Лекция 18

§18. Вероятност на събитие. Схема на Бернули

1. Случайни събития. Събитие наричаме възможен изход от някакъв ***опит*** (експеримент). Например ако опитът се състои в хвърляне на правилен игрален зар, то едно събитие A можем да определим като появата на резултат 3. Друго събитие B може да се определи като появата на четен резултат. В резултат на опита въпросните събития могат да се сбъднат или не, затова казваме че опитът има ***случаен*** характер. В този случай пространството на елементарните събития Ω се състои от събитията ω_k, определени като появата на резултат k, $1 \le k \le 6$. Събитието A е елементарно, $A = \omega_3$, а събитието B е ***съставно***, понеже неговото сбъдване включва възможността за сбъдване на трите елементарни събития ω_2, ω_4 и ω_6, $B = \{\omega_2, \omega_4, \omega_6\}$. В подобни ситуации е полезно да имаме някаква обективна представа относно шанса за сбъдване на едно събитие, която задача води до определяне на понятието вероятност, което ще дефинираме по-нататък заедно с нужните за целта детайли.

Пример 18.1. Нека опитът се състои в хвърляне на два зара едновременно. Тогава е удобно елементарните събития да бъдат различавани посредством двойно индексиране,

ω_{ij} ="първият зар показва резултат i, а вторият резултат j", $1 \le i, j \le 6$.

В този случай, ако определим събитието A ="сборът от двете показания да се дели на 3", то A включва следните елементарни изходи

(18.1) $A = \{\omega_{1,2}, \omega_{1,5}, \omega_{2,1}, \omega_{2,4}, \omega_{3,3}, \omega_{3,6}, \omega_{4,2}, \omega_{4,5}, \omega_{5,1}, \omega_{5,4}, \omega_{6,3}, \omega_{6,6}\}$.

Всичките отделни възможни изходи от даден случаен опит се наричат ***елементарни събития***, а тяхната съвкупност обикновено се бележи с Ω. Елементарните събития се означават с ω_k, $k = 1, 2, \ldots$,. Техният брой може да бъде както краен така и безкраен.

Пример 18.2. Нека опитът се състои в хвърляне на правилна монета до първата поява на "герб". Тук елементарните събития се определят по следния начин: ω_k ="герб се появява за първи път при k-то подред хвърляне". Очевидно k би могло да бъде всяко естествено число.

Казаното дотук обосновава следното естествено определение. ***Случайно събитие A се нарича всяко подмножество на множеството от елементарните изходи Ω от даден случаен опит.*** Събитието A се сбъдва, когато в резултат на опита настъпва някой от неговите елементарни изходи.

Събитието $A = \Omega$ се нарича ***сигурно***, понеже винаги се сбъдва. С оглед на пълнота и удобство въвеждаме ***невъзможното*** събитие $\varnothing$, определено като празното подмножество на Ω. Всяко друго събитие включва възможността практически да се сбъдне или не в резултат на опита.

Между случайните събития могат да се въведат алгебрични операции, които отново водят до събития. Поради начина на определяне на понятието случайно събитие, тези операции са практически идентични със съответните операции между множества.

Събитието $\overline{A}$ се нарича ***противоположно*** на A, ако се сбъдва точно когато събитието A не се сбъдва. Като множество от елементарни изходи, $\overline{A}$ се явява допълнение на A относно Ω, $\overline{A} = \Omega \setminus A$. По този начин $\overline{A} \bigcup A = \Omega$.

Пример 18.3. Ако при хвърляне на зар събитието A означава резултатът да е четно число, то неговото противоположно $\overline{A}$ означава резултатът да бъде нечетно число.

Сумата $A+B$ на двете събития A и B се определя като събитие, което се сбъдва, когато се сбъдва поне едно от събитията A или B. Сумата $A+B$ включва възможността от едновременно сбъдване на двете събираеми. Разгледани като множество от елементарни събития, сумата представлява тяхното обединение $A\bigcup B$, затова понякога се означава и по този начин.

Пример 18.4. При хвърляне на зар, ако събитието A означава, че резултатът е четно число, а събитието B означава, че резултатът се дели на 3, то имаме

$A=\{\omega_2,\omega_4,\omega_6\}$, $B=\{\omega_3,\omega_6\}$, $A+B=\{\omega_2,\omega_3,\omega_4,\omega_6\}$.

Разликата $A-B$ $(A\setminus B)$ на двете събития A и B се определя като събитие, което се сбъдва, точно когато се сбъдва събитието A, но събитието B не се сбъдва. Разгледани като множество от елементарни събития, сумата представлява тяхната теоретикомножествена разлика $A\setminus B$, затова се означава понякога по същия начин. В предположенията на последния пример 18.4 имаме

$A-B=\{\omega_2,\omega_4\}$.

Произведение AB $(A\bigcap B)$ на двете събития A и B се определя като събитие, което се сбъдва, когато двете събития A и B се сбъдват едновременно. Разгледани като множество от елементарни събития, произведението представлява тяхното сечение $A\bigcap B$, затова понякога се означава и по този начин. В предположенията на последния пример 18.4 имаме

$AB=\{\omega_6\}$.

Операцията сума на събития се разпространява по естествен начин и върху повече от две събираеми. Например ако A_1, A_2 и A_3 са събития, то сумата $A_1+A_2+A_3$ се определя като събитие, което се сбъдва когато се сбъдва поне едно от събираемите, което включва възможността да се сбъднат трите едновременно или да се сбъднат едновременно някои две от тях, а третото да не се сбъдне.

Операцията произведение на събития се разпространява по естествен начин и върху повече от два множителя. Например ако A_1, A_2 и A_3 са събития, то произведението $A_1A_2A_3$ се определя като събитие, което се сбъдва когато трите множителя A_1, A_2 и A_3 се сбъдват едновременно.

Събитията A и B се наричат ***несъвместими***, когато не могат да се сбъднат едновременно, т.е. когато тяхното произведение представлява невъзможното събитие, $AB=\varnothing$. Например едно събитие A и неговото противоположно $\overline{A}$ винаги са несъвместими.

Операциите между събития притежават следните елементарни свойства, които се доказват непосредствено.

1) $A+\varnothing=\varnothing+A=A$, $A\varnothing=\varnothing A=\varnothing$.

2) $A+\Omega=\Omega$, $A\Omega=A$, $A+\overline{A}=\Omega$.

3) $A+B=B+A$, $AB=BA$.

4) $A+(B+C)=(A+B)+C=A+B+C$, $A(BC)=(AB)C=ABC$.

5) $A(B+C)=AB+AC$.

6) $A-B=A\overline{B}$, $\Omega-B=\Omega\overline{B}=\overline{B}$.

7) $C-(A+B)=(C-A)(C-B)$, $C-(AB)=(C-A)+(C-B)$.

8) $A+B=(A-B)+(B-A)+AB$.

В частност, когато $C=\Omega$, от свойство 7 получаваме законите на Де-Морган

$\overline{A+B}=\overline{A}\,\overline{B}$ и $\overline{AB}=\overline{A}+\overline{B}$.

