тогава, когато за всяко $\varepsilon>0$ може са се намери интегрално деление τ , за което $S(f,\tau)-s(f,\tau)<\varepsilon$.

Доказателство. **1**) Нека $\varepsilon>0$ и τ е деление, за което $S(f,\tau)-s(f,\tau)<\varepsilon$. От определенията следва, че за всяко деление τ е в сила

(11.4) $s(f,\tau) \le \underline{\int_a^b} f(x)dx \le \overline{\int_a^b} f(x)dx \le S(f,\tau)$.

Тогава

$$0 \le \overline{\int_a^b} f(x)dx - \underline{\int_a^b} f(x)dx \le S(f,\tau)-s(f,\tau) < \varepsilon\,,$$

следователно

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx\,,$$

понеже ε можем да избираме произволно малко.

2) Да предположим сега, че функцията $f(x)$ е интегруема в интервала $[a,b]$ и нека $\varepsilon > 0$. Съгласно определенията за долен и горен интеграл, понеже числото $\underline{\int_a^b} f(x) - \dfrac{\varepsilon}{2}$ не е горна граница за долните суми на Дарбу и числото $\overline{\int_a^b} f(x) + \dfrac{\varepsilon}{2}$ не е долна граница за горните суми на Дарбу, могат да се намерят деления τ_1 и τ_2 такива, че

$$\int_a^b f(x)dx - \frac{\varepsilon}{2} = \underline{\int_a^b} f(x)dx - \frac{\varepsilon}{2} < s(f,\tau_1) \le \underline{\int_a^b} f(x)dx = \int_a^b f(x)dx\,,$$

$$\int_a^b f(x)dx + \frac{\varepsilon}{2} = \overline{\int_a^b} f(x)dx + \frac{\varepsilon}{2} > S(f,\tau_2) \ge \overline{\int_a^b} f(x)dx = \int_a^b f(x)dx\,.$$

Нека $\tau_3 = \tau_1 \bigcup \tau_2$. Тогава съгласно свойствата на сумите на Дарбу и последните две съотношения имаме

$$\int_a^b f(x)dx - \frac{\varepsilon}{2} < s(f,\tau_1) \le s(f,\tau_3) \le \int_a^b f(x)dx \le S(f,\tau_3) \le S(f,\tau_2) < \int_a^b f(x)dx + \frac{\varepsilon}{2}\,,$$

следователно $S(f,\tau) - s(f,\tau) < \varepsilon$. ■

С помощта на теорема 11.1 ще докажем следното

Твърдение 11.2. Всяка непрекъсната функция е интегруема и всяка монотонна функция е интегруема.

Доказателство. 1) Нека функцията $f(x)$ е непрекъсната в интервала $[a,b]$ $(a < b)$. Тогава тя е ограничена и равномерно непрекъсната. Нека $\varepsilon > 0$. Тогава от равномерната непрекъснатост следва съществуването на $\delta > 0$ такова, че $|f(x_1) - f(x_2)| < \dfrac{\varepsilon}{b-a}$, когато $|x_1 - x_2| < \delta$. Нека делението τ е избрано с единственото изискване $d(\tau) < \delta$. Да разгледаме разликата

$$(11.5)\quad S(f,\tau) - s(f,\tau) = \sum_{k=1}^{n} (M_k - m_k)\Delta x_k\,.$$

Понеже $f(x)$ е непрекъсната, тя достига най-голямата и най-малката си стойности във всеки интервал $[x_{k-1}, x_k]$, $k = 1,2,\ldots,n$, следователно $M_k = f(\xi_k)$ и $m = f(\eta_k)$ за някои $\xi_k, \eta_k \in [x_{k-1}, x_k]$. Тогава

$$M_k - m_k = |f(\xi_k) - f(\eta_k)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$$

и от (11.5) следва, че при този избор на делението τ имаме

$$S(f,\tau) - s(f,\tau) \le \sum_{k=1}^{n} \frac{\varepsilon}{b-a}\Delta x_k = \frac{\varepsilon}{b-a}\sum_{k=1}^{n}\Delta x_k = \frac{\varepsilon}{b-a}(b-a) = \varepsilon\,,$$

което съгласно теорема 11.1 доказва интегруемостта на непрекъснатата функция $f(x)$.

2) Нека функцията $f(x)$ е монотонна в интервала $[a,b]$. За определеност да предположим, че $f(x)$ е монотонно растяща и не е константа, $f(b) > f(a)$. Да изберем едно $\varepsilon > 0$ и нека деленето τ е избрано с единственото изискване $d(\tau) < \dfrac{\varepsilon}{f(b) - f(a)}$. Да разгледаме отново разликата (11.5). Тук имаме $M_k = f(x_k)$ и $m_k = f(x_{k-1})$, $k = 1,2,\ldots,n$, и (11.5) приема вида

$$S(f,\tau) - s(f,\tau) = \sum_{k=1}^{n}[f(x_k) - f(x_{k-1})]\Delta x_k \,,$$

откъдето оценяваме

$$S(f,\tau) - s(f,\tau) \le \sum_{k=1}^{n}[f(x_k) - f(x_{k-1})]\frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)} = \frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}\sum_{k=1}^{n}[f(x_k) - f(x_{k-1})] = \varepsilon\,,$$

което доказва интегруемостта на $f(x)$. Случаят, когато $f(x)$ е монотонно намаляваща се разглежда аналогично. ■

Може да се докаже, че ако една ограничена функция $f(x):[a,b]\to \mathrm{R}$ е непрекъсната с изключение евентуално на краен брой точки, то тя е интегруема.

Следващият пример показва, че има функции, които не са интегруеми.

Пример 11.3. Нека $f(x)$ е определена в интервала $[0,1]$ по следния начин: $f(x) = 0$, ако x е рационално число и $f(x) = 1$, ако x е ирационално число. Във всеки отворен интервал има както безбройно много рационални числа, така и безбройно много ирационални числа, следователно, за всяка долна и горна сума на Дарбу имаме

$$s(f,\tau) = \sum_{k=1}^{n} 0\Delta x_k = 0\,,\quad S(f,\tau) = \sum_{k=1}^{n} 1\Delta x_k = 1\,.$$

По тази причина

$$\underline{\int_0^1} f(x)dx = 0 < 1 = \overline{\int_0^1} f(x)dx$$

и така определената функция не е интегруема.

