Лекция 15

§15. Двоен и троен интеграл

1. Мярка и интеграл в $\mathbb{R}^2$. В раздела за приложение на определен интеграл дадохме дефиниции за лице на криволинеен трапец и на криволинеен сектор. Тук ще разглеждаме равнинни множества $A \subset \mathbb{R}^2$ от по-общ вид, за които също е възможно да се определи естествена мярка лице. Такива множества ще наричаме измерими, а тяхната мярка ще бележим с $\mu(A)$. Естествената мярка на множествата трябва да бъде неотрицателна, ***монотонна*** и ***адитивна.*** Монотонността означава, че ако $A \subset B$ са две измерими множества, то $\mu(A) \le \mu(B)$. Адитивността означава, че ако A и B са две измерими множества, които не се пресичат, то тяхното обединение $A \cup B$ също е измеримо и $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$. Освен това, определенията които ще дадем трябва да бъдат съгласувани с известните вече случаи.

Нека Π е правоъгълна фигура $\Pi = \{a \prec x \prec b, c \prec y \prec d\}$, където символът $\prec$ означава строго или нестрого неравенство. Следвайки известната формула за лице на правоъгълник, определяме $\mu(\Pi) = (b-a)(d-c)$, без значение чрез кой тип неравенства е зададена правоъгълната фигура Π. Празното множество $\varnothing$ също разглеждаме като правоъгълна фигура.

Множествата с мярка нула имат особено значение в схемата за определяне на измерими множества. Казва се, че множеството A има ***мярка нула*** (по Пеано-Жордан), $\mu(A) = 0$, когато за всяко $\varepsilon > 0$ съществуват краен брой правоъгълни фигури Π_1, Π_2, ..., Π_n такива, че A се съдържа в тяхното обединение, $A \subset \Pi_1 \cup \Pi_2 \cup \dots \cup \Pi_n$, и сборът от техните мерки е по-малък от ε, $\mu(\Pi_1) + \mu(\Pi_2) + \dots + \mu(\Pi_n) < \varepsilon$. Например ако A се състои от краен брой точки, то $\mu(A) = 0$, понеже според даденото определение една точка $M_0(x_0, y_0)$ е правоъгълна фигура $\{x_0 \le x \le x_0, y_0 \le y \le y_0\}$ с мярка нула. Празното множество има мярка нула. По-сложи примери за такива множества се получават от

Твърдение 15.1. Нека кривата γ е графика на непрекъснатата функция $y = f(x)$, $x \in [a,b]$. Тогава $\mu(\gamma) = 0$.

Доказателство. Да изберем $\varepsilon > 0$. Функцията $f(x)$ е непрекъсната и следователно $f(x)$ е интегруема в интервала $[a,b]$. Съгласно необходимото и достатъчно условие за интегруемост, съществува интегрално деление $\tau = \{x_k\}_{k=0}^{n}$ на интервала $[a,b]$, за което $S(f,\tau) - s(f,\tau) < \varepsilon$, където

$$S(f,\tau) = \sum_{k=1}^{n} M_k \Delta x_k \quad \text{и} \quad s(f,\tau) = \sum_{k=1}^{n} m_k \Delta x_k$$

са горната и долната сума на Дарбу за това деление. Тогава γ се съдържа в обединението на правоъгълниците $\Pi_k = \{x_{k-1} \le x \le x_k, m_k \le y \le M_k\}$, $k = 1,2,\dots,n$, и освен това

$$\sum_{k=1}^{n} \mu(\Pi_k) = \sum_{k=1}^{n} (M_k - m_k)\Delta x_k = S(f,\tau) - s(f,\tau) < \varepsilon,$$

което доказва твърдението. ■

По същия начин се доказва, че ако кривата γ е графика на непрекъснатата функция $x = g(y)$, $y \in [c,d]$, то $\mu(\gamma) = 0$. В частност всяка отсечка в равнината има (равнинна) мярка нула. Очевидно всяко подмножество на множество с мярка нула също има мярка нула.

Твърдение 15.2. Нека множествата A_1, A_2, ..., A_m имат мярка нула. Тогава тяхното обединение $A = A_1 \bigcup A_2 \bigcup \cdots \bigcup A_m$ също има мярка нула.

Доказателство. Нека $\varepsilon > 0$. По условие $\mu(A_k) = 0$, $k = 1,2,\ldots,m$, следователно съществуват правоъгълни фигури $\Pi_{k,1}$, $\Pi_{k,2}$, ..., Π_{k,n_k} такива, че

$$A_k \subset \Pi_{k,1} \bigcup \Pi_{k,2} \bigcup \cdots \bigcup \Pi_{k,n_k} \text{ и } \mu(\Pi_{k,1}) + \mu(\Pi_{k,2}) + \cdots + \mu(\Pi_{k,n_k}) < \frac{\varepsilon}{m},\ k = 1,2,\ldots,m.$$

Тогава ако разгледаме всичките дадени по-горе правоъгълни фигури, то A се съдържа в тяхното обединение, а сборът от техните мерки не надвишава ε,

$$A \subset \bigcup_{k=1}^{m} \bigcup_{j=1}^{n_k} \Pi_{k,j} \text{ и } \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=1}^{n_k} \mu(\Pi_{k,j}) = \sum_{k=1}^{m} \left[\sum_{j=1}^{n_k} \mu(\Pi_{k,j}) \right] < \sum_{k=1}^{m} \frac{\varepsilon}{m} = \varepsilon.\ \blacksquare$$

От твърдение 15.2 следва, че всяка начупена линия има мярка нула, понеже начупената линия се състои от краен брой отсечки, всяка от които има мярка нула.

За да има дадено множество мярка, то трябва да отговаря на известни условия. Засега ще разглеждаме само ***ограничени*** множества.

Определение 15.1. Казваме, че множеството $A \subset \mathbb{R}^2$ е измеримо (по Пеано-Жордан), когато неговият контур ∂A има мярка нула, $\mu(\partial A) = 0$.

Контурът на едно множество е съвкупността от всичките негови контурни точки. В типичния за приложенията случай, контурът представлява линията, която огражда множеството.

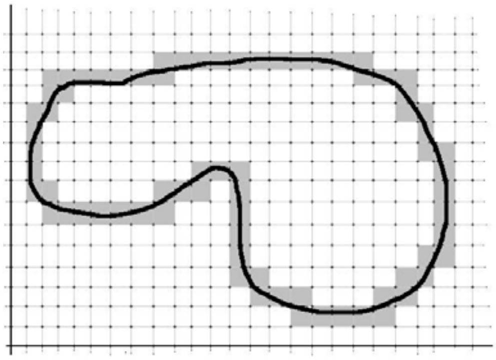

Рис. 15.1.

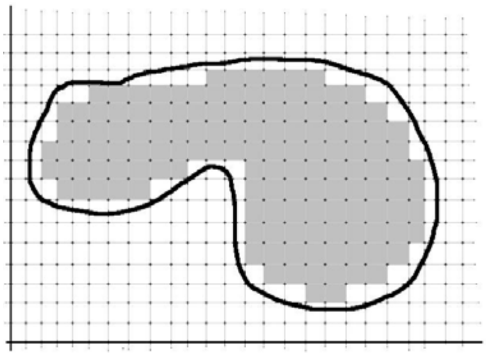

Рис. 15.2.

На рис. 15.1 е илюстрирано множество с характерен контур, който е покрит с правоъгълни фигури с "малко" сумарно лице.