2. Вероятност на събития. Вероятността $P(A)$ на дадено събитие A представлява обективна числова мярка относно шанса за неговото сбъдване. За описаните по-горе примери с хвърляне на зарове е естествено да определим вероятността като отношение на броя на елементарните изходи, при които събитието се сбъдва, към броя на всичките елементарни изходи. Такова определение изглежда напълно разумно и се оправдава в следващите теоретични конструкции.

Пример 18.5. Ако при хвърляне на зар, A е събитието резултатът да бъде четно число, то

$$P(A)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2},$$

понеже броят на елементарните изходи ω_2, ω_4 и ω_6, при които A се сбъдва е равен на 3, а броят на всичките изходи от този опит е равен на 6.

Пример 18.6. Ако при хвърляне на два зара, събитието A се определя сборът от показанията да се дели на 3, то за вероятността на A намираме

$$P(A)=\frac{12}{36}=\frac{1}{3},$$

понеже съгласно (18.1) броят на елементарните събития, при които A се сбъдва е равен на 12, а броят на всичките елементарни изходи е равен на 36.

В общия случай вероятността се определя посредством следната принципна формула, която се реализира по различни начини в различните вероятностни модели,

(18.2) $$\textit{вероятност} = \frac{\textit{мярка на благоприятното}}{\textit{мярка на общото}}.$$

Съгласно този принцип, вероятността винаги представлява число между 0 и 1.

Вероятността притежава следните основни свойства, които могат да се схващат в качеството на ***аксиоми***.

1) $0\le P(A)\le 1$, $P(\varnothing)=0$, $P(\Omega)=1$.

2) Ако събитията A и B са несъвместими, то $P(A+B)=P(A)+P(B)$.

Второто свойство се обобщава и за повече събираеми. Например, ако A_1, A_2 и A_3 са две по две несъвместими, то за тяхната сума е вярно

$$P(A_1+A_2+A_3)=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3) \text{ и т.н.}$$

Пълното теоретично обосноваване на вероятностните модели изисква още други конструкции и предположения, които излизат далеч зад възможностите на това изложение.

Теорема 18.1 (***за събиране на вероятностите***). Нека A и B са събития. Тогава за тяхната сума е в сила формулата

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB).$$

Доказателство. Събитията $A-B$ и AB са несъвместими и $A=(A-B)+AB$, също така $B-A$ и BA са несъвместими и $B=(B-A)+AB$, следователно

$$P(A)=P(A-B)+P(AB) \text{ и } P(B)=P(B-A)+P(AB),$$

следователно

$$P(A-B)+P(B-A)+2P(AB)=P(A)+P(B)$$

От друга страна събитията $A-B$, $B-A$ и AB са несъвместими, следователно

$$P(A+B)=P((A-B)+(B-A)+(AB))=P(A-B)+P(B-A)+P(AB),$$

откъдето след заместване в горния израз намираме

$$P(A+B)+P(AB)=P(A)+P(B),$$

което доказва теоремата. □

В случай на три събираеми A, B и C получаваме последователно

$$P(A+B+C)=P((A+B)+C)=P(A+B)+P(C)-P((A+B)C),$$

$$P(A+B+C)=P(A)+P(B)-P(AB)+P(C)-P(AC+BC),$$

$$P(A+B+C)=P(A)+P(B)-P(AB)+P(C)-P(AC)-P(BC)+P(ACBC),$$

$$P(A+B+C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC).$$

При четири събираеми се получава формулата

$$\begin{aligned}P(A+B+C+D)=P(A)+P(B)+P(C)+P(D)-\\ -P(AB)-P(AC)-P(AD)-P(BC)-P(BD)-P(CD)+\\ +P(ABC)+P(ABD)+P(ACD)+P(BCD)-P(ABCD)\end{aligned}$$

която добре илюстрира закономерността в общия случай на повече събираеми.

Твърдение 18.1. Нека A_1, A_2, ..., A_m са събития. Тогава

$$P\left(\sum_{i=1}^{m} A_i\right)=\sum_{i=1}^{m} P(A_i)-\sum_{i<j} P(A_iA_j)+\sum_{i<j<k} P(A_iA_jA_k)+\cdots+(-1)^{m-1}P(A_1A_2\cdots A_m).\ \square$$

В частния случай, когато събитията са две по две несъвместими, $A_iA_j=\varnothing$, за $i\neq j$, получаваме познатата проста формула за събиране на вероятностите при несъвместими две по две събития

$$P(A_1+A_2+\cdots+A_m)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_m).$$

Понеже A и $\overline{A}$ са несъвместими, винаги е изпълнено

$$P(A)+P(\overline{A})=P(A+\overline{A})=P(\Omega)=1,$$

следователно за вероятността на противоположното събитие имаме

$$P(\overline{A})=1-P(A).$$

При ***класическото определение за вероятност*** се разглежда опит с краен брой изходи, $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\ldots,\omega_n\}$, при което отделните елементарни изходи се приемат за равно възможни. По тази причина се полага

$$P(\omega_k)=\frac{1}{n},\ k=1,2,\ldots,n.$$

Ако $A=\{\omega_{k_1},\omega_{k_2},\ldots,\omega_{k_s}\}$ се състои от s на брой елементарни изхода, то съгласно формулата за събиране на вероятности имаме

$$P(A)=P(\omega_{k_1})+P(\omega_{k_2})+\cdots+P(\omega_{k_s})=\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\cdots+\frac{1}{n}=\frac{s}{n}=\frac{|A|}{|\Omega|}, \tag{18.3}$$

където $|A|$ означава броя на елементите на множеството A. Когато броят на елементарните изходи е безкраен, $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\ldots\}$, то различните елементарни изходи не могат да имат равни вероятности и формулата (18.3) е неприложима. Вероятностите $P(\omega_k)=p_k$, $k=1,2,\ldots$, на отделните елементарни изходи трябва да удовлетворяват условието

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_k=p_1+p_2+\cdots+p_n+\cdots=1,$$

т.е. редът с положителни членове $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ е сходящ и има сума 1. В този случай вероятността на събитието $A=\{\omega_{k_1},\omega_{k_2},\ldots\}$, което може да съдържа както краен брой така и безкраен брой елементарни изходи, се дава от формулата

(18.4) $P(A)=\sum_i P(\omega_{k_i})=P(\omega_{k_1})+P(\omega_{k_2})+\cdots.$

Вероятността на едно събитие е свързана с честотата на неговото сбъдване при последователни повторения на опита. Ако опитът се повтаря ***при едни и същи условия***, то при нарастване броя n на повторенията, се наблюдава стабилизация на относителната ***емпирична честота*** на сбъдване на дадено събитие A, която честота се определя като отношението $\frac{m}{n}$, където m е броят на наблюдаваните появи на събитието A. Този факт стои в основата на вероятностното мислене и представлява едно от най-важните оправдания за въвеждането на вероятностните модели. Например при опита с хвърляне на монета, вероятността на двете събития L="монетата показва лице" и G="монетата показва герб" преценяваме предварително като равни, $P(L)=P(G)=\frac{1}{2}$, понеже двете събития е разумно да разглеждаме като равно възможни. Това означава, че при нарастване повторенията на опитите, емпиричните честоти на двете събития трябва да се стабилизират около стойността 0.5. Ако обаче съществуват обективни причини двете събития да не са равно възможни, например ако монетата има фабричен дефект или опитите не се повтарят при едни и същи условия по независещи от експериментатора причини, то емпиричните честоти ще се стабилизират около различни от посочените във вероятностния модел стойности. Аналогична е ситуацията в опита с хвърляне на зар, когато вероятностите на различните 6 на брой елементарни изходи се оценяват предварително равни на $\frac{1}{6}$. В общия случай такива отклонения пораждат необходимостта от корекция във вероятностния модел, свързана с преоценка на разпределението на вероятностите на елементарните изходи. Всъщност една от задачите на математическата статистика се явява избор на подходящ вероятностен модел за даден опит въз основа на известен брой експериментални данни.