Доказаното твърдение 11.2 съдържа нещо повече, понеже и в двата случая интегралът се получава като граница на интегралните суми, когато диаметърът на делението клони към нула, т.е. за всяко $\varepsilon > 0$ съществува δ такова, че $S(f,\tau) - s(f,\tau) < \varepsilon$, винаги когато $d(\tau) < \delta$, откъдето следва, че

$$\int_a^b f(x)dx \le S(f,\tau) < \int_a^b f(x)dx + \varepsilon \text{ и } \int_a^b f(x)dx \ge s(f,\tau) > \int_a^b f(x)dx - \varepsilon\,.$$

Последното може да запише по следния начин

$$\lim_{d(\tau)\to 0} S(f,\tau) = \lim_{d(\tau)\to 0} s(f,\tau) = \int_a^b f(x)dx\,,$$

което по същество е частен случай на следната теорема на Дарбу.

Теорема 11.2. За всяка ограничена функция $f(x):[a,b]\to \mathrm{R}$ е изпълнено

$$\lim_{d(\tau)\to 0} s(f,\tau) = \underline{\int_a^b} f(x)dx \text{ и } \lim_{d(\tau)\to 0} S(f,\tau) = \overline{\int_a^b} f(x)dx\,,$$

т.е. долният и горният интеграл на Дарбу се явяват граници съответно на долните и горните суми на Дарбу, когато диаметърът на делението клони към нула. ■

От теоремата на Дарбу и от неравенството за интегралните суми

$$s(f,\tau) \le r(f,\tau) \le S(f,\tau)$$

следва верността на

Твърдение 11.3. Нека ограничената функция $f(x)$ е интегруема в интервала $[a,b]$. Тогава

$$(11.6)\quad \int_a^b f(x)dx = \lim_{d(\tau)\to 0} r(f,\tau),$$

т.е. интегралът се явява граница на римановите интегрални суми, когато диаметърът на делението клони към нула. ■

Пример 11.4. Да разгледаме функцията $f(x)=x^2$ в интервала $[a,b]=[0,1]$ и да изберем ***равномерно*** разделяне посредством точките $x_k = \frac{k}{n}$, $k=0,1,\dots,n$, и да изберем ξ_k да бъдат десните краища на съответните интервали, $\xi_k = \frac{k}{n}$, $k=1,2,\dots,n$. Тогава римановата сума има вида

$$r(f,\tau)=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^2\frac{1}{n}=\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n}k^2 ,$$

която въз основа на известното равенство

$$\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}=\frac{2n^3+3n^2+n}{6}$$

приема вида

$$r(f,\tau)=\frac{1}{n^3}\frac{2n^3+3n^2+n}{6}=\frac{1}{6}\left(2+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}\right).$$

При равномерно разделяне интегралният граничен преход $d(\tau)\to 0$ означава $n\to\infty$, откъдето непосредствено намираме

$$\int_0^1 x^2dx=\lim_{d(\tau)\to 0} r(f,\tau)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{6}\left(2+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}\right)=\frac{1}{3}.$$

Да отбележим, че твърдение 11.3 е доказано строго, за случая когато функцията $f(x)$ е непрекъсната или монотонна. Съдържанието на това твърдение може да послужи за отправна точка за въвеждане на римановия интеграл. Функцията $f(x)$ се определя като интегруема в интервала $[a,b]$, когато съществува границата $\lim_{d(\tau)\to 0} r(f,\tau)$, която е и стойността на интеграла. Ние предпочетохме друг подход, който изяснява повече структурни връзки в схемата на въвеждане на интеграла.

Преминаването от интегрални суми на Риман към определен интеграл във формулата (11.6) ще наричаме ***интегрален граничен преход***. Този преход лежи в основата на получаване на различните приложения на определения интеграл. Формулата (11.6) открива възможност за доказване някои свойства на интеграла по следната схема. Свойството се доказва отначало за интегралните суми, след което се получава за интеграла, след интегрален граничен преход.

3. Геометрична интерпретация на определения интеграл. Нека $f(x)\ge 0$, $x\in[a,b]$. Както вече отбелязахме, при разумно определение на лице $\mu(A)$ на криволинейния трапец A, образуван от оста Ox, графиката на $f(x)$ и двете вертикални прави през точките $x=a$ и $x=b$ (Рис. 11.3), ще бъде изпълнено неравенството (11.3). Следователно, ако $f(x)$ е интегруема в интрвала $[a,b]$, то (11.3) приема вида

$$\int_a^b f(x)dx \le \mu(A) \le \int_a^b f(x)dx ,$$

което означава, че по необходимост лицето на криволинейния трапец A се определя от формулата

(11.7) $$\mu(A) = \int_a^b f(x)dx .$$

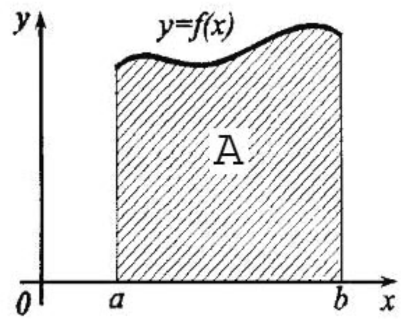

Рис. 11.3.

Когато функцията $f(x)$ си сменя знака в интервала $[a,b]$, лицата на участъците, където $f(x)$ е отрицателна се изваждат

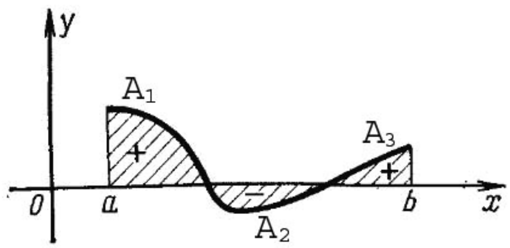

Рис. 11.4.

и например за изобразения на рисунка 11.4 случай имаме

$$\int_a^b f(x)dx = \mu(A_1) - \mu(A_2) + \mu(A_3).$$

4. Свойства на интеграла. Повечето свойства на интеграла се получават почти непосредствено от съотношението

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{d(\tau)\to 0} r(f,\tau),$$

което е валидно за всяка интегруема функция $f(x)$ (и при нас е доказано строго за случая на непрекъсната или монотонна функция). По нататък, когато се налага, за интегралните суми ще използваме означенията $s(f,\tau;[a,b])$, $S(f,\tau;[a,b])$ и $r(f,\tau;[a,b])$ за да поясним за кой интервал се отнася интегралното деление.

Свойство 1. Нека функцията $f(x)$ е интегруема в интервала $[a,b]$. Тогава $f(x)$ е интегруема във всеки подинтервал $[a_1,b_1] \subseteq [a,b]$.