Съществуват обаче и множества с много сложни контури, които контури могат и да не бъдат множества с мярка нула и следователно такива множества не са измерими според определение 15.1. Едно такова множество се получава, когато вземем всичките точки с рационални координати от единичния квадрат. Това множество се състои само от контурни точки и не е измеримо.

Твърдение 15.3. Нека множествата A и B са измерими. Тогава множествата $A \bigcup B$, $A \bigcap B$, $A \setminus B$ също са измерими.

Доказателство. По условие $\mu(\partial A) = 0$ и $\mu(\partial B) = 0$, следователно, според твърдение 15.2, $\mu(\partial A \bigcup \partial B) = 0$. Сега за да завършим доказателството е достатъчно да съобразим, че $\partial(A \bigcup B) \subset \partial A \bigcup \partial B$, $\partial(A \bigcap B) \subset \partial A \bigcup \partial B$, $\partial(A \setminus B) \subset \partial A \bigcup \partial B$ и да се позовем на факта, че подмножество на множество с мярка нула също има мярка нула. $\blacksquare$

От последното твърдение указва, че съвкупността на измеримите множества е затворена относно краен брой прилагане на множествените операции обединение, сечение и разлика. Празното множество също е измеримо и има мярка нула.

Казваме, че множеството E е ***елементарна фигура***, когато E представлява крайно обединение от правоъгълни фигури, чиито взаимни сечения имат мярка нула,

(15.1) $E = \Pi_1 \cup \Pi_2 \cup \cdots \cup \Pi_n$, $\mu(\Pi_i \cap \Pi_j) = 0$ за $i \neq j$.

Елементарните фигури са измерими множества. Ако E е елементарна фигура, то по естествен начин полагаме

(15.2) $\mu(E) = \mu(\Pi_1) + \mu(\Pi_2) + \cdots + \mu(\Pi_n)$,

където Π_1, Π_2, ..., Π_n са правоъгълниците, които съставят E. Една елементарна фигура може да се представи по различни начини във вида (15.1), при което лесно се съобразява, че даденото определение за мярка (15.2) не зависи от конкретния начин на представяне.

С помощта на прости геометрични съображения може да се покаже, че ако E_1 и E_1 са елементарни фигури, то обединението $E_1 \cup E_2$, сечението $E_1 \cap E_2$ и разликата $E_1 \setminus E_2$ също представляват елементарни фигури.

Нека $A \subset \mathbb{R}^2$ е измеримо множество и да разгледаме всевъзможни елементарни фигури F, които се съдържат в A, $F \subset A$ (Рис. 15.2). Техните мерки са ограничени отгоре поради ограничеността на A. От съображения за монотонност следва, че както и да определим мярка на A ще бъде изпълнено $\mu(F) \leq \mu(A)$. Освен това е интуитивно ясно, че тези елементарни фигури можем да избираме все по-плътно до контура на A, като по такъв начин изчерпваме лицето с неограничена точност.

Определение 15.2. Мярка $\mu(A)$ на измеримото множество $A \subset \mathbb{R}^2$ се нарича точната горна граница от мерките $\mu(F)$ на всевъзможните елементарни фигури F, които се съдържат в A,

(15.3) $\mu(A) = \sup\limits_{F \subset A} \mu(F)$.

Формално величината $\mu(A)$ от (15.3) съществува за всяко ограничено множество и в общия случай се нарича ***вътрешна мярка*** на A и се бележи с $\mu_*(A)$. Определение 15.2 казва, че мярката на едно измеримо множество е равна на неговата вътрешна мярка. Разсъждавайки по същия начин се определя и ***външна мярка*** $\mu^*(A)$, като точната долна граница от мерките на всевъзможните елементарни фигури U, които съдържат A, $\mu^*(A) = \inf\limits_{A \subset U} \mu(U)$, при което от принципа за отделимост следва, че за всяко ограничено множество е изпълнено $\mu_*(A) \leq \mu^*(A)$. Може да се докаже, че множеството A е измеримо тогава и само тогава, когато $\mu_*(A) = \mu^*(A)$. По този начин неизмерими са онези множества, за които е в сила строгото неравенство $\mu_*(A) < \mu^*(A)$.

Мярката има следните основни свойства.

1) $\mu(A) \geq 0$, за всяко измеримо множество A ***(позитивност)***.

2) Ако A и B са измерими множества и $A \subset B$, то $\mu(A) \leq \mu(B)$ ***(монотонност)***.

3) Ако A и B са измерими множества и $\mu(A \cap B) = 0$, то $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$ ***(адитивност)***. Адитивното свойство на мярката може да се обобщи по следния начин. Ако A_1, A_2, ..., A_n са измерими множества и освен това $\mu(A_i \cap A_j) = 0$ за $i \neq j$, то тяхното обединение $A = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$ също е измеримо множество, при което

$$\mu(A) = \mu(A_1) + \mu(A_2) + \cdots + \mu(A_n).$$

В общия случай са валидни следните събирателни формули за мярка на обединение,

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B),$$

$$\mu(A\cup B\cup C)=\mu(A)+\mu(B)+\mu(C)-\mu(A\cap B)-\mu(A\cap C)-\mu(B\cap C)+\mu(A\cap B\cap C),$$
и т.н. От твърдения 15.1 и 15.2 се получава следния практически критерий.

Твърдение 15.4. Ако контурът на A се състои от краен брой линии, всяка от които е графика на непрекъсната функция $y=f(x)$, $x\in[a,b]$, или $x=g(y)$, $y\in[c,d]$, то множеството A е измеримо. ■

Двойният интеграл се въвежда по начин, който е във висока степен аналогичен на дефиницията на определен интеграл на функция на една променлива.

Нека A е измеримо, а функцията $f(x,y)$ е определена и ***ограничена*** в A. Интегрално деление $\tau=\{A_k\}_{k=1}^{n}$ на множеството A ще наричаме съвкупността от измерими множества A_1, A_2, ..., A_n, за която $A=A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$ и $\mu(A_i\cap A_j)=0$ за $i\neq j$. Диаметър на делението $d(\tau)$ се нарича най-големият от диаметрите на съставляващите множества, $d(\tau)=\max\limits_{1\le k\le n} d(A_k)$. Да положим

$$m_k=\inf_{P\in A_k} f(P),\ M_k=\sup_{P\in A_k} f(P),$$

и нека $P_k(x_k,y_k)$, $k=1,2,\ldots,n$, е някаква точка от A_k. Тогава, както при определения интеграл на функция на една променлива, образуваме долна и горна сума на Дарбу

$$s(f,\tau)=\sum_{k=1}^{n} m_k\mu(A_k) \text{ и } S(f,\tau)=\sum_{k=1}^{n} M_k\mu(A_k),$$

както и интегрална сума на Риман,

$$r(f,\tau)=\sum_{k=1}^{n} f(P_k)\mu(A_k),$$

за които винаги е изпълнено неравенството $s(f,\tau)\le r(f,\tau)\le S(f,\tau)$. При функция на една променлива получихме като следствие, че интегралът е граница на римановите суми, когато диаметърът на делението клони към нула. Тук това свойство ще приемем в качеството на дефиниция.

Определение 15.3. Двоен интеграл от функцията $f(x,y)$ над измеримото множество A се нарича границата на римановите интегрални суми, ако съществува, когато диаметърът на делението клони към нула. В този случай се казва, че функцията $f(x,y)$ е интегруема в A, а двойният интеграл се бележи с

$$\iint_A f(x,y)dxdy .$$

С други думи

$$\iint_A f(x,y)dxdy=\lim_{d(\tau)\to 0} r(f,\tau),$$

което означава, че за всяко $\varepsilon>0$ може да се намери δ такова, че

$$\left|r(f,\tau)-\iint_A f(x,y)dxdy\right|<\varepsilon, \text{ когато } d(\tau)<\delta .$$

Основното необходимо и достатъчно условие за интегруемост изглежда както при функция на една променлива.