3. Геометрична вероятност. Последните две вероятностни схеми, при които вероятността се определя посредством формулите (18.3) и (18.4), се отнасят към ***дискретни вероятностни пространства***. Друга важна вероятностна схема се получава от идеята за ***геометрична вероятност***. Нека Ω е някакво точково множество, например ограничено измеримо равнинно множество с положително лице, $\mu(\Omega)>0$ и нека $A\subseteq\Omega$ е негово измеримо подмножество с лице $\mu(A)$ (рис. 18.1).

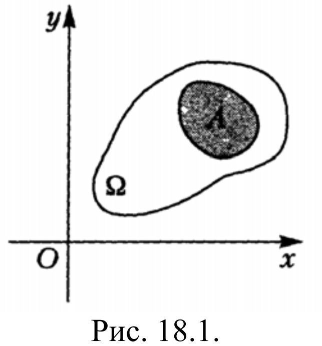

Рис. 18.1.

При геометричната вероятност се разглежда ***мислен опит*** за ***случаен избор*** на точка от множеството Ω. Нека събитието A означава случайно избраната точка да принадлежи на множеството A. Тогава следвайки принципа, заложен в (18.2), вероятността на събитието A определяме като отношението на мярката на A към мярката на Ω, (18.5) $P(A)=\dfrac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}$.

При тази схема събитията се отъждествяват с измеримите подмножества на Ω, затова използваме едни и същи означения за множество и събитие. Лесно се съобразява, че определената по формула (18.5) вероятност удовлетворява основните изисквания (аксиоми) на вероятността. В разглеждания случай $\Omega\subset\mathbb{R}^2$ и съгласно свойствата на двойния интеграл (18.5) може да се запише във вида

(18.6) $P(A)=\dfrac{\iint\limits_A dxdy}{\iint\limits_\Omega dxdy}$.

Идеята за геометрична вероятност може да се модифицира посредством въвеждане на теглова функция $f(x,y)$, която се предполага положителна и интегруема над Ω, при което (18.6) приема вида

$$P(A)=\frac{\iint\limits_A f(x,y)dxdy}{\iint\limits_\Omega f(x,y)dxdy}.$$

Схемата на геометричната вероятност работи по същия начин и когато Ω е тримерно множество или едномерно множество.

Пример 18.7. Нека $\Omega=[0,1]$, а събитието A означава случаен избор на точка от интервала $\left[\frac{1}{4},\frac{1}{3}\right]$. Тогава

$$P(A)=\frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}=\frac{\frac{1}{3}-\frac{1}{4}}{1-0}=\frac{1}{12}.$$

Понятието геометрична вероятност има ***фундаментална роля*** в цялата теория на вероятностите и математическата статистика. Независимо от първоначалната представа за абстрактност, геометричната вероятност има голям брой елементарни и интуитивно ясни интерпретации.

Пример 18.8. Да разгледаме опита, известен в литературата като ***игла на Бюфон***, който се състои в следното. В равнината са начертани успоредни прави с разстояние помежду, равно на $2a$, $a>0$. В тази равнина по случаен начин е хвърлена игла с дължина $2l$, $0<l<a$. Събитието A се състои в това, случайно хвърлената игла да пресича някоя от успоредните прави. За да определим вероятността на A разсъждаваме по следния начин.

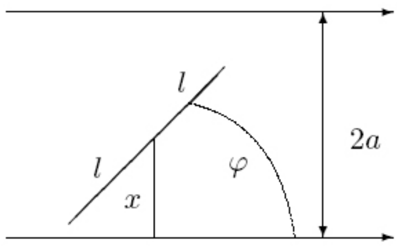

Рис. 18.2.

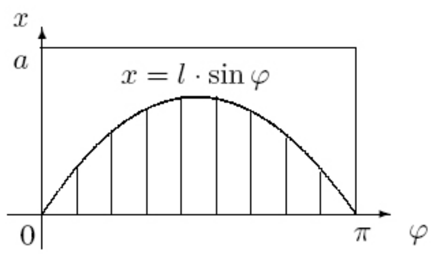

Рис. 18.3.

Възможните положения на иглата се определят от нейния център и ъгъла на завъртане (рис. 18.2) , при което тези два параметъра се менят независимо един от друг. Нека $x\in[0,a]$ представлява разстоянието от центъра на иглата до най-близката права, а φ е ъгълът, който сключва иглата с правите. Множеството от всевъзможните положения на иглата се определя по същество от случайно избрана точка от правоъгълника $\Omega = [0, \pi] \times [0, a]$ (рис. 18.3). Иглата пресича най-близката права когато $x \le l \sin \varphi$. Лицето на множеството $A \subset \Omega$, което удовлетворява това неравенство е

$$\mu(A) = \int_0^\pi l \sin \varphi d\varphi = 2l,$$

следователно за вероятността на A е изпълнено

$$(18.7) \quad P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)} = \frac{2l}{a\pi}.$$

Формулата (18.7) открива своеобразна възможност за приблизително пресмятане на една от най-важните константи в математиката – числото π. Тази възможност предизвиква определено любопитство и поради факта, че опита с иглата на Бюфон може да бъде симулиран с помощта на компютър. Фактът, че константата π може да се оценява посредством игра на случайността показва още веднъж силата на идеята за геометрична вероятност.

4. Условна вероятност. Определено може да се твърди, че истинската теория на вероятностите започва с определянето на понятието условна вероятност. Нека при опит с елементарни изходи Ω по някакви причини е известно, че се е сбъднало събитието $B \subseteq \Omega$, $P(B) > 0$. Въз основа на тази информация искаме да преценим шанса за сбъдване на някое друго събитие $A \subseteq \Omega$. Тази ситуация е илюстрирана на рис. 18.4.

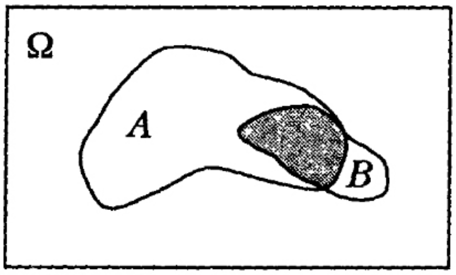

Рис. 18.4.

(1, 6)	$\boxed{(2, 6)}$	(3, 6)	(4, 6)	(5, 6)	(6, 6)
(1, 5)	(2, 5)	$\boxed{(3, 5)}$	(4, 5)	(5, 5)	(6, 5)
(1, 4)	(2, 4)	(3, 4)	$\boxed{(4, 4)}$	(5, 4)	(6, 4)
(1, 3)	(2, 3)	(3, 3)	(4, 3)	$\boxed{(5, 3)}$	(6, 3)
(1, 2)	(2, 2)	(3, 2)	(4, 2)	(5, 2)	$\boxed{(6, 2)}$
(1, 1)	(2, 1)	(3, 1)	(4, 1)	(5, 1)	(6, 1)

Рис. 18.5.