Доказателство. Нека $\varepsilon > 0$ и τ_1 е такова деление на интервала $[a,b]$, за което $S(f,\tau_1;[a,b]) - s(f,\tau_1;[a,b]) < \varepsilon$. Да положим $\tau = \tau_1 \cup \{a_1,b_1\}$. Тогава

$$S(f,\tau;[a,b])-s(f,\tau;[a,b])=[S(f,\tau;[a,a_1])-s(f,\tau;[a,a_1])]+$$
$$+[S(f,\tau;[a_1,b_1])-s(f,\tau;[a_1,b_1])]+$$
$$+S(f,\tau;[b_1,b])-s(f,\tau;[b_1,b])$$

следователно $S(f,\tau;[a_1,b_1])-s(f,\tau;[a_1,b_1])<\varepsilon$, понеже

$$S(f,\tau;[a,a_1])-s(f,\tau;[a,a_1])\geq 0 \text{ и } S(f,\tau;[b_1,b])-s(f,\tau;[b_1,b])\geq 0 . \blacksquare$$

Свойство 2 (***адитивност на интеграла***). Нека $a<c<b$ и функцията $f(x)$ е интегруема в интервалите $[a,c]$ и $[c,b]$. Тогава $f(x)$ е интегруема в интервала $[a,b]$, при което

(11.8) $$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx .$$

Доказателство. Нека $\varepsilon>0$. Функцията $f(x)$ е интегруема в $[a,c]$ следователно съществува деление τ_1 на интервала $[a,c]$ и деление τ_2 на интервала $[c,b]$, за които

$$S(f,\tau_1;[a,c])-s(f,\tau_1;[a,c])<\frac{\varepsilon}{2} \text{ и } S(f,\tau_2;[c,b])-s(f,\tau_2;[c,b])<\frac{\varepsilon}{2} .$$

Да положим $\tau=\tau_1\cup\tau_2$. Тогава τ се явява деление на интервала $[a,b]$, за което

$$S(f,\tau;[a,b])-s(f,\tau;[a,b])=$$
$$=S(f,\tau;[a,c])-s(f,\tau;[a,c])+S(f,\tau;[c,b])-s(f,\tau;[c,b])<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

което доказва, че $f(x)$ е интегруема в интервала $[a,b]$. По-нататък в това доказателство ще разглеждаме само деления на интервала $[a,b]$, които съдържат точката c. Това не се явява ограничение за следващото разсъждение, понеже ще правим интегрален граничен преход по $d(\tau)\to 0$, а добавянето на нова точка към делението не увеличава неговия диаметър. Имаме

$$r(f,\tau;[a,b])=r(f,\tau;[a,c])+r(f,\tau;[c,b]),$$

откъдето след интегрален граничен преход (граничен преход при $d(\tau)\to 0$) получаваме равенството (11.8), понеже всяка от сумите в последното равенство след граничния преход преминава в съответния интеграл. ■

Непосредствено се вижда, че адитивното свойство може да бъде обобщено за случая на повече междинни точки. Например, ако $a<c<d<b$, то

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^d f(x)dx+\int_d^b f(x)dx \text{ и т.н.}$$

Свойство 3. Нека $f(x)$ е интегруема в интервала $[a,b]$ и λ е константа. Тогава функцията $\lambda f(x)$ също е интегруема в $[a,b]$, при което

(11.9) $$\int_a^b \lambda f(x)dx=\lambda\int_a^b f(x)dx .$$

Доказателство. Да разгледаме случая $\lambda>0$. Нека $\varepsilon>0$. От интегруемостта на $f(x)$ следва, че съществува деление τ на интервала $[a,b]$, за което $S(f,\tau)-s(f,\tau)<\frac{\varepsilon}{\lambda}$.

От друга страна лесно се установява, че $S(\lambda f,\tau)=\lambda S(f,\tau)$ и $s(\lambda f,\tau)=\lambda s(f,\tau)$. Тогава

$$S(\lambda f,\tau)-s(\lambda f,\tau)=\lambda S(f,\tau)-\lambda s(f,\tau)=\lambda[S(f,\tau)-s(f,\tau)]<\lambda\frac{\varepsilon}{\lambda}=\varepsilon ,$$

което показва, че функцията $\lambda f(x)$ е интегруема в интервала $[a,b]$. Сега от равенството $r(\lambda f,\tau)=\lambda r(f,\tau)$ след интегрален граничен преход получаваме формулата (11.2), понеже

$$\lim_{d(\tau)\to 0} r(\lambda f,\tau)=\int_a^b \lambda f(x)dx \text{ и } \lim_{d(\tau)\to 0} r(f,\tau)=\int_a^b f(x)dx .$$

Ако $\lambda<0$, $S(\lambda f,\tau)=\lambda s(f,\tau)$ и $s(\lambda f,\tau)=\lambda S(f,\tau)$. В този случай, за да докажем интегруемостта на функцията $\lambda f(x)$, избираме деление τ, за което $S(f,\tau)-s(f,\tau)<\frac{\varepsilon}{|\lambda|}$, след което разсъждението продължава по същия начин. ■

Свойство 4. Нека функциите $f(x)$ и $g(x)$ са интегруеми в интервала $[a,b]$. Тогава функцията $f(x)+g(x)$ също е интегруема в интервала $[a,b]$, при което

$$(11.10)\quad \int_a^b [f(x)+g(x)]dx=\int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx .$$

Доказателство. Да изберем $\varepsilon>0$. Понеже $f(x)$ и $g(x)$ са интегруеми, съществуват деления τ_1 и τ_2 на интервала $[a,b]$ такива, че $S(f,\tau_1)-s(f,\tau_1)<\frac{\varepsilon}{2}$ и $S(g,\tau_2)-s(g,\tau_2)<\frac{\varepsilon}{2}$. Да положим $\tau=\tau_1\cup\tau_2$. Тогава

$$S(f,\tau)-s(f,\tau)\le S(f,\tau_1)-s(f,\tau_1)<\frac{\varepsilon}{2},$$

$$S(g,\tau)-s(g,\tau)\le S(g,\tau_2)-s(g,\tau_2)<\frac{\varepsilon}{2}.$$

От друга страна може да се докаже, че за всяко множество Δ, където $f(x)$ е определена и ограничена са в сила неравенствата

$$\sup_{x\in\Delta}[f(x)+g(x)]\le \sup_{x\in\Delta} f(x)+\sup_{x\in\Delta} g(x),$$

$$\inf_{x\in\Delta}[f(x)+g(x)]\ge \inf_{x\in\Delta} f(x)+\inf_{x\in\Delta} g(x),$$

което позволява да направим оценката

$$S(f+g,\tau)-s(f+g,\tau)=\sum_{k=1}^{n}[M_k(f+g)-m_k(f+g)]\Delta x_k\le$$

$$\le\sum_{k=1}^{n}[M_k(f)+M_k(g)-m_k(f)-m_k(g)]\Delta x_k=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}[M_k(f)-m_k(f)]\Delta x_k+\sum_{k=1}^{n}[M_k(g)-m_k(g)]\Delta x_k<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

което показва, че сумата $f(x)+g(x)$ е интегруема в интервала $[a,b]$. За да докажем равенството (11.3) е достатъчно да забележим, че за сумите на Риман е изпълнно

$$r(f+g,\tau)=r(f,\tau)+r(g,\tau)$$

и да направим интегрален граничен преход. ■

Свойства 3 и 4 образуват заедно ***линейното свойство*** на интеграла, което гласи, че интеграл от линейна комбинация е равен на линейна комбинация от интеграли,

$$\int_a^b[\lambda_1 f_1(x)+\lambda_2 f_2(x)+\cdots+\lambda_p f_p(x)]dx=\lambda_1\int_a^b f_1(x)dx+\lambda_2\int_a^b f_2(x)dx+\cdots+\lambda_p\int_a^b f_p(x)dx ,$$

когато функциите $f_1(x)$, $f_2(x)$, .., $f_p(x)$ са интегруеми в интервала $[a,b]$.