Теорема 15.1. Функцията $f(x,y)$ е интегруема в A тогава и само тогава, когато за всяко $\varepsilon>0$ може да се намери деление τ, за което $S(f,\tau)-s(f,\tau)<\varepsilon$. ■

От равномерната непрекъснатост на функция, определена над компактно множество може да се докаже, че такава функция е интегруема.

Теорема 15.2. Нека множеството A е измеримо и компактно, а функцията $f(x,y)$ е непрекъсната в A. Тогава $f(x,y)$ е интегруема в A. ■

Последната теорема може да се уточни по следния начин. Нека $f(x,y)$ е определена и ограничена над измеримото множество A, при което нейните точки на прекъсване образуват множество с мярка нула. Тогава $f(x,y)$ е интегруема над A. В частност една функция $f(x,y)$ може да бъде прекъсната в отделни точки даже по отделни гладки линии и все още да бъде интегруема.

Да разгледаме цилиндричното тяло $\mathsf{C} \subset \mathsf{R}^3$,

$$(15.4)\quad \mathsf{C}:\left|\begin{array}{l}(x,y)\in A\subset \mathsf{R}^2_{x,y}\\ 0\le z\le f(x,y)\end{array}\right.$$

където равнинното множеството A е измеримо, а неотрицателната функция $f(x,y)$ е интегруема в A (Рис. 15.3).

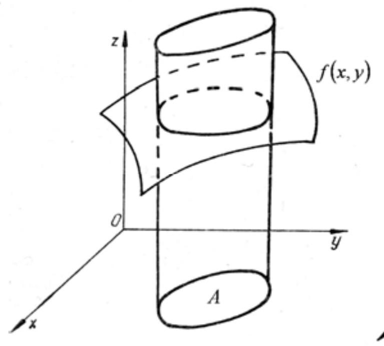

Рис. 15.3.

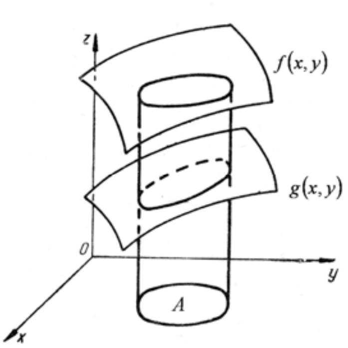

Рис. 15.4.

Геометричната интерпретация на двойния интеграл е свързана с обема на този цилиндър $\mu(\mathsf{C})$ по същия начин, както определеният интеграл на функция на една променлива се отнася към лицето на криволинеен трапец. Нека τ е едно деление на A. Тогава както и да определим по естествен начин обема $\mu(\mathsf{C})$, ще бъде изпълнено неравенството $s(f,\tau)\le\mu(\mathsf{C})\le S(f,\tau)$. От друга страна за римановите суми имаме аналогично неравенство, което показва, че $|r(f,\tau)-\mu(\mathsf{C})|<S(f,\tau)-s(f,\tau)$. Сега от теорема 15.1 следва

Твърдение 15.5. Нека множеството A е измеримо, а функцията $f(x,y)$ е интегруема в A. Тогава цилиндричното тяло, определено от (15.4) има обем, който се получава от формулата

$$\mu(\mathsf{C})=\iint_A f(x,y)\,dxdy\,.\ ■$$

По същия начин за обема на цилиндъра (Рис. 15.4)

$$\mathsf{C}:\left|\begin{array}{l}(x,y)\in A\subset \mathsf{R}^2_{x,y}\\ g(x,y)\le z\le f(x,y)\end{array}\right.$$

се получава формулата

$$\mu(\mathsf{C})=\iint_A [f(x,y)-g(x,y)]\,dxdy\,,$$

която пък е аналог на познатата формула за лице на общ криволинеен трапец в случая на функция с една променлива.

Двойният интеграл има следните основни свойства. Преди всичко да отбележим, че когато $f(x,y)\equiv 1$, то стойността на интеграла е равна на мярката на множеството, над което се интегрира,

$$\iint_A dxdy = \mu(A).$$

Верността на тази формула следва от факта, че в този случай за всяка риманова интегрална сума имаме $r(f,\tau) = \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k) = \mu(A)$, а интегралът се получава като граница на такива суми. Ако A е криволинеен трапец

$$A: \left| \begin{array}{c} a \le x \le b \\ \psi(x) \le y \le \varphi(x) \end{array} \right.,$$

то сравнявайки двете известни формули за лице на A, получаваме

$$\iint_A dxdy = \int_a^b [\varphi(x) - \psi(x)]dx,$$

което може да се запише

$$(15.5) \quad \iint_A dxdy = \int_a^b \left[\int_{\psi(x)}^{\varphi(x)} dy \right] dx.$$

Тук интегралът в средните скоби се схваща като "частен" интеграл по променливата y, а формулата (15.5) е частен случай на ***свеждане на двойния интеграл към повторен***.

Линейност. Нека функциите $f_1(x,y)$, $f_2(x,y)$, ..., $f_n(x,y)$ са интегруеми над измеримото множество A. Тогава всяка тяхна линейна комбинация

$$f(x,y) = \lambda_1 f_1(x,y) + \lambda_2 f_2(x,y) + \cdots + \lambda_n f_n(x,y)$$

също е интегруема функция, при което интегралът от линейната комбинация е равен на съответната линейна комбинация от интеграли,

$$\iint_A f(x,y)dxdy = \lambda_1 \iint_A f_1(x,y)dxdy + \lambda_2 \iint_A f_2(x,y)dxdy + \cdots + \lambda_n \iint_A f_n(x,y)dxdy.$$

Произведението на две интегруеми функции също е интегруема функция.

Адитивност. Нека функцията $f(x,y)$ е интегруема над измеримите множества A_1, A_2, ..., A_n, за които $\mu(A_i \cap A_j) = 0$ при $i \ne j$. Тогава $f(x,y)$ е интегруема над обединението $A = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$, при което интегралът над обединението е равен на сбоът от интегралите над отделните множества,

$$\iint_A f(x,y)dxdy = \iint_{A_1} f(x,y)dxdy + \iint_{A_2} f(x,y)dxdy + \cdots + \iint_{A_n} f(x,y)dxdy.$$

Позитивност. Нека функцията $f(x,y)$ е положителна и интегруема над измеримото множество A. Тогава

$$\iint_A f(x,y)dxdy \ge 0.$$

В частност интегралът запазва неравенствата. Ако функциите $f(x,y)$ и $g(x,y)$ са интегруеми над измеримото множество A и $f(x,y) \ge g(x,y)$ за $(x,y) \in A$, то

$$\iint_A f(x,y)dxdy \ge \iint_A g(x,y)dxdy.$$

Теорема за средните стойности. Нека $f(x,y)$ е непрекъсната над измеримото и линейно свързано множество A, а функцията $g(x,y)$ е интегруема и не си сменя знака над A. Тогава

$$\iint_A f(x,y)g(x,y)dxdy = f(\xi,\eta)\iint_A g(x,y)dxdy,$$

за някоя точка $(\xi,\eta) \in A$. В частност, когато $g(x,y) \equiv 1$, получаваме, че

$$\iint_A f(x,y)dxdy = f(\xi,\eta)\mu(A),$$

за някоя точка $(\xi,\eta)\in A$.