Възможността за сбъдване на събитието A се определя от общата част на A и B, т.е. от събитието, което определихме вече като произведение на събитията A и B, което геометрично се идентифицира със сечението на двете множества. По този начин, следвайки принципа на формула (18.2), ***условната вероятност*** $P(A \mid B)$ на събитието A при условие B се определя като отношението

$$(18.8) \quad P(A \mid B) = \frac{\mu(A \cap B)}{\mu(B)} = \frac{P(AB)}{P(B)}.$$

Тук ролята на Ω се поема от B, а събитието A се свежда до събитието AB. Непосредствено се проверява, че описаната конструкция задава вероятностен модел, при изпълнение основните свойства на вероятността. Условна вероятност не се определя, когато $P(B) = 0$.

Пример 18.9. Да разгледаме опита с хвърляне на два зара. Събитието B се определя като $B=$"сборът от показанията е равен на 8", а събитието A се определя като $A=$"двата зара показват едно и също число". Търсим условната вероятност $P(A \mid B)$. Тук всичките елементарни изходи са показани на рис. 18.5, при което елементарните изходи за събитието B са оградени. От елементарните изходи, които са благоприятни за сбъдване на събитието B, само един води до сбъдване на събитието A, следователно

$$P(A \mid B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{\dfrac{|A \cap B|}{|\Omega|}}{\dfrac{|B|}{|\Omega|}} = \frac{\dfrac{1}{36}}{\dfrac{5}{36}} = \frac{1}{5},$$

което в частност показва, че до същия извод бихме стигнали следвайки класическото определение за вероятност при опит с краен брой изходи

$$P(A \mid B) = \frac{|A \cap B|}{|B|} = \frac{1}{5}.$$

От дадените определения веднага следва верността на

Теорема 18.2 (***за умножение на вероятностите***). Нека A и B са събития, $P(B) > 0$. Тогава за тяхното произведение е в сила

(18.9) $P(AB) = P(A \mid B)P(B)$. □

Пример 18.10. Да разгледаме опит при който от дадена урна, съдържаща 4 бели и 7 черни сфери изваждаме по случаен начин две сфери. Търсим вероятността на събитието A и двете извадени сфери да бъдат бели. За да решим задачата въвеждаме двете помощни събития B="първата извадена сфера е бяла" и C="втората извадена сфера е бяла". По условие имаме $A = BC$, следователно от формулата за умножение на вероятностите (18.9) намираме

$$P(A) = P(BC) = P(C \mid B)P(B).$$

За вероятността на B пресмятаме по очевиден начин

$$P(B) = \frac{4}{4+7} = \frac{4}{11}.$$

Условната вероятност $P(C \mid B)$ намираме по следните съображения. След като се е случило събитието B, в урната са останали 3 бели и всичките 7 черни сфери, следователно

$$P(C \mid B) = \frac{3}{3+7} = \frac{3}{10}.$$

Сега след заместване за търсената вероятност на събитието A намираме

$$P(A) = P(C \mid B)P(B) = \frac{3}{10}\frac{4}{11} = \frac{12}{110}.$$

В случая на три събития, прилагайки последователно формулата (18.9) получаваме

$$P(ABC) = P(A \mid BC)P(BC) = P(A \mid BC)P(B \mid C)P(C).$$

За четири събития имаме

$$P(ABCD) = P(A \mid BCD)P(BCD) = P(A \mid BCD)P(B \mid CD)P(CD) =$$
$$= P(A \mid BCD)P(B \mid CD)P(C \mid D)P(D)$$

която добре илюстрира закономерността в общия случай на повече множители.

Твърдение 18.2. Нека A_1, A_2, ..., A_m са събития. Тогава

$$P\left(\prod_{k=1}^{m} A_k\right) = P(A_1)P(A_2 \mid A_1)P(A_3 \mid A_1A_2)\cdots P(A_n \mid A_1A_2\cdots A_{n-1}).$$ □

Пример 18.11. Да разгледаме отново урна с 4 бели и 7 черни сфери, от която този път изваждаме по случаен начин три сфери. Търсим вероятността на събитието A и трите извадени сфери да бъдат бели. Сега въвеждаме три помощни събития B="първата извадена сфера е бяла", C="втората извадена сфера е бяла" и D="третата извадена сфера е бяла". По условие имаме $A = BCD$, следователно общата формула за умножение на вероятностите имаме

$$P(A) = P(BCD) = P(D \mid BC)P(C \mid B)P(B).$$

Разсъждавайки по същия начин пресмятаме

$$P(B) = \frac{4}{4+7} = \frac{4}{11}, \; P(C \mid B) = \frac{3}{3+7} = \frac{3}{10} \text{ и } P(D \mid BC) = \frac{2}{2+7} = \frac{2}{9},$$

следователно

$$P(A) = P(D \mid BC)P(C \mid B)P(B) = \frac{2}{9}\frac{3}{10}\frac{4}{11} = \frac{24}{990}.$$

Двете събития A и B се наричат ***независими***, когато е изпълнено

(18.10) $P(AB) = P(A)P(B)$.

Когато не е изпълнено (18.1), събитията A и B се наричат ***зависими***. Ако A и B са независими, то от (18.9) и (18.10) за условните вероятности намираме

$$P(A \mid B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{P(A)P(B)}{P(B)} = P(A) \text{ и } P(B \mid A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{P(A)P(B)}{P(A)} = P(B),$$

което показва, че условните вероятности на събитията A и B са равни на техните безусловни вероятности. С други думи обективната оценка за шанса дали ще се сбъдне едно от тези събития не зависи от факта дали се е сбъднало другото. Такава интерпретация на понятието независимост на две събития напълно съответства на интуитивния смисъл, който влагаме при ежедневната употреба на думата независимост.

Независимостта на две събития на практика означава, че те са съвместими, понеже ако A и B са несъвместими, то $P(AB) = 0$ и формулата (18.10) може да бъде вярна само когато $P(A) = 0$ или $P(B) = 0$.

Ако A и B са независими, то A и $\overline{B}$ също са независими, понеже $A = (A - B) + AB$, при което $A - B$ и AB са несъвместими, следователно

$$P(A\overline{B}) = P(A - B) = P(A) - P(AB) = P(A) - P(A)P(B) = P(A)(1 - P(B)) = P(A)P(\overline{B}).$$

Когато A и B са независими събития, то формулата за събиране на вероятностите приема вида

(18.11) $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A)P(B)$.