Свойство 5 (***оценка на интеграла***)**.** Нека m, M и C са константи, за които $m \le f(x) \le M$ и $|f(x)| \le C$, когато $x \in [a,b]$. Тогава са изпълнени неравенствата

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a), \tag{11.11}$$

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le C(b-a). \tag{11.12}$$

Доказателство. За всяка риманова сума $r(f,\tau)$ е изпълнено двойното неравенство

$$m(b-a) \le r(f,\tau) \le M(b-a),$$

откъдето след интегрален граничен преход се получава (11.11). За да докажем (11.12) изхождаме от неравенството

$$|r(f,\tau)| = \left|\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k\right| \le \sum_{k=1}^{n} |f(\xi_k)|\Delta x_k \le C\sum_{k=1}^{n} \Delta x_k = C(b-a)$$

и отново прилагаме граничен преход. ■

Свойство 6 (***позитивност на интеграла***)**.** Нека $f(x)$ е интегруема в $[a,b]$ и нека $f(x) \ge 0$ за $x \in [a,b]$. Тогава

$$\int_a^b f(x)dx \ge 0. \tag{11.13}$$

В частност, интегралът запазва неравенствата, което означава, че ако $f(x)$ и $g(x)$ са две интегруеми функции в интервала $[a,b]$ и $f(x) \ge g(x)$ за $x \in [a,b]$, то

$$\int_a^b f(x)dx \ge \int_a^b g(x)dx. \tag{11.14}$$

Освен това, ако $f(x)$ е непрекъсната в $[a,b]$ и съществува точка $x_0 \in [a,b]$, за която $f(x_0) > 0$, то

$$\int_a^b f(x)dx > 0. \tag{11.15}$$

Доказателство. От условието следва, че за всяка риманова сума е изпълнено

$$r(f,\tau) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k \ge 0,$$

откъдето след интегрален граничен преход получаваме формулата (11.13). Неравенството (11.14) се получава като приложим (11.6) за неотрицателната функция $f(x) - g(x)$. За простота да предположим, че x_0 е вътрешна за интервала $[a,b]$. Тогава може да се намери околност $(x_0-\delta, x_0+\delta) \subset [a,b]$ с достатъчно малко $\delta > 0$ такава, че $f(x) \ge \varepsilon > 0$ за $x \in [x_0-\delta, x_0+\delta]$. Сега от адитивното свойство на интеграла имаме

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^{x_0-\delta} f(x)dx + \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x)dx + \int_{x_0+\delta}^{b} f(x)dx \ge \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x)dx \ge 2\varepsilon\delta > 0,$$

което доказва строгото неравенство (11.15). ■

Свойство 7 (***абсолютна интегруемост***)**.** Нека функцията $f(x)$ е интегруема в интервала $[a,b]$. Тогава функцията $|f(x)|$ също е интегруема, при което

(11.16) $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx$.

Доказателство. За да докажем интегруемостта на $|f(x)|$ е достатъчно да отбележим, че $S(|f|,\tau)-s(|f|,\tau)\le S(f,\tau)-s(f,\tau)$, а за неравенството (11.16) да отбележим, че $|r(f,\tau)|\le r(|f|,\tau)$ и да направим интегрален граничен преход. ■

Когато $f(x)$ е непрекъсната, от оценката (11.16) следва, че

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le (b-a)\max_{a\le x\le b}|f(x)|,$$

понеже

$$\int_a^b |f(x)|dx \le \max_{a\le x\le b}|f(x)|\int_a^b dx = \max_{a\le x\le b}|f(x)|(b-a).$$

Свойство 8. Нека $f(x)$ и $g(x)$ са интегруеми в интервала $[a,b]$. Тогава произведението $f(x)g(x)$ също е интегруема в $[a,b]$. ■

Теорема 11.3 (***теорема за средните стойности***). Нека $f(x)$ и $g(x)$ са интегруеми в $[a,b]$, при което $m\le f(x)\le M$, $x\in[a,b]$, за някои константи m и M, и освен това функцията $g(x)$ не си сменя знака в интервала $[a,b]$ ($g(x)\ge 0$, за всяко $x\in[a,b]$, или $g(x)\le 0$, за всяко $x\in[a,b]$). Тогава съществува константа μ, $m\le\mu\le M$, такава, че

(11.17) $\int_a^b f(x)g(x)dx = \mu\int_a^b g(x)dx$.

Ако $f(x)$ е непрекъсната, то съществува $\xi\in[a,b]$, за което

(11.18) $\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi)\int_a^b g(x)dx$.

В частност, когато $g(x)\equiv 1$, съществува $\xi\in[a,b]$, за което

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a).$$

Доказателство. За определеност да предположим, че $g(x)\ge 0$, $x\in[a,b]$. Имаме $m\le f(x)\le M$, което след умножаване с $g(x)$ приема вида $mg(x)\le f(x)g(x)\le Mg(x)$, $x\in[a,b]$, което след интегриране в интервала $[a,b]$ води до

(11.19) $m\int_a^b g(x)dx \le \int_a^b f(x)g(x)dx \le M\int_a^b g(x)dx$.