Оценка на интеграла. Нека $f(x,y)$ е интегруема над измеримото множество A и нека за някои константи m, M и C да бъде изпълнено $m \le f(x,y) \le M$ и $|f(x,y)| \le C$, за всяко $(x,y)\in A$. Тогава

$$m\mu(A) \le \iint_A f(x,y)dxdy \le M\mu(A) \text{ и } \left|\iint_A f(x,y)dxdy\right| \le C\mu(A).$$

2. **Мярка и интеграл в** R^3**.** Тройният интеграл се определя практически напълно аналогично спрямо двойния. Тук се разглеждат тримерни измерими множества, $A\subset \mathsf{R}^3$ чиято естествена мярка е обем. Единственото различие в схемата е, че в този случай правоъгълните фигури Π са паралелепипеди,

$$\Pi = \{a \prec x \prec b, c \prec y \prec d, p \prec z \prec q\}$$

с обем е $\mu(\Pi) = (b-a)(d-c)(q-p)$. По нататък всичко се запазва фактически без изменения по същество. Множествата с мярка нула се задават по същия начин и имат същите основни свойства. Всяка повърхнина S, която е графика на непрекъсната функция $z = f(x,y)$, определена над измеримо в равнината R^2_{xy} множество има мярка нула в R^3. Множеството $A\subset \mathsf{R}^3$ е измеримо (по Пеано-Жордан), когато неговият контур ∂A има мярка нула, $\mu(\partial A) = 0$. Тук в типичния за приложенията случай, контурът представлява повърхнината, която огражда множеството. За тази повърхнина се очаква да няма обем, понеже тя има естествена мярка лице, което ще разискваме по-нататък в следващите лекции

Определението за елементарни фигури и техните основни свойства остават без съществени изменения. Същото е положението и с определението за мярка на измеримо множество и свойствата позитивност, монотонност и адитивност, както и със събирателните формули в общия случай. Тук е валиден следния практически критерий. Ако контурът на A се състои от краен брой повърхнини, всяка от които е графика на непрекъсната функция $z = f(x,y)$, $(x,y)\in\Omega\subset \mathsf{R}^2_{xy}$, или $y = g(x,z)$, $(x,z)\in\Omega\subset \mathsf{R}^2_{xz}$, или $x = h(z,y)$, $(z,y)\in\Omega\subset \mathsf{R}^2_{zy}$, а Ω е измеримо равнинно множество, то множеството A е измеримо.

Интегралните суми на Дарбу и Риман изглеждат по същия начин, както и самото определение за троен интеграл

$$\iiint_A f(x,y,z)dxdydz = \lim_{d(\tau)\to 0} r(f,\tau).$$

Основното необходимо и достатъчно условие за интегруемост се формулира аналогично и ако $f(x,y,z)$ е определена и ограничена над измеримото множество $A\subset \mathsf{R}^3$, при което нейните точки на прекъсване образуват множество с мярка нула, то $f(x,y,z)$ е интегруема над A. В частност една функция $f(x,y,z)$ може да бъде прекъсната в отделни точки, гладки линии и даже и по гладки повърхнини и да бъде интегруема.

Изброените свойства на двойния интеграл се запазват в същата форма. В частност, когато $f(x,y,z)\equiv 1$, то стойността на интеграла е равна на мярката на множеството, над което се интегрира,

(15.6) $\iiint_A dxdydz = \mu(A)$.

От друга страна за обема на цилиндъра

$$\mathsf{C}:\left|\begin{array}{l}(x,y)\in\Omega\subset\mathsf{R}^2_{x,y}\\ g(x,y)\le z\le f(x,y)\end{array}\right.$$

вече имаме формулата

$$\mu(\mathsf{C})=\iint_{\Omega}[f(x,y)-g(x,y)]dxdy,$$

от която след съпоставка с (15.6) получаваме

$$\iiint_A dxdydz=\iint_{\Omega}[f(x,y)-g(x,y)]dxdy,$$

което може да се запише

(15.7) $$\iiint_A dxdydz=\iint_A\left[\int_{g(x,y)}^{f(x,y)}dz\right]dxdy.$$

Тук интегралът в средните скоби е частен интеграл по променливата z, а формулата (15.7) е частен случай на ***свеждане на тройния интеграл към повторен***.

3. Интеграл и мярка. Когато измерваме геометрични или физични величини, основното изискване към мярката е нейната адитивност. Това означава да разполагаме с ясно обособен клас измерими множества и мярка определена за всяко измеримо множество такава, че ако A и B са измерими и $A\cap B=\varnothing$ (или по-общо $\mu(A\cap B)=0$), то $\mu(A\cup B)=\mu(A)+\mu(B)$. Поради адитивното свойство, интегралът, който се определя посредством мярка, сам може да послужи като средство за определяне на най-различни по целесъобразност мерки на множества. Например ако $p(x,y)\ge 0$ е непрекъсната в цялата равнина R^2, то функцията определена от формулата

(15.8) $$\mu_p(A)=\iint_A p(x,y)dxdy$$

задава мярка за всяко измеримо по Пеано-Жордан множество. Тук функцията $p(x,y)$ обикновено се нарича ***плътност на разпределение*** на мярката. Тази мярка $\mu_p(A)$ очевидно е различна от естествената геометрична мярка на множеството, за която знаем, че

$$\mu(A)=\iint_A dxdy.$$

От свойствата на интеграла следва, че определената чрез (15.8) функция от измерими множества е неотрицателна, монотонна и адитивна, което означава, че може да послужи за измерване на някое свойство на множеството. Аналогична е ситуацията, когато имаме непрекъсната в цялото пространство R^3 функцията на плътност $p(x,y,z)\ge 0$ и зададем мярка на тримерно множество чрез формулата

(15.9) $$\mu_p(A)=\iiint_A p(x,y,z)dxdydz.$$

Например ако разглеждаме пространственото тяло като физически обект с маса, то неговата естествена физическа мярка е точно тази маса, която се дава като интеграл (15.9), където тегловата функция е плътността на разпределение на масата.

4. Свеждане на двойния интеграл към повторен. Двойните интеграли могат да се пресмятат ефективно с помощта на познатите техники за единичен интеграл след свеждане до повторни интеграли. Да разгледаме криволинейния трапец D (Рис. 15.5)

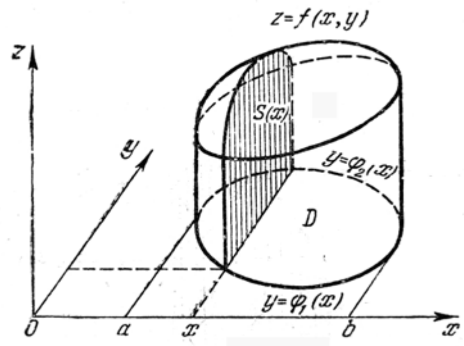

Рис. 15.5.