Пример 18.12. Двама снайперисти обстрелват независимо един от друг цел, при което вероятността първият да порази целта е равна на 0.8, а вероятността вторият да порази целта е равна на 0.9. Търсим вероятността на събитието A, след произвеждана по един изстрел от всеки снайперист, целта да бъде поразена. За да решим поставената задача въвеждаме събитията B="първият снайперист поразява целта" и C="вторият снайперист поразява целта". По условие $A = B + C$ и освен това събитията B и C се предполагат независими, следователно от формулата (18.11) намираме

$$P(A) = P(B + C) = P(B) + P(C) - P(B)P(C) = 0.8 + 0.9 - 0.8 * 0.9.$$

Понятието независимост се пренася и за случая на повече от две събития. Събитията A_1, A_2, ..., A_m се наричат ***независими по съвкупност***, когато за всяко тяхно подмножество A_{k_1}, A_{k_2}, ..., A_{k_s} е изпълнено

$$P(A_{k_1} A_{k_2} \cdots A_{k_s}) = P(A_{k_1})P(A_{k_2}) \cdots P(A_{k_s}).$$

Например независимостта по съвкупност за три събития A, B и C означава, че са налице всичките равенства $P(AB) = P(A)P(B)$, $P(AC) = P(A)P(C)$, $P(BC) = P(B)P(C)$ и $P(ABC) = P(A)P(B)P(C)$. По този начин формулата за събиране на вероятностите за три независими по съвкупност събития A, B и C приема вида

$$P(A+B+C)=P(A)+P(B)+P(C)-$$
$$-P(A)P(B)-P(A)P(C)-P(B)P(C)+P(A)P(B)P(C)$$

Независимостта по съвкупност означава, че вероятността за сбъдване на кое да е от тези събития не зависи от това какво се е случило с останалите събития.

Пример 18.13. (Бернщайн) Даден е правилен тетраедър, едната стена на който е оцветена в бяло, втората стена е оцветена в черно, третата стена е оцветена в синьо, а на четвъртата страна са отбелязани и трите цвята – бяло, черно и синьо. Избираме по случаен начин една стена, например посредством хвърляне върху някаква плоскост и отбелязване стената, върху която е паднал тетраедърът. Разглеждаме следните събития: A="на отбелязаната стена има бял цвят", B="на отбелязаната стена има черен цвят" и C="на отбелязаната стена има син цвят". Съгласно правилата за пресмятане на вероятността имаме

$$P(A)=P(B)=P(C)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2},$$

$$P(AB)=P(AC)=P(BC)=\frac{1}{4},$$

$$P(ABC)=\frac{1}{4}.$$

Тук е налице

$$P(AB)=P(A)P(B),\ P(AC)=P(A)P(C) \text{ и } P(BC)=P(B)P(C),$$

следователно събитията A, B и C са две по две независими, обаче

$$P(ABC)=\frac{1}{4}\neq P(A)P(B)P(C)=\frac{1}{8},$$

следователно тези събития са зависими по съвкупност.

5. Формула за пълната вероятност и формула на Бейс. Нека H_1, H_2, ..., H_n е система от събития в пространството на елементарните изходи Ω, които са две по две несъвместими и покриват цялото Ω, което означава, че $H_iH_j=\varnothing$ при $i\neq j$, $1\leq i,j\leq n$, и освен това

$$H_1+H_2+\cdots+H_n=\Omega.$$

В този случай казваме, че събитията, които се наричат още ***хипотези***, H_1, H_2, ..., H_n образуват ***пълна система от несъвместими събития***. Нека $A\subseteq\Omega$ е някакво събитие. Тогава от основните свойствата на събитията имаме

$$A=A\Omega=A(H_1+H_2+\cdots+H_n)=AH_1+AH_2+\cdots+AH_n,$$

при което събитията AH_i и AH_j са несъвместими, $(AH_i)(AH_j)=AH_iH_j=A\varnothing=\varnothing$, при $i\neq j$. Тогава съгласно правилото за събиране на вероятности на несъвместими събития имаме

(18.12) $P(A)=P(AH_1)+P(AH_2)+\cdots+P(AH_n)$.

От друга страна съгласно правилото за умножение на вероятности е изпълнено

$$P(AH_k)=P(A\mid H_k)P(H_k),\ k=1,2,\ldots,n,$$

откъдето след заместване в (18.1) получаваме

$$P(A)=P(A\mid H_1)P(H_1)+P(A\mid H_2)P(H_2)+\cdots+P(A\mid H_n)P(H_n),$$

което се нарича ***формула за пълната вероятност***.

Прилагайки отново правилото за умножение на вероятности получаваме

$$P(H_k\mid A)=\frac{P(H_kA)}{P(A)}=\frac{P(A\mid H_k)P(H_k)}{P(A)},\ k=1,2,\ldots,n,$$

откъдето въз основа на формулата за пълната вероятност намираме

(18.13) $$P(H_k \mid A) = \frac{P(A \mid H_k)P(H_k)}{P(A \mid H_1)P(H_1) + P(A \mid H_2)P(H_2) + \cdots + P(A \mid H_n)P(H_n)},$$

което се нарича ***формула на Бейс***.

Условната вероятност $P(H_k \mid A)$ се нарича още ***апостериорна*** (след опита) вероятност, докато вероятността $P(H_k)$ се нарича ***априорна*** (до опита) вероятност. Заложената идея във формулата на Бейс, има огромно значение в теорията на вероятностите и математическата статистика, понеже представлява механизъм за модификация на даден вероятностен модел на базата на известни от опита данни.

Пример 18.14. Да разгледаме опит с три урни, първата от които съдържа 5 бели и 5 черни сфери, втората съдържа 4 бели и 6 черни сфери, а третата съдържа 3 бели и 7 черни сфери. От случайно избрана урна по случаен начин се избира една сфера. Събитието A се определя като изтеглената по този случаен начин сфера да бъде бяла. Търси се вероятността на събитието A и освен това, ако след опита е известно, че избраната сфера се е оказала бяла, да се определи вероятността въпросната сфера да е била избрана точно от третата урна. За да решим поставената задача въвеждаме събитията:

H_1="сферата е изтеглена от първата урна";

H_2="сферата е изтеглена от втората урна";

H_3="сферата е изтеглена от третата урна".

По условие изборът между трите урни е равно възможен, следователно

$$P(H_1) = P(H_2) = P(H_3) = \frac{1}{3}.$$

За условните вероятности непосредствено пресмятаме

$$P(A \mid H_1) = \frac{5}{5+5} = \frac{5}{10},\ P(A \mid H_1) = \frac{4}{4+6} = \frac{4}{10} \text{ и } P(A \mid H_1) = \frac{3}{3+7} = \frac{3}{10}.$$

Сега съгласно формулата за пълната вероятност (18.1) пресмятаме

$$P(A) = P(A \mid H_1)P(H_1) + P(A \mid H_2)P(H_2) + P(A \mid H_3)P(H_3),$$

$$P(A) = \frac{5}{10}\frac{1}{3} + \frac{4}{10}\frac{1}{3} + \frac{3}{10}\frac{1}{3} = \frac{2}{5}.$$

Във втората част от условието се търси условната вероятност $P(H_3 \mid A)$. По формулата (18.13) на Бейс намираме

$$P(H_3 \mid A) = \frac{P(A \mid H_3)P(H_3)}{P(A \mid H_1)P(H_1) + P(A \mid H_2)P(H_2) + P(A \mid H_3)P(H_3)},$$

$$P(H_3 \mid A) = \frac{\frac{3}{10}\frac{1}{3}}{\frac{5}{10}\frac{1}{3} + \frac{4}{10}\frac{1}{3} + \frac{3}{10}\frac{1}{3}} = \frac{1}{4}.$$

Тук апостериорната вероятност на H_3 се оказа по-малка от априорната.