От предположението следва, че $\int_a^b g(x)dx\ge 0$. Ако $\int_a^b g(x)dx = 0$, то можем да изберем μ произволно. Нека $\int_a^b g(x)dx > 0$. Тогава (11.19) можем да запишем във вида

$$(11.20)\ m \le \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx} \le M\ ,$$

откъдето следва, че за μ трябва да положим

$$(11.21)\ \mu = \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx}\ ,$$

при който избор се удовлетворява (11.17). Да предположим, че $f(x)$ е непрекъсната. Тогава $f(x)$ достига най-голяма и най-малка стойност. Да положим

$$m = \min_{a\le x\le b} f(x) \text{ и } M = \max_{a\le x\le b} f(x).$$

Според (11.13) имаме $m \le \mu \le M$, където μ е определено от (11.21). От теоремата за междинните стойности следва, че съществува някакво $\xi \in [a,b]$, за което $\mu = f(\xi)$, което доказва твърдението в този случай. ■

5. Интеграл с произволни граници. Досега предполагахме, че за границите на интеграла

$$\int_a^b f(x)dx$$

е изпълнено $a < b$ и това предположение има съществена роля при формулировката на някои от свойствата на интеграла. Тук ще допълним дефиницията за определен интеграл по следния начин. Определение

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

и ако $a > b$ определяме

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx\ ,$$

като в този случай предполагаме, че функцията $f(x)$ е интегруема в интервала $[b,a]$. Тези определения са целесъобразни и се съгласуват с основните свойства на интеграла. Свойството ***линейност*** остава непроменено. Може да се провери непосредствено след изследване на няколко възможни случая, че свойството ***адитивност*** също се запазва, при това в много по-обща форма. Формулите

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \text{ и } \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^d f(x)dx + \int_d^b f(x)dx \text{ и т.н.}$$

остават валидни, винаги когато употребените интеграли съществуват. Свойството ***позитивност*** търпи очевидна промяна. Ако $a > b$ и $f(x)$ е интегруема в $[b,a]$ и $f(x) \ge 0$ за $x \in [a,b]$, то (11.13) приема вида

$$(11.13')\ \int_a^b f(x)dx \le 0\ .$$

В този случай интегралът обръща неравенствата, което означава, че ако $f(x)$ и $g(x)$ са две интегруеми в интервала $[b,a]$ $(a>b)$ и $f(x)\geq g(x)$ за $x\in[b,a]$, то (11.14) приема вида

(11.14') $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$.

Формулите за оценка на интеграла се видоизменят по следния начин:

(11.12') $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq C|b-a|$,

(11.16') $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_b^a |f(x)|dx$, $(a>b)$,

и ако $f(x)$ е непрекъсната в интервал с краища a и b, то

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq |b-a|\max_{a\leq x\leq b}|f(x)| .$$

3. Интегралът като функция на горната си граница. В този раздел ще разглеждаме функция $f(x)$, която предполагаме определена и ограничена в отворения интервал Δ, $|f(x)|\leq C$, $x\in\Delta$. Освен това ще предполагаме, че $f(x)$ е интегруема във всеки интервал $[\alpha,\beta]\subseteq\Delta$. Нека $a\in\Delta$ е избрано по произволен начин. Тогава функцията

$$\varphi(x)=\int_a^x f(t)dt$$

е определена в целия интервал Δ и има няколко важни свойства.

Твърдение 11.4. Функцията $\varphi(x)$ е непрекъсната в интервала Δ.

Доказателство. Нека $x\in\Delta$ и Δx е избрано достатъчно малко, че $x+\Delta x\in\Delta$. Да разгледаме разликата $\varphi(x+\Delta x)-\varphi(x)$. От адитивното свойство на интеграла имаме

(11.22) $\varphi(x+\Delta x)-\varphi(x)=\int_a^{x+\Delta x} f(t)dt-\int_a^x f(t)dt=\int_a^x f(t)dt+\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt-\int_a^x f(t)dt=\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt$,

следователно можем да направим оценката

$$|\varphi(x+\Delta x)-\varphi(x)|\leq\left|\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt\right|\leq C|\Delta x| ,$$

откъдето непрекъснатостта на $\varphi(x)$ следва непосредствено. ■

Най-важното свойство на $\varphi(x)$ е нейната диференцируемост.

Теорема 11.4. (***теорема на Нютон-Лайбниц***) Нека $f(x)$ е непрекъсната в интервала Δ. Тогава функцията $\varphi(x)$ е диференцируема в Δ, при което $\varphi'(x)=f(x)$.

Доказателство. От (11.22) и от теоремата за средните стойности имаме

$$\varphi(x+\Delta x)-\varphi(x)=\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt=f(\xi)\Delta x ,$$

където ξ е число от интервала с краища x и $x+\Delta x$, следователно, ако Δx клони към нула, то ξ ще клони към x и понеже $f(x)$ е непрекъсната

$$\lim_{\Delta x\to 0} f(\xi)=f(x).$$

От тук получаваме

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\varphi(x+\Delta x)-\varphi(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0} f(\xi)=f(x),$$
което по определение означава, че функцията $\varphi(x)$ има производна и $\varphi'(x)=f(x)$. ■

Пример 11.5. Имаме

$$\left(\int_1^x \sin t^2\, dt\right)' = \sin x^2 .$$

Ако разгледаме интеграла като функция на долната си граница, то за производната имаме

$$\frac{d}{dx}\left(\int_x^b f(t)dt\right)=-\frac{d}{dx}\left(\int_b^x f(t)dt\right)=-f(x).$$

Ако горната граница от своя страна е функция, то за да намерим производната ще приложим правилото за диференциране на съставни функции

$$\frac{d}{dx}\left(\int_a^{\beta(x)} f(t)dt\right)=f(\beta(x))\beta'(x),$$

аналогично

$$\frac{d}{dx}\left(\int_{\alpha(x)}^{b} f(t)dt\right)=-f(\alpha(x))\alpha'(x).$$

Ако и двете граници са функции, то правилото за диференциране е

$$\frac{d}{dx}\left(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t)dt\right)=\frac{d}{dx}\left(\int_a^{\beta(x)} f(t)dt-\int_a^{\alpha(x)} f(t)dt\right)=f(\beta(x))\beta'(x)-f(\alpha(x))\alpha'(x).$$

Пример 11.6. Имаме

$$\left(\int_{x^2}^{x^3} e^t\, dt\right)' = 3x^2e^{x^3}-2xe^{x^2} .$$

От теорема 11.4 следва съществуването на примитивна за функция, определена и непрекъсната в отворен интервал.

Твърдение 11.5. Нека $f(x)$ е непрекъсната в отворения интервал Δ. Тогава $f(x)$ има поне една примитивна $F(x)$ в Δ и всяка друга примитивна се получава от нея след добавяне на константа.

Доказателство. Една примитивна ще получим като положим $F(x)=\varphi(x)$, понеже $F'(x)=f(x)$, съгласно твърдение 11.2. Нека $F_1(x)$ е друга примитивна на $f(x)$ в интервала Δ. Да положим $g(x)=F_1(x)-F(x)$. Тогава функцията $g(x)$ е диференцируема в Δ, при което $g'(x)=F_1'(x)-F'(x)=f(x)-f(x)=0$, за всяко $x\in\Delta$, откъдето следва, че $g(x)\equiv C=const$, т.е. $F_1(x)=F(x)+C$. ■

Твърдение 11.5 оправдава записа на неопределения интеграл във вида

(11.23) $\int f(x)dx=F(x)+C$,

където $F(x)$ е една (коя да е) примитивна. Формулата (11.23) дава неопределения интеграл (съвкупността от всичките примитивни) за функция $f(x)$, която е непрекъсната в даден отворен интервал Δ.