определен както следва

$$(15.10)\; D: \left| \begin{array}{c} a \le x \le b \\ \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x) \end{array} \right.$$

където функциите $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ са непрекъснати в интервала $[a,b]$, $\varphi_1(x) \le \varphi_2(x)$, за всяко $x \in [a,b]$. От направените предположения следва, че криволинейният трапец D е измеримо равнинно (компактно) множество, при което

$$(15.11)\; \mu(D) = \iint\limits_D dxdy = \int\limits_a^b [\varphi_2(x) - \varphi_1(x)]dx\,.$$

Теорема 15.2. Нека функцията $z = f(x,y)$ е непрекъсната над криволинейния трапец D, определен в (15.10). Тогава е в сила формулата

$$(15.12)\; \iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b \left[\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy \right] dx\,.$$

Доказателство. Изразът в дясната страна на (15.12) се нарича ***повторен интеграл*** понеже отначало се пресмята интегралът в средните скоби, а след това и външния интеграл в граници от a до b. Определеният интеграл

$$\Phi(x) = \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy$$

е добре дефиниран при всяко $x \in [a,b]$ и представлява непрекъсната функция. Формулата (15.12) указва, че

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b \Phi(x)dx\,.$$

Да разгледаме отначало случая, когато $f(x,y) \ge 0$, $(x,y) \in D$. Тогава според геометричното тълкуване на двойния интеграл, за обема на цилиндричното тяло

$$\mathsf{C}: \left| \begin{array}{c} (x,y) \in D \\ 0 \le z \le f(x,y) \end{array} \right.$$

имаме

$$(15.13)\; \mu(\mathsf{C}) = \iint\limits_D f(x,y)dxdy\,.$$

Този обем обаче може да се намери и с помощта на принципа на Кавалиери. Ще разглеждаме сечения на C с равнини, перпендикулярни на оста Ox. Нека $S(x)$ е стойността на лицето на текущото сечение (Рис. 15.5). Тогава според принципа на Кавалиери за обема на C имаме

(15.14) $\mu(\mathrm{C}) = \int_a^b S(x)dx$.

От друга страна в координатната равнина Oyz, проекцията на това сечение представлява криволинейният трапец

$$\Omega_x : \left| \begin{array}{l} \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x) \\ 0 \le z \le f(x,y) \end{array} \right.$$

за чието лице разполагаме с формулата

$$S(x) = \mu(\Omega_x) = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy .$$

Сега като заместим в (15.14) получаваме

$$\mu(\mathrm{C}) = \int_a^b \left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy \right] dx ,$$

което заедно с (15.13) доказва теоремата в този случай.

Нека константата M е избрана достатъчно голяма, че функцията $g(x,y) = f(x,y) + M$ да бъде положителна, за всяко $(x,y) \in D$. Съгласно доказаното дотук, формулата (15.12) е вярна за функцията $g(x,y)$, следователно,

$$\iint_D g(x,y)dxdy = \int_a^b \left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} g(x,y)dy \right] dx ,$$

$$\iint_D [f(x,y) + M]dxdy = \int_a^b \left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} [f(x,y) + M]dy \right] dx .$$

Сега от линейното свойство на интеграла получаваме

$$M\iint_D dxdy + \iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b \left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy \right] dx + M\int_a^b \left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy \right] dx ,$$

(15.15) $M\iint_D dxdy + \iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b \left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy \right] dx + M\int_a^b [\varphi_2(x) - \varphi_1(x)]dx$.

Съгласно (15.11)

$$M\iint_D dxdy = M\int_a^b [\varphi_2(x) - \varphi_1(x)]dx = M\mu(D),$$

откъдето след съкращаване равните събираеми в (15.15) получаваме верността на формулата (15.12) в общия случай. ■

В това доказателство има непълнота, понеже не сме доказали съгласуваността между определението за обем чрез принципа на Кавалиери и определението за обем посредством двоен интеграл. От друга страна то много добре илюстрира някои основни свойства на интеграла, които имат важно значение за приложенията.

Пример 15.1. Да пресметнем двойния интеграл

$$I = \iint_D xydxdy ,$$

където D е областта, оградена от линиите $y = \sqrt{x}$ и $y = x$ (Рис. 15.6).

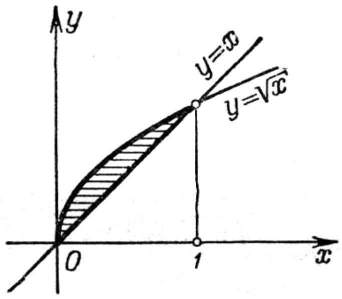

Рис. 15.6.

Тези две криви се пресичат в точките $M_0(0{,}0)$ и $M_1(1{,}1)$, а областта може да се запише във вида

$$D:\left|\begin{array}{l} 0 \le x \le 1 \\ x \le y \le \sqrt{x} \end{array}\right.$$

От формулата (15.3) намираме

$$I = \int_0^1 \left[\int_x^{\sqrt{x}} xy dy \right] dx .$$

За вътрешния интеграл пресмятаме

$$\int_x^{\sqrt{x}} xy dy = x \int_x^{\sqrt{x}} y dy = x \frac{y^2}{2} \Bigg|_x^{\sqrt{x}} = x\left(\frac{x}{2} - \frac{x^2}{2} \right) = \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{2} .$$

Заместваме и получаваме

$$I = \int_0^1 \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{2} \right) dx = \left(\frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{8} \right) \Bigg|_0^1 = \frac{1}{6} - \frac{1}{8} = \frac{1}{24} .$$

Тази област може да се представи като криволинеен трапец и по следния начин

$$D:\left|\begin{array}{l} 0 \le y \le 1 \\ y^2 \le x \le y \end{array}\right.$$

следователно

$$I = \int_0^1 \left[\int_{y^2}^{y} xy dx \right] dy ,$$

По същия начин пресмятаме

$$\int_{y^2}^{y} xy dy = y \int_{y^2}^{y} x dx = y \frac{x^2}{2} \Bigg|_{y^2}^{y} = y\left(\frac{y^2}{2} - \frac{y^4}{2} \right) = \frac{y^3}{2} - \frac{y^5}{2} ,$$

$$I = \int_0^1 \left(\frac{y^3}{2} - \frac{y^5}{2} \right) dy = \left(\frac{y^4}{8} - \frac{y^6}{12} \right) \Bigg|_0^1 = \frac{1}{8} - \frac{1}{12} = \frac{1}{24} .$$

Когато областта на интегриране е правоъгълник

$$\Pi:\left|\begin{array}{l} a \le x \le b \\ c \le y \le d \end{array}\right.$$

и променливите на подинтегралната функция се разделят, $f(x, y) = X(x)Y(y)$, то (в този и само в този случай) от формулата (15.12) непосредствено следва, че двойният интеграл е равен на произведението от двата единични,

$$\iint\limits_{\Pi} X(x)Y(y)dxdy = \left[\int\limits_a^b X(x)dx\right]\left[\int\limits_c^d Y(y)dy\right].$$

Тройните интеграли също могат да се свеждат до повторни, когато областта на интегриране е цилиндрично множество. Нека $V \subset \mathbb{R}^3$ е множеството

$$V: \left| \begin{array}{c} (x,y) \in D \\ \varphi_1(x,y) \le z \le \varphi_2(x,y) \end{array} \right.,$$

където D е измеримо равнинно компактно множество, а функциите $\varphi_1(x,y)$ и $\varphi_2(x,y)$ са определени и непрекъснати в D, при което $\varphi_1(x,y) \le \varphi_2(x,y)$, за всяко $(x,y) \in D$ (Рис 15.7)

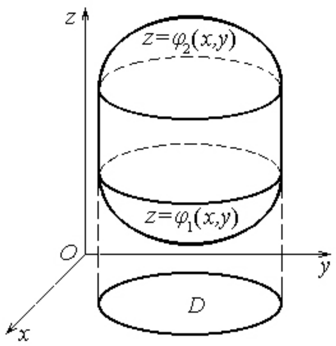

Рис. 15.7.