6. Схема на Бернули. В този раздел ще разглеждаме сложен опит, който се състои в известен брой независими повторения на даден единичен (прост) опит с два възможни изхода ω_0 и ω_1, които се сбъдват с вероятности съответно p и $q = 1 - p$, където $0 < p < 1$. Да означим с A събитието на сбъдване на изхода ω_0. Тогава неговото противоположно събитие $\overline{A}$ означава сбъдване на алтернативния изход ω_1. По условие $P(A) = p$ и $P(\overline{A}) = P(\omega_1) = q$. Нека броят на независимите повторения е n. Описаният сложен вероятностен експеримент се нарича ***схема на Бернули***. Понякога за краткост сбъдването на събитието A в пореден опит ще наричаме ***успех***.

За удобство при описване елементарните изходи от сложния опит въвеждаме означение от вида $A\overline{A}A$, което в този случай показва серия от 3 опита в първия от които събитието A се е сбъднало, във втория опит не се е сбъднало (сбъднало се е неговото противоположно) и в третия случай отново се е сбъднало. Например $AAAA$ означава серия от 4 опита, във всеки от които събитието A се е сбъднало. При $n=1$ сложният опит не се различава от единичния. При $n=2$ имаме 4 на брой елементарни изхода, описани по-долу заедно със съответните вероятности

$$AA,\ P(AA)=P(A)P(A)=pp,$$
$$A\overline{A},\ P(A\overline{A})=P(A)P(\overline{A})=pq,$$
$$\overline{A}A,\ P(\overline{A}A)=P(\overline{A})P(A)=qp,$$
$$\overline{A}\overline{A},\ P(\overline{A}\overline{A})=P(\overline{A})P(\overline{A})=qq.$$

За пресмятането на тези вероятности използваме правилото за умножение на вероятности при независими събития. Разсъждавайки аналогично при $n=3$ намираме следните елементарни изходи с техните вероятности

$$AAA,\ P(AAA)=P(A)P(A)P(A)=ppp,$$
$$AA\overline{A},\ P(AA\overline{A})=P(A)P(A)P(\overline{A})=ppq,$$
$$A\overline{A}A,\ P(A\overline{A}A)=P(A)P(\overline{A})P(A)=pqp,$$
$$A\overline{A}\overline{A},\ P(A\overline{A}\overline{A})=P(A)P(\overline{A})P(\overline{A})=pqq,$$
$$\overline{A}AA,\ P(\overline{A}AA)=P(\overline{A})P(A)P(A)=qpp,$$
$$\overline{A}A\overline{A},\ P(\overline{A}A\overline{A})=P(\overline{A})P(A)P(\overline{A})=qpq,$$
$$\overline{A}\overline{A}A,\ P(\overline{A}\overline{A}A)=P(\overline{A})P(\overline{A})P(A)=qqp,$$
$$\overline{A}\overline{A}\overline{A},\ P(\overline{A}\overline{A}\overline{A})=P(\overline{A})P(\overline{A})P(\overline{A})=qqq.$$

Анализираните частни случаи добре показват основните закономерности в общия случай. Лесно се съобразява, че с всяко следващо повторение броят на елементарните изходи се удвоява, следователно броят на елементарните изходи при серия от n опита е равен на 2^n. Всичките елементарни изходи могат да се получат, ако разкрием скобите във формалното произведение

$$(A+\overline{A})^n=(A+\overline{A})(A+\overline{A})\cdots(A+\overline{A}),$$

без да разместваме множителите и следователно без да групираме събираемите с еднакви степени пред A и $\overline{A}$. Съответните вероятности се получават като направим същото с произведението

(18.14) $(p+q)^n=(p+q)(p+q)\cdots(p+q).$

Да въведем сега събитията A_k^n, които означават, че при дадената серия от n опита, събитието се е сбъднало точно при k от случаите, $k=0,1,2,\ldots,n$. Например за $n=3$ и $k=2$ събитието A_2^3 съдържа следните елементарни изходи

$$A_2^3=\{AA\overline{A},A\overline{A}A,\overline{A}AA\},$$

а за неговата вероятност имаме

(18.15) $P(A_2^3)=P(AA\overline{A})+P(A\overline{A}A)+P(\overline{A}AA)=ppq+pqp+qpp=3p^2q.$

От друга страна от познатата формула получаваме

(18.16) $(p+q)^3=p^3+3p^2q+3pq^2+q^3.$

Вероятността $P\left(A_2^3\right)$ се оказа равна на съответното събираемо в от развитието (18.5) на бинома на Нютон от степен 3, което развитие се получава от (18.3) след групиране на събираемите с равни степени пред p и q. Това съвпадение произтича от естеството на събитието A_2^3, понеже A_2^3 събира всичките елементарни изходи, в които точно 2 пъти събитието се е сбъднало, което е степента на p във формулата (18.4) и следователно точно 1 път не се е сбъднало, колкото е степента на q в същата формула.

В случая на произволно n, формулата (18.5) има вида

(18.17) $$(p+q)^n = p^n + np^{n-1}q + \frac{n(n-1)}{2}p^{n-2}q^2 + \cdots + \frac{n(n-1)}{2}p^2q^{n-2} + npq^{n-1} + q^n.$$

Общият член в (18.17) се записва по формулата

$$\binom{n}{k}p^k q^{n-k},\ k = 0,1,2,\ldots,n,$$

където $\binom{n}{k}$ е познатият биномен коефициент.

При схемата на Бернули се говори за ***биномно разпределение*** на верятностите.

От направените разсъждения следва верността на

Твърдение 18.3. Вероятността $P_n(k)$ за точно k появи на събитието A в серия от n на брой независими опита е равна на

(18.18) $$P_n(k) = \binom{n}{k}p^k q^{n-k},\ k = 0,1,2,\ldots,n. \ \square$$

Формулата (18.18) задава вероятността за броя на успехите при схемата на Бернули.

Пример 18.15. Да разгледаме серия от 10 на брой независими хвърляния на правилна монета. Търсим вероятността на събитието A, броят на появата на лице да бъде между 4 и 6. Тук имаме схема на Бернули $n = 5$ и $p = q = \dfrac{1}{2}$. По условие събитието A се състои следния сбор на три несъвместими събития

$$A = A_4^{10} + A_5^{10} + A_6^{10}.$$

Сега от формулата за вероятностите намираме

$$P(A) = P\left(A_4^{10}\right) + P\left(A_5^{10}\right) + P\left(A_6^{10}\right),$$

$$P(A) = \binom{10}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^6 + \binom{10}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^5\left(\frac{1}{2}\right)^5 + \binom{10}{6}\left(\frac{1}{2}\right)^6\left(\frac{1}{2}\right)^4.$$

Да предположим, че n нараства, при което $np \to \lambda$ при $n \to \infty$. Да означим $np = \lambda_n$ и да преобразуваме (18.18) последователно

$$P_n(k) = \binom{n}{k}p^k q^{n-k} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!}\left(\frac{\lambda_n}{n}\right)^k\left(1-\frac{\lambda_n}{n}\right)^{n-k},$$

(18.19) $$P_n(k) = \frac{\lambda_n^k}{k!}\left(1-\frac{\lambda_n}{n}\right)^n\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\left(1-\frac{\lambda_n}{n}\right)^{-k}.$$

Тук k е постоянно, а $\lambda_n \to \lambda$ при $n \to \infty$. Вече сме готови да докажем

Теорема 18.3 (***Поасон***). Нека $np \to \lambda$ при $n \to \infty$. Тогава за всяко фиксирано k е изпълнено граничното съотношение

(18.20) $P_n(k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}\to\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$ при $n\to\infty$.

