Лекция 2

§2. Матрици и детерминанти

1. Определения. ***Матрицата*** е правоъгълна таблица от числа. Ако A е матрица с m реда и n стълба, то означаваме

$$(2.1)\qquad A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

$A=A_{m\times n}=(a_{ij})$. За елементите на матрицата a_{ij} се използва двойно индексиране, като първият индекс се свързва с реда на елемента, а вторият индекс се свързва с неговия стълб.

В отделни случаи е удобно елементите да се различават според тяхната геометрична позиция, а индексите да бъдат използвани за други цели.

Когато $m=1$, матрицата се нарича ***вектор-ред***, а когато $n=1$, матрицата се нарича ***вектор-стълб***. Матриците с един ред и един стълб са числа. Елементите на една матрица се разглеждат от дадено числово поле F. Множеството от всички $(m\times n)$ матрици с елементи от полето F се означава с $F_{m\times n}$. В типичния за приложенията случай се разглеждат матрици, чиито елементи са реални числа, за които $F=\mathbb{R}$, но повечето основни твърдения остават верни за всяко числово поле.

Пример 2.1. Матрицата

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 11 & -7 \end{pmatrix}$$

има $m=2$ реда и $n=3$ стълба.

Ако $m=n$, то A се нарича ***квадратна*** матрица от ред n. Множеството на квадратните матрици от ред n с елементи от числовото поле F се означава с $M_n(F)$. Диагоналът на една квадратна матрица от ред n, който започва от горния ляв ъгъл и свършва в долния десен ъгъл се нарича ***главен диагонал***, а другият диагонал се нарича ***втори диагонал***. Квадратна матрица от ред n, за която елементите по главния диагонал са единици, а всички останали са нули се нарича ***единична матрица*** от ред n и се бележи с E_n (или само E, когато размерът се подразбира).

Пример 2.2. Единичната матрица от ред три има вида

$$E_3=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Пермутации и субституции. Да разгледаме съвкупност от естествените числа $\{1,2,\ldots,n\}$ или по-общо някакво множество от n елемента, които ще различаваме по техните номера. Една наредба $\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n$ на тези числа (елементи) се нарича ***пермутация***. Например 12 и 21 са всичките пермутации от ред $n=2$. Всяка от тези пермутации поражда по три пермутации от ред три според това, къде ще бъде разположен третият елемент: $12\to 312,132,123$ и $21\to 321,231,213$. Изобщо всяка пермутация от ред $n-1$ поражда точно n на брой различни пермутации от ред n, следователно за броя на пермутациите от ред n е в сила рекурентната формула $P(n)=nP(n-1)$, откъдето последователно получаваме формулата $P(n)=1.2.3.\ldots.n=n!$.

Например $P(1)=1$, $P(2)=1.2=2$, $P(3)=1.2.3=6$, $P(4)=1.2.3.4=24$, и т.н. Броят на пермутациите силно нараства с нарастването на реда n.

Понякога за удобство, елементите на дадено множество с n елемента могат да бъдат номерирани с числа, различни от $\{1,2,\ldots,n\}$. Например елементите на едно множество с три елемента могат да имат номера 2, 5 и 11, а една тяхна пермутация е $11\,2\,5$.

Пермутацията $123\ldots n$, в която числата се намират в естествен ред, се нарича ***основна пермутация***. Нека $\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n$ е някаква пермутация на числата $\{1,2,\ldots,n\}$. Казва се, че числата α_i и α_j, където $i<j$, образуват ***инверсия***, когато $\alpha_i>\alpha_j$. Числата α_i и α_j образуват инверсия, когато са разположени в различен ред от този в основната пермутация. Самата основна пермутация не съдържа инверсии, а всяка друга съдържа поне една инверсия. Например 3 и 2 образуват инверсия в пермутацията 51324.

Броят на всичките инверсии на дадена пермутация $\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n$ се нарича ***четност*** на пермутацията и се бележи с $[\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n]$ и се пресмята като последователен сбор от инверсиите на всичките елементи α_1, α_2, ..., α_n.

Пример 2.3. За пермутацията 513264 имаме

$$[513264]=4+0+1+0+1=6.$$

Различаваме ***четни*** и ***нечетни*** пермутации според тяхната четност.

Разместването на два произволни елемента в дадена пермутация се нарича ***транспозиция***. Например от пермутацията 134265 след транспозиция на елементите 3 и 6 получаваме пермутацията 164235. Една пермутация може да се получи от коя да е друга след прилагане на определен брой транспозиции. В частност всяка пермутация се получава от основната след прилагане на подходящи транспозиции.

Твърдение 2.2. Всяка транспозиция променя четността на пермутацията.

Доказателство. Да разгледаме отначало случая, когато транспозицията се извършва между два съседни елемента α и β, т.е. от пермутацията $\ldots\alpha\beta\ldots$, след транспозиция е получена пермутацията $\ldots\beta\alpha\ldots$. Тогава ако $\alpha>\beta$ (α и β образуват инверсия), то след транспозицията тази инверсия вече не съществува и следователно

$$[\ldots\beta\alpha\ldots]=[\ldots\alpha\beta\ldots]-1.$$

В другият случай, ако $\alpha<\beta$ (α и β не образуват инверсия), то след транспозицията между тях се появява инверсия и следователно

$$[\ldots\beta\alpha\ldots]=[\ldots\alpha\beta\ldots]+1,$$

което доказва твърдението за случая на транспозиция между съседни елементи.