Тогава за всяка непрекъсната над V функция $f(x,y,z)$ е в сила формулата

$$(15.16)\ \iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \iint\limits_D \left[\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y,z)dz\right]dxdy,$$

която свежда тройния интеграл към повторен. Тук интегралът в средните скоби се разглежда като частен интеграл по променливата z,

$$\Phi(x,y) = \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y,z)dz$$

и представлява непрекъсната функция по съвкупност на променливите си (x,y). Формулата (15.16) указва, че

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \iint\limits_D \Phi(x,y)dxdy.$$

И тук, когато областта на интегриране е правоъгълна

$$\Pi: \left| \begin{array}{l} a \le x \le b \\ c \le y \le d \\ p \le z \le q \end{array} \right.$$

а променливите на подинтегралната функция се разделят, $f(x,y,z) = X(x)Y(y)Z(z)$, то (в този и само в този случай) тройният интеграл е равен на произведението от трите единични,

$$\iiint\limits_{\Pi} X(x)Y(y)Z(z)dxdydz = \left[\int\limits_a^b X(x)dx\right]\left[\int\limits_c^d Y(y)dy\right]\left[\int\limits_p^q Z(z)dz\right].$$

5. Смяна на променливите. Смяната не променливите е начин за опростяване на областта на интегриране или на подинтегралната функция. Съдържанието на основните определения ще покажем върху пример. Да разгледаме криволинейния четириъгълник от първи квадрант $D \subset \mathrm{R}^2_{xy}$, получен от пресичането на двете хиперболи $xy = 1$, $xy = 3$ и двете параболи $y = x^2$ и $y = 2x^2$ (Рис. 15.8)

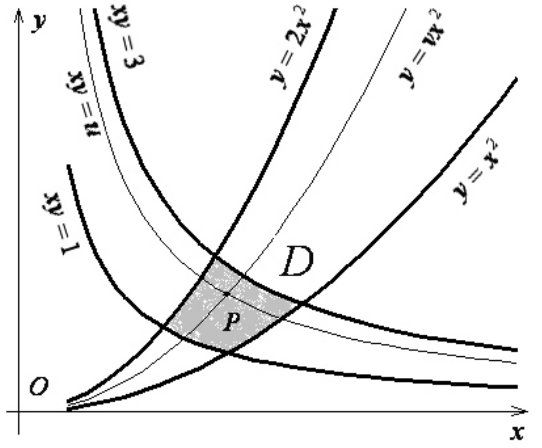

Рис. 15.8.

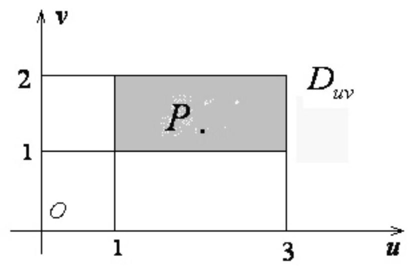

Рис 15.9.

Всяка точка $P \in D$ се получава по единствен начин от пресичането на хиперболата $xy = u$, за някое u, $u \in [1,3]$ и параболата $y = vx^2$, за някое v, $v \in [1,2]$. Това показва, че има взаимно еднозначно съответствие между точките на D и точките от правоъгълника

$$D_{uv} : \begin{vmatrix} 1 \le u \le 3 \\ 1 \le v \le 2 \end{vmatrix}$$

Като решим системата $xy = u$, $y = vx^2$ относно променливите x и y, получаваме

$$x = \sqrt[3]{\frac{u}{v}} = u^{\frac{1}{3}} v^{-\frac{1}{3}} \text{ и } y = \sqrt[3]{u^2 v} = u^{\frac{2}{3}} v^{\frac{1}{3}}.$$

По този начин определяме изображението $\Phi : D_{uv} \to D_{xy}$ с координатни функции

$$x = \varphi(u,v) = u^{\frac{1}{3}} v^{-\frac{1}{3}} \text{ и } y = \psi(u,v) = u^{\frac{2}{3}} v^{\frac{1}{3}},$$

което привежда взаимно еднозначно областта D_{uv} в областта D_{xy}. ***Якобиан*** $J = J(u,v)$ на това изображение се нарича детерминантата

$$J(u,v) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial\varphi(u,v)}{\partial u} & \dfrac{\partial\varphi(u,v)}{\partial v} \\ \dfrac{\partial\psi(u,v)}{\partial u} & \dfrac{\partial\psi(u,v)}{\partial v} \end{vmatrix}.$$

За нашия пример имаме

$$J(u,v) = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{3} u^{-\frac{2}{3}} v^{-\frac{1}{3}} & -\dfrac{1}{3} u^{\frac{1}{3}} v^{-\frac{4}{3}} \\ \dfrac{2}{3} u^{-\frac{1}{3}} v^{\frac{1}{3}} & \dfrac{1}{3} u^{\frac{2}{3}} v^{-\frac{2}{3}} \end{vmatrix} = \frac{1}{3v}.$$

В общия случай такива изображения и техните якобиани имат важно значение при смяната на променливите при кратни интеграли. За тях ***винаги*** ще предполагаме, че са изпълнени следните условия.

1) Изображението Φ е взаимно еднозначно.

2) Координатните функции имат непрекъснати частни производни в дефиниционната област на Φ.

3) Навсякъде в дефиниционната област на Φ е изпълнено $J>0$ или навсякъде в дефиниционната област на Φ е изпълнено $J<0$.

В горния пример и трите условия са налице. Да разгледаме едно интегрално деление на областта D_{uv} с прави линии, успоредни на координатните оси (Рис. 15.10)

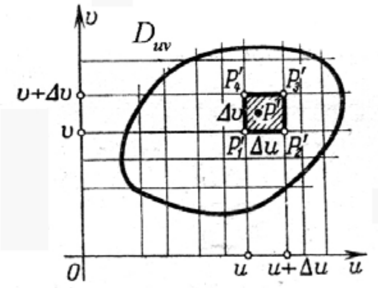

Рис. 15.10.

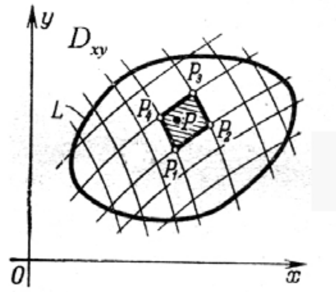

Рис. 15.11.

При изображението Φ, $x=\varphi(u,v)$, $y=\psi(u,v)$, тези линии ще зададат едно интегрално деление на областта D_{xy}, при което правоъгълникът $P_1'P_2'P_3'P_4'$ с върхове

$$P_1'(u,v),\ P_2'(u+\Delta u,v),\ P_3'(u+\Delta u,v+\Delta v),\ P_3'(u,v+\Delta v),$$

се изобразява в криволинейния четириъгълник $P_1P_2P_3P_4$ с върхове

$$P_1(x_1,y_1),\ x_1=\varphi(u,v),\ y_1=\psi(u,v),$$
$$P_2(x_2,y_2),\ x_2=\varphi(u+\Delta u,v),\ y_2=\psi(u+\Delta u,v),$$
$$P_3(x_3,y_3),\ x_3=\varphi(u+\Delta u,v+\Delta v),\ y_3=\psi(u+\Delta u,v+\Delta v),$$
$$P_4(x_4,y_4),\ x_4=\varphi(u,v+\Delta v),\ y_4=\psi(u,v+\Delta v).$$