Доказателство. Във формулата (18.19), при $n\to\infty$ имаме

$$\frac{\lambda_n^k}{k!}\to\frac{\lambda^k}{k!},\ \left(1-\frac{\lambda_n}{n}\right)^n\to e^{-\lambda},$$

а всички останали множители клонят към 1, което доказва теоремата. □

Освен теоремата на Поасон, за приближено пресмятане на вероятностите $P_k(n)$ може да се използва и ***локалната теорема на Моавър-Лаплас***, според която

$$P_n(k)\approx\frac{1}{\sqrt{2\pi npq}}e^{-\frac{(k-np)^2}{2npq}}.$$

Формулата (18.20) дава основание да разгледаме дискретно вероятностно пространство с безбройно много изходи ω_k, $k=0,1,2,\dots$, с вероятности $p_k=P(\omega_k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$. Съгласно развитието на експоненциалната функция в ред на Маклорен, имаме

$$e^{\lambda}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}=1+\lambda+\frac{\lambda^2}{2}+\frac{\lambda^3}{6}+\cdots,$$

следователно вероятностите p_0, p_1, p_2,..., удовлетворяват условието за съгласуваност

$$\sum_{k=0}^{\infty}p_k=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}=e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}=e^{-\lambda}e^{\lambda}=1.$$

Да разгледаме сега сложен опит, който се състои в серия от независими повторения на даден прост опит с два възможни изхода, както при схемата на Бернули. Тук обаче опитът се прекратява при първо сбъдване на събитието A. В този случай имаме безбройно много елементарни изходи, които по аналогия с разсъждението при схемата на Бернули, могат да се представят както следва

$$\omega_1\sim A,\ P(\omega_1)=P(A)=p,$$
$$\omega_2\sim\overline{A}A,\ P(\omega_2)=P(\overline{A}A)=P(\overline{A})P(A)=qp,$$
$$\omega_3\sim\overline{A}\overline{A}A,\ P(\omega_3)=P(\overline{A}\overline{A}A)=P(\overline{A})P(\overline{A})P(A)=q^2p,$$
$$\omega_4\sim\overline{A}\overline{A}\overline{A}A,\ P(\omega_4)=P(\overline{A}\overline{A}\overline{A}A)=P(\overline{A})P(\overline{A})P(\overline{A})P(A)=q^3p,$$

и т.н. За сумата от вероятностите на елементарните изходи имаме

$$P(\omega_1)+P(\omega_2)+P(\omega_3)+P(\omega_4)+\cdots=q\left(1+p+p^2+p^3+\cdots\right)=q\frac{1}{1-p}=1.$$

В този случай говорим за ***геометрично разпределение*** на вероятностите.

Пример 18.16. Да разгледаме опита с хвърляне на зар, при който събитието A означава, че зарът показва 6. Тук отчитаме само два изхода – зарът показва 6 (събитието A се сбъдва) и зарът показва число, различно от 6 (събитието A не се сбъдва). Искаме да определим вероятността на събитието $B=$"зарът ще покаже 6 за не повече от 3 хвърляния". Тази задача ще решим посредством схемата на геометрично разпределение на вероятностите. Имаме $p=\frac{1}{6}$, $q=1-p=\frac{5}{6}$, а събитието B по определение се състои от елементарните изходи ω_1, ω_2 и ω_3. За вероятността на B пресмятаме

$$P(B)=P(\omega_1)+P(\omega_2)+P(\omega_3)=q\left(1+p+p^2\right)=q\frac{1-p^3}{1-p}=1-p^3=1-\frac{1}{6^3}$$

Най-вероятен брой успехи в схемата на Бернули. При всяко естествено n формулата (18.18) задава редица от вероятности $P_n(0)$, $P_n(1)$, $P_n(2)$, ..., $P_n(n)$. Определен интерес представлява въпросът коя от тези вероятности е най-голямата по стойност. За тази цел да разгледаме отношението на две последователни вероятности $P_n(k)$ и $P_n(k+1)$, $0 \le k < n$. Имаме

$$\frac{P_n(k+1)}{P_n(k)} = \frac{\binom{n}{k+1} p^{k+1} q^{n-k-1}}{\binom{n}{k} p^k q^{n-k}} = \frac{\dfrac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!}}{\dfrac{n!}{k!(n-k)!}} \frac{p}{q},$$

$$\frac{P_n(k+1)}{P_n(k)} = \frac{n-k}{k+1} \frac{p}{q},$$

следователно

$$\frac{P_n(k+1)}{P_n(k)} - 1 = \frac{P_n(k+1) - P_n(k)}{P_n(k)} = \frac{n-k}{k+1} \frac{p}{q} - 1 = \frac{np - kp - kq - q}{(k+1)q},$$

$$\text{(18.21)} \quad \frac{P_n(k+1) - P_n(k)}{P_n(k)} = \frac{np - q - k}{(k+1)q}.$$

Теорема 18.4. Ако $np - q$ не е цяло число, то най-голямата стойност на редицата $\{P_n(k)\}$ се достига при $k = m$, където m е единственото цяло число в интервала $[np - q, np + p]$. Ако $np - q$ е цяло число, то най-голямата стойност на редицата $\{P_k(n)\}$ се достига при две съседни значения на k, $k = np - q$ и $k = np + p$.

Доказателство. От равенството (18.21) получаваме, че ако $k < np - q$, то $P_n(k+1) > P_n(k)$ и ако $k > np - q$, то $P_n(k+1) < P_n(k)$. Тук са налице две възможности. **1**) Нека $np - q$ не е цяло число. Тогава нека m е единственото цяло число, което се съдържа в интервала $[np - q, np - q + 1] = [np - q, np + p]$. Този интервал съдържа само едно цяло число, понеже има дължина 1 и краищата му не са цели числа. От направеното разсъждение следва, че при $k = 0,1,\ldots,m-1$, имаме $P_n(k+1) > P_n(k)$, т.е.

$$P_n(0) < P_n(1) < P_n(2) < \cdots < P_n(m-1) < P_n(m).$$

При $k = m, m+1, \ldots, n-1$ имаме $P_n(k+1) < P_n(k)$, т.е.

$$P_n(m) > P_n(m+1) > \cdots > P_n(n).$$

С други думи, редицата $\{P_n(k)\}$ расте до $k = m$, след което намалява. В този случай най-голямата стойност на $P_n(k)$ се достига за $k = m$. **2**) Нека сега $np - q$ е цяло число. Тогава интервалът $[np - q, np + p]$ съдържа точно две цели числа – неговите краища $np - q$ и $np + p$. Да положим $m = np - q$. Тогава разсъждавайки както в първия случай получаваме, че редицата $\{P_n(k)\}$ расте до $k = m$, $P_n(m) = P_n(m+1)$, след което намалява до $k = n$. В този случай поставената задача има две решения, m и $m + 1$. □

И в двата случая за най-вероятния брой успехи m имаме

$$np - q \le m \le np + p,$$

което след разделяне на n приема вида

$$p - \frac{q}{n} \le \frac{m}{n} \le p + \frac{p}{n}.$$

Последното показва, че най-вероятната емпирична честота $\frac{m}{n}$ на поява на събитието A при серия от n повторения става все по близка до вероятността p на това събитие,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{m}{n}=p.$$

Пример 18.17. Да разгледаме серия от $n=20$ независими повторения на опит, при който събитието A се сбъдва с вероятност $p=0.3$. Тук имаме $np-q=20*0.3-0.7=5.3$, което не е цяло число. Единственото цяло число в интервала $[np-q,np+p]=[5.3,6.3]$ е числото $m=6$, което и дава най-вероятния брой на успехите при тази схема на Бернули.