6. Формула на Нютон-Лайбниц. Това е най-важната формула от интегралното смятане. Тя дава връзката между определения и неопределения интеграл.

Теорема 11.5 (*формула на Нютон-Лайбниц*). Нека $f(x)$ е непрекъсната в отворения интервал Δ и нека $a,b\in\Delta$. Тогава

$$(11.24)\quad \int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a) = F(x)\Big|_a^b,$$

където $F(x)$ е една (коя да е) примитивна на $f(x)$ в интервала Δ.

Доказателство. Вече знаем, че $f(x)$ има примитивни в Δ. Нека $F(x)$ е една примитивна и да положим $g(x)=\int_a^x f(t)dt - F(x)$. Имаме $g'(x)=f(x)-f(x)=0$, за всяко $x\in\Delta$, следователно $g(x)\equiv C = const$, в частност $g(a)=g(b)$. Имаме

$$g(a)=\int_a^a f(t)dt - F(a) = \int_a^b f(t)dt - F(b) = g(b),$$

което ни дава формулата (11.24), във вида

$$(11.25)\quad \int_a^b f(t)dt = F(b)-F(a),$$

понеже

$$\int_a^a f(t)dt = 0.$$

Формулите (11.24) и (11.25) фактически не се различават, тъй като променливата на определения интеграл е свързана и може да бъде заменяна с всеки друг символ, стига това да не доведе до объркване. ■

Пример 11.7. Една примитивна на функцията $f(x)=\cos x$ е $F(x)=\sin x$, следователно по формулата на Нютон-Лайбниц имаме

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \sin\frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1.$$

Пример 11.8. В пример 11.4 пресметнахме, че

$$\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}.$$

Същия резултат получаваме и посредством формулата на Нютон-Лайбниц

$$\int_0^1 x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Bigg|_0^1 = \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{1}{3}.$$

Интегриране по части при определен интеграл. Формулата за интегриране по части предлага значителни удобства в пресмятането на определения интеграл.

Твърдение 11.6. Нека функциите $f(x)$ и $g(x)$ имат непрекъснати производни в отворения интервал Δ и $a,b\in\Delta$. Тогава е валидна формулата

$$\int_a^b f(x)dg(x) = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b g(x)df(x).$$

Доказателство. Преди всичко да отбележим, че

$$\int_a^b f(x)dg(x) = \int_a^b f(x)g'(x)dx, \quad \int_a^b g(x)df(x) = \int_a^b g(x)f'(x)dx$$

и $f(x)g(x)\Big|_a^b = f(b)g(b)-f(a)g(a)$. Да положим

$$\omega(x) = \int_a^x f(t)g'(t)dt + \int_a^x g(t)f'(t)dt - f(t)g(t)\Big|_a^x, \ x \in \Delta .$$

Пресмятаме

$$\omega'(x) = f(x)g'(x) + g(x)f'(x) - \left[f(x)g(x)\right]' = 0,$$

за всяко $x \in \Delta$, следователно $\omega(x) \equiv C = const$, в частност $\omega(a) = \omega(b)$. От друга страна $\omega(a) = 0$, следователно $\omega(b) = 0$, което означава

$$\int_a^b f(t)g'(t)dt + \int_a^b g(t)f'(t)dt - f(t)g(t)\Big|_a^b = 0 . \ \blacksquare$$

Пример 11.9. Да пресметнем интеграла

$$I = \int_1^3 x \ln x dx .$$

Внасяме x зад знака на диференциала и получаваме

$$I = \int_1^3 \ln x d\frac{x^2}{2} .$$

Прилагаме формулата за интегриране по части,

$$I = \int_1^3 \ln x d\frac{x^2}{2} = \frac{x^2}{2}\ln x\Big|_1^3 - \int_1^3 \frac{x^2}{2} d\ln x = \left[\frac{9}{2}\ln 3 - \frac{1}{2}\ln 1\right] - \int_1^3 \frac{x^2}{2} d\ln x .$$

Изнасяме $\ln x$ пред знака на диференциала и получаваме

$$I = \frac{9}{2}\ln 3 - \int_1^3 \frac{x^2}{2}\frac{1}{x}dx ,$$

$$I = \frac{9}{2}\ln 3 - \int_1^3 \frac{x}{2}dx = \frac{9}{2}\ln 3 - \frac{x^2}{4}\Big|_1^3 ,$$

$$I = \frac{9}{2}\ln 3 - \left[\frac{9}{4} - \frac{1}{4}\right] = \frac{9}{2}\ln 3 - 2 .$$

Посочените в горния пример три стъпки са характерни във всеки случай на прилагане техниката на интегриране по части.

Смяна на променливата. Смяната на променливата при определен интеграл предлага удобно средство за неговото пресмятане. Новото тук в сравнение с неопределения интеграл е отчитане смяната на границите.

Твърдение 11.7. Нека функцията $f(x)$ е непрекъсната в отворения интервал Δ_x и $a, b \in \Delta_x$. Нека освен това, функцията $\varphi(t)$ има непрекъсната производна в отворения интервал Δ_t, $\alpha, \beta \in \Delta_t$, при което $\varphi(\Delta_t) \subset \Delta_x$ и $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$. Тогава

$$(11.26) \quad \int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))d\varphi(t).$$

Доказателство. Първо да отбележим, че

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))d\varphi(t) = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt .$$

Да положим

$$g(t) = \int_a^{\varphi(t)} f(x)dx - \int_\alpha^t f(\varphi(\tau))\varphi'(\tau)d\tau .$$

Функцията $g(t)$ е определена в целия интервал Δ_t, при което

$$g'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t) - f(\varphi(t))\varphi'(t) = 0,$$

за всяко $t \in \Delta_t$, следователно $g(t) \equiv C = const$, в частност $\varphi(\alpha) = \varphi(\beta)$. От друга страна

$$g(\alpha) = \int_a^{\varphi(\alpha)} f(x)dx - \int_\alpha^\alpha f(\varphi(\tau))\varphi'(\tau)d\tau = 0 - 0 = 0,$$