Сега нарастванията на координатните функции ще представим по формулата на Тейлър, пренебрегвайки събираемите от ред втори и по-висок,

$$x_1=\varphi(u,v),\ y_1=\psi(u,v),$$
$$x_2\approx\varphi(u,v)+\frac{\partial\varphi}{\partial u}\Delta u,\ y_2\approx\psi(u,v)+\frac{\partial\psi}{\partial u}\Delta u,$$
$$x_3\approx\varphi(u,v)+\frac{\partial\varphi}{\partial u}\Delta u+\frac{\partial\varphi}{\partial v}\Delta v,\ y_3\approx\psi(u,v)+\frac{\partial\psi}{\partial u}\Delta u+\frac{\partial\psi}{\partial v}\Delta v,$$
$$x_4\approx\varphi(u,v)+\frac{\partial\varphi}{\partial v}\Delta v,\ y_4\approx\psi(u,v)+\frac{\partial\psi}{\partial v}\Delta v.$$

При направените предположения четириъгълникът $P_1P_2P_3P_4$ може да се разглежда като успоредник, за чието лице от геометрията знаем, че е равно на

$$\left\|\begin{matrix} x_3-x_1 & y_3-y_1 \\ x_3-x_2 & y_3-y_2 \end{matrix}\right\| = \left\|\begin{matrix} \dfrac{\partial\varphi}{\partial u} & \dfrac{\partial\varphi}{\partial v} \\ \dfrac{\partial\psi}{\partial u} & \dfrac{\partial\psi}{\partial v} \end{matrix}\right\|\Delta u\Delta v=|J(u,v)|\Delta u\Delta v.$$

По този начин за лицето на $P_1P_2P_3P_4$ получихме

(15.17) $\mu(P_1P_2P_3P_4)\approx|J(u,v)|\mu(P_1'P_2'P_3'P_4')$.

Нека функцията $f(x,y)$ е интегруема над D_{xy}. Тогава интегралът се получава като граница на интегрални суми със събираеми от вида $f(P)\mu(P_1P_2P_3P_4)$, където P е някаква точка в $P_1P_2P_3P_4$. Съгласно (15.17) за това събираемо имаме

(15.18) $f(P)\mu(P_1P_2P_3P_4)\approx f(\varphi(P'),\psi(P'))|J(u,v)|\mu(P_1'P_2'P_3'P_4')$, където P' е точка в правоъгълника $P_1'P_2'P_3'P_4'$, следователно за римановите интегрални суми имаме

(15.19) $r(f,\tau)=\sum f(P)\mu(P_1P_2P_3P_4)\approx\sum f(\varphi(P'),\psi(P'))|J(u,v)|\mu(P_1'P_2'P_3'P_4')$.

Тук в дясната страна на $\approx$ стои риманова сума на интеграла

(15.20) $\iint\limits_{D_{uv}} f(\varphi(u,v),\psi(u,v))|J(u,v)|dudv$.

При интегрален граничен преход, лявата страна на (15.19) преминава в интеграла

$$\iint\limits_{D_{xy}} f(x,y)dxdy,$$

а дясната в интеграла (15.20). Може да се докаже, че натрупаната грешка от формула (15.18) при интегралния граничен преход клони към нула. По този начин получихме

Теорема 15.3. Нека изображението $\Phi: D_{uv}\to D_{xy}$ преобразува взаимно еднозначно измеримото множество D_{uv} в измеримото множество D_{xy}, координатните функции $x=\varphi(u,v)$ и $y=\psi(u,v)$ са непрекъснато диференцируеми в D_{uv} и $J(u,v)\neq 0$, $(u,v)\in D_{uv}$. Тогава, за всяка ограничена интегруема в D_{xy} функция $f(x,y)$ е в сила

(15.21) $\iint\limits_{D_{xy}} f(x,y)dxdy=\iint\limits_{D_{uv}} f(\varphi(u,v),\psi(u,v))|J(u,v)|dudv$. ■

Формулата (15.21) се нарича ***формула за смяна на променливите*** при двоен интеграл. Теорема 15.3 продължава да бъде вярна, даже и когато някое нейно условие е нарушено над множество с мярка нула.

При аналогични предположения за областта, якобиана и подинтегралната функция е валидна следната ***формула за смяна на променливите при троен интеграл***

$$\iiint\limits_{D_{xyz}} f(x,y,z)dxdydz=\iiint\limits_{D_{uvw}} f(x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w))|J(u,v,w)|dudvdw,$$

където якобианът се определя от детерминантата

$$J(u,v,w)=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w}\\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w}\end{vmatrix}.$$

Пример 15.2. Да пресметнем интеграла

$$I=\iint\limits_{D} xydxdy,$$

където D е областта от рис. 15.8. При смяната на променливите $x=\varphi(u,v)=u^{\frac{1}{3}}v^{-\frac{1}{3}}$ и $y=\psi(u,v)=u^{\frac{2}{3}}v^{\frac{1}{3}}$, D се превръща в правоъгълника $D_{uv}:\left|\begin{array}{l}1\le u\le 3\\ 1\le v\le 2\end{array}\right.$, а за якобиана имаме $J(u,v)=\frac{1}{3v}$. Като приложим формулата (15.21) намираме

$$I=\iint\limits_{\left|\begin{smallmatrix}1\le u\le 3\\ 1\le v\le 2\end{smallmatrix}\right.} u^{\frac{1}{3}}v^{-\frac{1}{3}}u^{\frac{2}{3}}v^{\frac{1}{3}}\frac{1}{3v}dudv=\frac{1}{3}\iint\limits_{\left|\begin{smallmatrix}1\le u\le 3\\ 1\le v\le 2\end{smallmatrix}\right.} dudv=\frac{1}{3}\left[\int_1^3 udu\right]\left[\int_1^2\frac{dv}{v}\right]=\frac{4}{3}\ln 2.$$

Тук се възползвахме от факта, че при наличните условия двойният интеграл се явява произведение на двата единични. Областта зададохме описателно под интегралния знак вместо да използваме символ за нея.

Преминаването към ***полярни*** координати е една от най-често използваните смени на променливите в равнината.

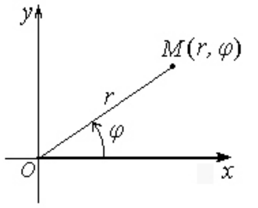

Рис. 15.12.

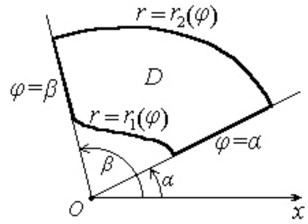

Рис. 15.13.

Всяка точка M от равнината (Рис. 15.12) се определя чрез своите полярни координати r и φ, където полярният радиус $r=\left|\overline{OM}\right|$, а полярният ъгъл е ъгълът, който сключва лъча $\overline{OM}$ с оста Ox, измерван в посока, обратна на движението на часовниковата стрелка. Формулите $x=r\cos\varphi$ и $y=r\sin\varphi$ дават връзката между декартовите и полярните координати. Естествените максимални граници за полярните променливи са интервалите $r\ge 0$ и $0\le\varphi<2\pi$ (или $-\pi<\varphi\le\pi$), които граници съответстват на цялата равнина R^2_{xy}, а всяко подмножество задава някакви ограничения върху тези интервали. За якобиана пресмятаме

$$J=J(r,\varphi)=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial\varphi}\\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial\varphi}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\cos\varphi & -r\sin\varphi\\ \sin\varphi & r\cos\varphi\end{vmatrix}=r\,.$$

В полярни координати (Рис. 15.13), секторът

$$D:\left|\begin{array}{c}\alpha\le\varphi\le\beta\\ r_1(\varphi)\le r\le r_2(\varphi)\end{array}\right.$$

представлява криволинеен трапец, което открива възможност двойният интеграл да се сведе до повторен. Освен това $x^2+y^2=r^2\cos^2\varphi+r^2\sin^2\varphi=r^2$, което позволява да се опростяват изрази, съдържащи такава група.