Схемата на Бернули може да се обобщи за случая, когато единичният опит има повече от два елементарни изхода. Нека единичният опит е свързан с s на брой елементарни изходи ω_1, ω_2, ..., ω_s с вероятности p_1, p_2, ..., p_s. Нека събитието A_k означава сбъдването на изхода ω_k, $k=1,2,\dots,s$. Тук се поставя въпросът за вероятността при серия от n на брой независими единични опита точно k_1 пъти да се сбъдне събитието A_1, точно k_2 пъти да се сбъдне събитието A_2 и т.н. точно k_s пъти да се сбъдне събитието A_s, при което разбира се $k_1+k_2+\cdots+k_s=n$, $0\le k_i\le n$, $i=1,2,\dots,s$. Отговорът на този въпрос се дава от формулата

$$(18.22)\quad \frac{n!}{k_1!k_2!\cdots k_s!}p_1^{k_1}p_2^{k_2}\cdots p_s^{k_s}.$$

Лесно се вижда, че (18.18) се явява частен случай на (18.22) при $s=2$, $p_1=p$ и $p_2=q$. Изразът (18.22) представлява събираемото, което се получава след разкриване на скобите и групиране на еднотипните по степен събираеми от

$$(p_1+p_2+\cdots+p_s)^n,$$

откъдето веднага се установява, че сумата на всевъзможните вероятности (18.11) е равна на 1. В този случай говорим за ***полиномно разпределение*** на вероятностите.

Пример 18.18. Да разгледаме серия от 10 хвърляния на зар. Търсим вероятността на събитието A, което се състои в това точно 2 пъти заръ̀т да покаже 6, точно 3 пъти заръ̀т да покаже 4 и точно 5 пъти заръ̀т да покаже 2. Тук простият опит (еднократно хвърляне на зар) съдържа 6 на брой елементарни изхода ω_k ="заръ̀т показва k", $1\le k\le 6$. Всеки от тях има вероятност $\omega_k=\frac{1}{6}$. Вероятността на събитието A ще намерим по формулата (18.22) при конфигурация на индексите $k_1=0$, $k_2=5$, $k_3=0$, $k_4=3$, $k_5=0$ и $k_6=2$. Имаме

$$P(A)=\frac{10!}{0!5!0!3!0!2!}\left(\frac{1}{6}\right)^0\left(\frac{1}{6}\right)^5\left(\frac{1}{6}\right)^0\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{1}{6}\right)^0\left(\frac{1}{6}\right)^2=\frac{10!}{2!3!5!}\left(\frac{1}{6}\right)^{10}.$$

7. Сведения за вероятностни пространства. Систематичното определение на вероятностните схеми води до понятието ***вероятностно пространство***. Вероятностно пространство се нарича тройката $(\Omega,\aleph,P)$, където Ω е множеството на елементарните изходи, $\aleph$ представлява съвкупността на събитията, които са някакви подмножества на Ω, а P функцията вероятност, определена за всяко събитие от $\aleph$. За съвкупността от събитията $\aleph$ да съдържа самото Ω, както и невъзможното събитие $\varnothing$ и освен това да бъде затворена относно множествените операции обединение, сечение и разлика. Такава съвкупност се нарича ***алгебра*** от събития. Ако $\aleph$ е алгебра от подмножества на

Ω, то всяко обединение от краен брой елементи на $\aleph$ също представлява елемент на $\aleph$. Когато $\aleph$ съдържа всевъзможните изброими обединения на своите елементи, то $\aleph$ се нарича σ -алгебра. При вероятностните пространства се изисква съвкупността от събитията $\aleph$ да представлява σ-алгебра. Вероятността или още ***вероятностната мярка*** трябва да притежава следните аксиоматични свойства.

1) $P(A) \geq 0$ за всяко $A \in \aleph$ (***неотрицателност***).

2) $P(\Omega) = 1$ (***нормираност***);

3) $P(A+B) = P(A) + P(B)$, когато $AB = \varnothing$ (***адитивност***);

4) За всяка намаляваща редица от събития $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \cdots \supseteq A_n \supseteq \cdots$, за която $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \varnothing$ е изпълнено $\lim_{n\to\infty} P(A_n) = 0$ (***непрекъснатост***).

В случая на дискретни вероятностни пространства $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots\}$, с краен или безкраен брой елементарни изходи, за всеки елементарен изход задаваме по някакъв начин неговата вероятност $p_k = P(\omega_k)$. Условието за нормировка изисква сумата (крайна или безкрайна) от тези елементарни вероятности да бъде равна на 1. Тук всяко подмножество $A = \{\omega_{k_1}, \omega_{k_2}, \ldots\}$ на Ω се разглежда като събитие с вероятност

$$P(A) = p_{k_1} + p_{k_2} + \cdots,$$

при което последната сума е безкрайна (ред с положителни членове), когато A съдържа безбройно много елементарни изходи.

Структурата на дискретните пространства позволява всяко подмножество на Ω да бъде разглеждано като събитие, при което така определената алгебра на събития представлява σ-алгебра. При схемата на геометричната вероятност обаче далеч не всяко точково подмножество на Ω може да се разглежда като събитие, поради невъзможността да се определи вероятностна мярка над толкова широк клас от множества.

Логически безупречното изграждане на вероятностно пространство за случая на схемата с геометричната вероятност води до самостоятелна задача в математическия анализ, свързана със задаване на разумен клас измерими множества и определяне на подходяща вероятност за всяко от тях при изпълнение на аксиомите за вероятност. Тази част от математиката е известна като ***теория на мярката и интеграла*** и служи за основа на различни приложения. В практически план разглеждането в качеството на събития на измерими в смисъл на Пеано-Жордан множества покрива нуждите на повечето съдържателни приложения. По тази причина ние използваме геометричната вероятност без да навлизаме във всичките споменати обстоятелства.

Може да се случи вероятността на дадено събитие A да бъде равна на нула, $P(A) = 0$, при което A не се явява невъзможното събитие, $A \neq \varnothing$. Това не противоречи нито на теорията нито на практиката. От емпирична гледна точка, равенството на нула на вероятността на едно събитие A означава, че с нарастване повторенията на опита, неговата емпирична честота клони към нула. В този смисъл могат да се сбъдват и събития, които имат вероятност нула. Такива събития обаче като правило нямат съществено значение при анализа на вероятностния модел и неговите заключения.