понеже $\varphi(\alpha) = a$, следователно $\varphi(\beta) = 0$, което дава

$$\int_a^b f(x)dx - \int_\alpha^\beta f(\varphi(\tau))\varphi'(\tau)d\tau = 0.$$

С това формулата (11.26) е доказана. ■

Пример 11.10. Да пресметнем интеграла

$$I = \int_4^9 \frac{1}{1+\sqrt{x}}dx.$$

Полагаме $\sqrt{x} = t$, което дава $x = t^2$ и $dx = dt^2 = 2tdt$. Тук $a = 4$ и $b = 9$, което дава $\alpha = \sqrt{4} = 2$ и $\beta = \sqrt{9} = 3$. Сега прилагаме формулата (11.26) и получаваме

$$I = \int_2^3 \frac{2t}{1+t}dt = 2\int_2^3 \frac{t}{1+t}dt = 2\int_2^3 \frac{1+t-1}{1+t}dt = 2\int_2^3 dt - 2\int_2^3 \frac{dt}{1+t},$$

$$I = 2t\Big|_2^3 - 2\ln(1+t)\Big|_2^3 = 2(3-2) - 2(\ln 4 - \ln 3).$$

При определяне на границите, за прегледност, можем да си послужим със следната таблица

x	4	9
t	2	3

7. Несобствени интеграли. Досега при определяне на интеграла предполагахме, че подинтегралната функция $f(x)$ е ограничена и интервала на интегриране е краен. Тук ще разширим това определение по целесъобразност, произтичаща както от теорията така и от приложенията на интеграла. Понеже темата е твърде обширна, и е свързана с многобройни твърдения от частен характер, ще си послужим главно с примери. Да разгледаме интеграла

$$(11.27)\ \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}.$$

Този интеграл е ***несобствен***, понеже подинтегралната функция $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$ не е ограничена в интервала на интегриране $[0,1)$, тъй като $\lim\limits_{x \to 1-0} f(x) = \infty$ (Рис. 11.5).

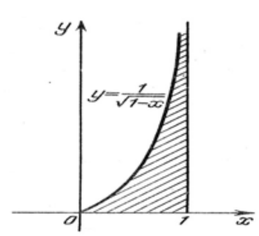

Рис. 11.5.

От друга страна, за всяко ξ, $0 \le \xi < 1$, интегралът $\int_0^{\xi} \frac{1}{\sqrt{1-x}}dx$ е добре определен, което дава основания да положим

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = \lim_{x\to 1-0}\int_0^{\xi} \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = \lim_{\xi\to 1-0}\left[-2\sqrt{1-x}\Big|_0^{\xi}\right] = \lim_{\xi\to 1-0}\left[2-2\sqrt{1-\xi}\right] = 2 .$$

В този случай казваме, че несобственият интеграл (11.27) има особеност в десния край на интервала. Лицето на неограничения трапец от рис. 11.5 се оказа крайно.

По същия начин можем да постъпим и с интеграла

$$(11.28) \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} .$$

Този интеграл също е несобствен, тъй като подинтегралната функция $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ не е ограничена в интервала на интегриране $(0,1]$, тъй като $\lim_{x\to +0} f(x) = \infty$. От друга страна, за всяко ξ, $1 \ge \xi > 0$, интегралът $\int_{\xi}^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$ е добре определен, което дава основания да положим

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \lim_{\xi\to +0}\int_{\xi}^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \lim_{\xi\to +0}\left[\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}\Big|_{\xi}^1\right] = \lim_{\xi\to +0}\left[\frac{3}{2}-\frac{3}{2}\xi^{\frac{2}{3}}\right] = \frac{3}{2} .$$

В този случай несобственият интеграл (11.28) има особеност в левия край на интервала. И в двата случая казваме, че несобствените интеграли са ***сходящи***, защото границите чрез която се определят техните стойности съществуват (и са различни от $\pm\infty$). Несобственият интеграл с особеност в левия край на интервала

$$(11.29) \int_1^3 \frac{dx}{x-1}$$

обаче е ***разходящ***, тъй като границата чрез която се определя неговата стойност е ∞,

$$\lim_{\xi\to 1+0}\int_{\xi}^3 \frac{dx}{x-1} = \lim_{\xi\to 1+0}\left[\ln(x-1)\Big|_{\xi}^3\right] = \lim_{\xi\to 1+0}\left[\ln 2 - \ln(\xi-1)\right] = \infty .$$

Един несобствен интеграл сходящ, когато въпросната граница не само съществува, но и е различна от $\pm\infty$. За интеграла (11.29) можем да напишем

$$\int_1^3 \frac{dx}{x-1} = \infty ,$$

понеже това се съгласува с направените досега определения за граници. Може да се случи даден несобствен интеграл е разходящ, понеже границата, с която се определя, ***не съществува.***

Горните определения се ***съгласуват*** със случая, когато подинтегралната функция няма особеност, т.е. когато разглеждаме обичайния интеграл, който в контраст с термина "несобствен" можем да наречем условно "собствен". Наистина, нека функцията $f(x)$ е ограничена и интегруема в интервала $[a,b]$, $|f(x)| \le C$, $x \in [a,b]$. Тогава, за всяко ξ, $a < \xi < b$, имаме

$$\left|\int_a^{\xi} f(x)dx - \int_a^{b} f(x)dx\right| = \left|\int_{\xi}^{b} f(x)dx\right| \le C|b-\xi|,$$

следователно

$$\lim_{\xi\to b-0}\int_a^{\xi} f(x)dx = \int_a^{b} f(x)dx, \text{ аналогично } \lim_{\xi\to a+0}\int_{\xi}^{b} f(x)dx = \int_a^{b} f(x)dx.$$

Когато някоя от границите на интеграла е безкрайност, определението е аналогично. Например интегралът

$$(11.30)\int_0^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}$$

е несобствен с особеност в десния край на интервала (Рис. 11.6).

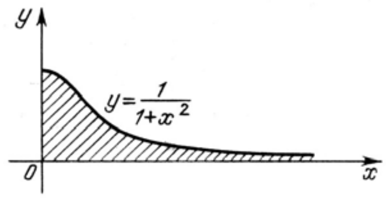

Рис. 11.6.

По определение

$$\int_0^{\infty}\frac{dx}{1+x^2} = \lim_{\xi\to\infty}\int_0^{\xi}\frac{dx}{1+x^2} = \lim_{\xi\to\infty}\left[\operatorname{arctg} x\Big|_0^{\xi}\right] = \lim_{\xi\to\infty}\left[\operatorname{arctg}\xi - \operatorname{arctg}0\right] = \operatorname{arctg}\infty = \frac{\pi}{2},$$

което показва, че интегралът (11.30) е сходящ. Лицето на неограничения трапец от рис. 11.6 също се оказа крайно.

Аналогично се постъпва за интеграли, в които лявата граница е $-\infty$.

За всички разглеждани по-горе несобствени интеграли (11.27), (11.28), (11.29) и (11.30), подинтегралната функция имаше граница (крайна или безкрайна) в особения край. Дадените определения за несобствен интеграл остават същите и когато такава граница не съществува.