Пример 15.3. Да пресметнем интеграла

$$I=\iint\limits_D\frac{\ln\left(x^2+y^2\right)}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy\,,$$

където D (Рис. 15.14) е венецът $D:1\le x^2+y^2\le e^2$.

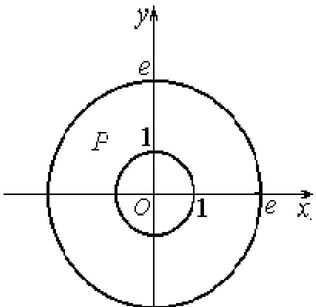

Рис. 15.14.

Преминаваме в полярни координати $x = r\cos\varphi$ и $y = r\sin\varphi$, при което за областта на интегриране имаме

$$D:\begin{vmatrix} 1 \le r \le e \\ 0 \le \varphi < 2\pi \end{vmatrix}$$

а якобианът $J = r$. От формулата за смяна на променливите получаваме

$$I = \iint\limits_{\substack{|1\le r\le e \\ |0\le\varphi<2\pi}} \frac{\ln r}{r} r dr d\varphi = \left[\int_1^e \ln r dr\right]\left[\int_0^{2\pi} d\varphi\right] = 2\pi\int_1^e \ln r dr ,$$

$$\int_1^e \ln r dr = r\ln r\Big|_1^e - \int_1^e r d\ln r = e - (e-1) = 1 ,$$

следователно $I = 2\pi$.

При тройните интеграли често се използва преминаване към ***цилиндрични*** (Рис. 15.15) или ***сферични*** (Рис. 15.16) координати.

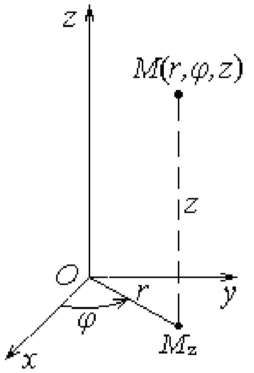

Рис. 15.15.

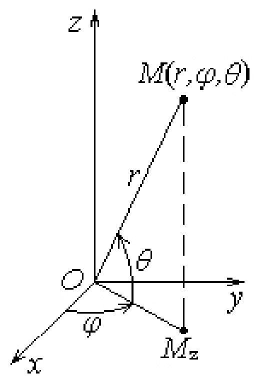

Рис. 15.16.

Цилиндричните (r,φ,z) координати представляват комбинация между полярните координати в равнината Oxy и декартовата координата z. Те са удобни за представяне на цилиндрични тела, а якобианът $J(r,\varphi,z) = r$.

Нека M е точка от R^3_{xyz} и нека M_z е ортогоналната проекция на тази точка в координатната равнина Oxy. Сферичните координати (r,φ,θ) на M са полярните координати на проекцията M_z и ъгълът θ, който сключва лъча $\overline{OM}$ с равнината Oxy. По този начин естествените максимални граници на тези променливи са интервалите $r \ge 0$, $0 \le \varphi < 2\pi$ (или $-\pi < \varphi \le \pi$) и $-\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$, които определят цялото пространство R^3, а всяко подмножество задава някакви ограничения върху тези интервали. Връзката между декартовите и сферичните координати се дава от формулите

$$x = r\cos\theta\cos\varphi,\ y = r\cos\theta\sin\varphi,\ z = r\sin\theta,$$

а за якобиана пресмятаме

$$J(r,\varphi,\theta) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial \theta} \end{vmatrix} = r^2\cos\theta .$$

Освен това $x^2+y^2+z^2=r^2$, което позволява да се опростяват изрази, съдържащи такава група.

Пример 15.4. Да пресметнем интеграла

$$I=\iiint\limits_D xydxdydz,$$

където D е тялото от първи октант $x\geq 0$, $y\geq 0$, $z\geq 0$, оградено от сферата $x^2+y^2+z^2=R^2$, $R>0$, и правия кръгов конус $x^2+y^2=z^2$ (Рис. 15.17)

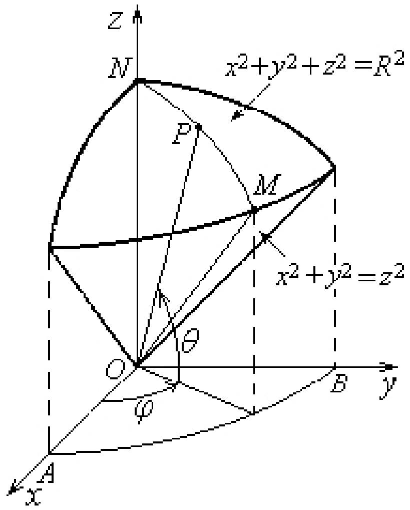

Рис. 15.17.

Нека $N(R,0,0)$ е пресечната точка на сферата с оста Oz, M е точка от пресечната линия на сферата и конуса, а P е точка от централната дъга от сферата, свързваща M и N. Тогава тялото D се състои от точките на всичките лъчи $\overline{OP}$, които в сферични координати се задават от ограниченията

$$0\leq\varphi\leq\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{4}\leq\theta\leq\frac{\pi}{2},\ 0\leq r\leq R.$$

След сферична смяна намираме

$$I=\iiint\limits_D r\cos\theta\cos\varphi\ r\cos\theta\sin\varphi\, r^2\cos\theta\, drd\varphi d\theta=\iiint\limits_D r^4\cos^3\theta\cos\varphi\sin\varphi\, drd\varphi d\theta,$$

$$I=\left[\int_0^R r^4dr\right]\left[\int_0^{\pi/2}\cos\varphi\sin\varphi\, d\varphi\right]\left[\int_{\pi/4}^{\pi/2}\cos^3\theta d\theta\right]=\frac{R^5}{120}\left(8-5\sqrt{2}\right).$$

Пресмятането на такива интеграли понякога може да се извърши ***без направата на чертеж***.

Пример 15.5. Да изчислим обема на тялото D, определено от условието $\left(x^2+y^2+z^2\right)^2\leq z$. В сферични координати това условие приема вида $r^4\leq r\sin\theta$ или $r\leq\sqrt[3]{\sin\theta}$. За φ не се получават ограничения, следователно остава $0\leq\varphi<2\pi$. Изискването $\sqrt[3]{\sin\theta}\geq r\geq 0$ означава, че $0\leq\theta\leq\dfrac{\pi}{2}$. Следователно в сферични координати, D има цилиндричен вид

$$D:\left|\begin{array}{l}(\varphi,\theta)\in\Omega\\ 0\leq r\leq\sqrt[3]{\sin\theta}\end{array}\right.$$

където Ω е правоъгълникът

$$\Omega: \left| \begin{array}{l} 0 \le \varphi < 2\pi \\ 0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{2} \end{array} \right. .$$

Обемът на тялото е

$$\mu(D) = \iiint_D dxdydz = \iiint_D r^2 \cos\theta dr d\varphi d\vartheta$$

От формулата за свеждане на троен интеграл към повторен получаваме

$$\mu(D) = \iint_\Omega \left[\int_0^{\sqrt[3]{\sin\theta}} r^2 \cos\theta dr \right] d\varphi d\vartheta = \iint_\Omega \left[\frac{1}{3} \cos\theta \sin\theta \right] d\varphi d\vartheta ,$$

$$\mu(D) = \left[\frac{1}{3} \int_0^{2\pi} d\varphi \right] \left[\int_0^{\pi/2} \cos\theta \sin\theta d\vartheta \right] = \frac{2\pi}{3} \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3} .$$