Несобственият интеграл $\int_a^b f(x)dx$ се нарича ***абсолютно сходящ***, когато е сходящ несобственият интеграл $\int_a^b |f(x)|dx$. Ако един несобствен интеграл е абсолютно сходящ, то той е сходящ. Обратното в общия случай не е вярно.

Пример 11.11. Най-важният от теорията на редовете на Фурие несобствен интеграл, с особеност в десния край на интервала, понеже интервалът е неограничен отдясно,

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx$$

е сходящ, но не е абсолютно сходящ. Тук в левия край няма особеност, понеже подинтегралната функция има граница при $x\to 0$ (равна на 1).

Несобствен интеграл, който е сходящ, но не е абсолютно сходящ, се нарича ***условно сходящ***.

Абсолютно сходящите несобствени интеграли не се различават в основните си свойства от собствените интеграли. В рамките на една по-обща теория (интеграл на Лебег), между тях няма формални разлики. Условно сходящите несобствени интеграли обаче образуват самостоятелен клон на анализа, който не се явява частен случай на по-обща теория.

В много случаи е полезен следният критерий за абсолютна сходимост.

Теорема 11.6 ***(Вайерщрас).*** Нека в интервала на интегриране да е изпълнено неравенството $|f(x)| \le g(x)$, при което несобственият интеграл (в крайни или безкрайни граници) $\int_a^b g(x)dx$ е сходящ. Тогава несобственият интеграл $\int_a^b f(x)dx$ е абсолютно сходящ. ■

Пример 11.12. Да изследваме за абсолютна сходимост интеграла

$$I = \int_0^1 \frac{\sin\left(\ln\left(x^3+1\right)\operatorname{tg} x\right)}{\sqrt{x}}dx .$$

Тук за подинтегралната функция имаме оценка

$$\left|\frac{\sin\left(\ln\left(x^3+1\right)\operatorname{tg} x\right)}{\sqrt{x}}\right| \le \frac{1}{\sqrt{x}},\ 0 < x \le 1 .$$

Ако в качеството на мажоранта положим функцията $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$, ще получим, че интегралът I е абсолютно сходящ, понеже интегралът $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ е сходящ (неговата стойност е 2).

Полезно допълнение на теоремата на Вайерщрас е следното

Твърдение 11.8. Нека в интервала на интегриране (краен или безкраен) е изпълнено $0 \le f(x) \le g(x)$. Тогава, ако интегралът $\int_a^b g(x)dx$ е сходящ, то интегралът $\int_a^b f(x)dx$ също е сходящ, следователно, ако интеграл $\int_a^b f(x)dx$ е разходящ, то интегралът $\int_a^b g(x)dx$ също е разходящ. ■

Ако подинтегралната функция е неотрицателна, то сходимостта и абсолютната сходимост означават едно и също. Условната сходимост е налице, когато подинтегралната функция си сменя знака по сложен начин.

Пример 11.13. С помощта на твърдение 11.1 можем да установим, че интегралът

$$I = \int_0^1 \frac{2+\cos\left(x^2+1\right)}{x}dx$$

е разходящ. Тук е налице неравенството

$$\left|\frac{2+\cos\left(x^2+1\right)}{x}\right| \ge \frac{1}{x},$$

а интегралът от минорантата $g(x) = \frac{1}{x}$ е разходящ.

Когато пресмятаме несобствени интеграли можем да използваме формулата на Нютон-Лайбниц, както и интегриране по части.

Пример 11.14. Да пресметнем несобствения интеграл

$$I = \int_0^1 x \ln x dx .$$

Имаме

$$I = \int_0^1 x \ln x dx = \lim_{\xi \to +0} \int_\xi^1 x \ln x dx = \lim_{\xi \to +0} \int_\xi^1 \ln x d \frac{x^2}{2} = \lim_{\xi \to +0} \left[\frac{x^2}{2} \ln x \Big|_\xi^1 - \int_\xi^1 \frac{x}{2} dx \right],$$

$$I = \lim_{\xi \to +0} \left[\frac{x^2}{2} \ln x \Big|_\xi^1 - \frac{x^2}{4} \Big|_\xi^1 \right] = \lim_{\xi \to +0} \left[-\frac{\xi^2}{2} \ln \xi - \frac{1}{4} + \frac{\xi^2}{4} \right] = -\frac{1}{4},$$

понеже чрез правилото на Лопитал можем да пресметнем, че $\lim_{\xi \to +0} \frac{\xi^2}{2} \ln \xi = 0$.

Прилага се също и техниката на смяна на променливите.

Пример 11.15. Да пресметнем интеграла

$$I = \int_0^\infty \frac{dx}{\left(1 + x^2\right)^{3/2}} .$$

Полагаме $x = \operatorname{tg} t$, където $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$. Тогава $dx = \frac{dt}{\cos^2 t}$ и $x^2 + 1 = \frac{1}{\cos^2 t}$. След заместване намираме

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t dt = 1 .$$

Несобственият интеграл

$$I = \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{x(2 - x)}}$$

има особености и в двата края на интервала. За да установим неговата сходимост, го разделяме на два несобствени интеграла, всеки от които има само по една особеност,

$$I = \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{x(2 - x)}} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(2 - x)}} + \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x(2 - x)}} = I_1 + I_2 .$$

В този случай интегралът I е сходящ, понеже и двата несобствени интеграла I_1 и I_2 са сходящи (ако поне единият от тях беше разходящ, то и съставният интеграл щеше да е разходящ).

Най-важни за приложенията са несобствените интеграли, зависещи от параметър. Параметърът трябва да се схваща като друга променлива на подинтегралната функция. Да отбележим интегралите

$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt$ - ***гама функция*** на Ойлер,

$\mathrm{B}(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1 - t)^{y-1} dt$ - ***бета функция*** на Ойлер,

които имат многобройни приложения. От огромно значение за моделирането в техническите науки е преобразуването на Лаплас

$$L[f](p) = \int_0^\infty f(t) e^{-pt} dt ,$$

което е определено за всяка (интегруема във всеки интервал $[0,\xi]$, $\xi \geq 0$) функция $f(t):[0,\infty) \to \mathrm{R}$, която удовлетворява изискване за ръст $|f(t)| \leq Ce^{\sigma t}$, $t \geq 0$, за някакви константи C и σ. В такъв случай преобразуването на Лаплас е определено за всяко $p > \sigma$.

При определени условия може да се диференцира под знака на интеграла. За преобразуването на Лаплас се доказва, че функцията $L[f](p)$ има производни от всеки ред относно p (при $p > \sigma$), при което диференцирането може да се извърши под знака на интеграла, т.е.

$$\frac{d^n}{dp^n} L[f](p) = \int_0^\infty f(t) e^{-pt} (-t)^n \, dt .$$