Нека сега елементите α и β не са съседни. Непосредствено се проверява, че пермутацията $\ldots\alpha\ldots\beta\ldots$ може да се преобразува до пермутацията $\ldots\beta\ldots\alpha\ldots$ след прилагане на нечетен брой транспозиции между съседни елементи, т.е. всяка транспозиция е еквивалентна на прилагане на нечетен брой транспозиции на съседни елементи, което пък доказва твърдението в общия случай. ■

Субституция се нарича всяко взаимно еднозначно изображение на множеството $\{1,2,\ldots,n\}$ в себе си. Субституцията s ще записваме като две пермутации една над друга

$$s=\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_n \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_n \end{pmatrix}. \qquad (2.2)$$

Пример 2.4. Субституцията

$$s = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

съпоставя $1 \to 3$, $3 \to 2$, $2 \to 4$ и $4 \to 1$.

При разместване на колоните, субституцията не се променя понеже изображението което задава остава същото. Например горната субституция е еквивалентна на

$$s = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Изобщо всяка субституция има еквивалентно представяне когато числителят е основната пермутация и когато знаменателят е основната пермутация

(2.3) $$s = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix}.$$

Две субституции са ***еквивалентни***, когато едната може да се получи от другата чрез разместване на колоните. Броят на всичките различни субституции от ред n е равен на броя на различните пермутации от ред n (който е $n!$).

Четност $[s]$ на субституцията (2.2), се нарича сборът от четностите на числителя и знаменателя,

$$[s] = [i_1 i_2 \ldots i_n] + [j_1 j_2 \ldots j_n].$$

Ако s е записана в една от еквивалентните форми (2.3), то

$$[s] = [\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n] = [\beta_1 \beta_2 \ldots \beta_n],$$

понеже основната пермутация съдържа нула инверсии, $[12 \ldots n] = 0$.

Твърдение 2.1. Еквивалентните субституции имат една и съща четност.

Доказателство. Разместването на две колони в дадена субституция променя едновременно четността на числителя и знаменателя и следователно четността на субституцията не се променя. ■

3. Детерминанти. На всяка квадратна матрица $A = (a_{ij})$ от ред n се съпоставя едно число наречено детерминанта, което представлява нейна основна числова характеристика.

Определение 2.1. ***Детерминанта*** на квадратната матрица $A = (a_{ij})$ от ред n се нарича числото

(2.4) $$\det A = \sum_s (-1)^{[s]} a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \cdots a_{i_n j_n},$$

където сумирането се разпространява върху всичките различни субституции (2.2).

Детерминантата се означава още и $|A|$ или

(2.5) $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{vmatrix}.$$

Поради външното сходство между една матрица A и записа на нейната детерминанта (2.5) е удобно да говорим за елементи, редове, стълбове и диагонали на детерминантата което съответства на същите понятия за нейната матрица.

Сумата в (2.4) се състои от всевъзможните събираеми при следната основна характеристика. ***Всяко събираемо е взето със съответния знак произведение от точно*** n ***на брой множители, като във всяко такова произведение има точно един***

множител от всеки ред и точно един множител от всеки стълб на детерминантата. Това следва от факта, че в субституцията (2.2) числителят и знаменателят са пермутации и в тях няма повтарящи се индекси. Броят на събираемите във формулата (2.4) е равен на $n!$, което прави тази формула твърде неудобна за непосредствено пресмятане за големи стойности на n.

При използването на формулата (2.4) възниква задачата за изброяване на различните субституции. Това може да стане по два основни начина.

1) ***Субституции с фиксиран числител.*** Например когато числителят е фиксиран да бъде основната пермутация, т.е.

$$s=\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & n\\ \beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_n\end{pmatrix}.$$

Тогава формулата (2.4) приема вида

$$\text{(2.6)}\qquad \det A=\sum_{\beta}(-1)^{[\beta_1\beta_2\ldots\beta_n]}a_{1\beta_1}a_{2\beta_2}\cdots a_{n\beta_n}\ ,$$

където сумирането е разпространено по всички пермутации на вторите индекси.

2) ***Субституции с фиксиран знаменател.*** Например когато знаменателят е фиксиран да бъде основната пермутация, т.е.

$$s=\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n\\ 1 & 2 & \cdots & n\end{pmatrix}.$$

Тогава формулата (2.4) приема вида

$$\text{(2.7)}\qquad \det A=\sum_{\alpha}(-1)^{[\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n]}a_{\alpha_1 1}a_{\alpha_2 2}\cdots a_{\alpha_n n}\ ,$$

където сумирането е разпространено по всички пермутации на първите индекси.

Пример 2.5. За детерминанта от втори ред по формулата (2.6) имаме

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=(-1)^{[12]}a_{11}a_{22}+(-1)^{[21]}a_{12}a_{21}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21},$$

а за детерминанта от трети ред пак по формулата (2.6) след изброяване на всичките пермутации от трети ред и заместването им като втори индекси получаваме

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=(-1)^{[123]}a_{11}a_{22}a_{33}+(-1)^{[132]}a_{11}a_{23}a_{32}+(-1)^{[312]}a_{13}a_{21}a_{32}+$$

$$(-1)^{[213]}a_{12}a_{21}a_{33}+(-1)^{[231]}a_{12}a_{23}a_{31}+(-1)^{[321]}a_{13}a_{22}a_{31}$$

откъдето намираме

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}\,.$$

При действието ***транспониране*** на дадена матрица A от тип $(m\times n)$ се получава нейната ***транспонирана матрица*** A^T от тип $(n\times m)$, при което редовете на A се превръщат в стълбове на A^T (транспонирането се означава понякога с A').

Пример 2.6. Ако

$$A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 3\\ 5 & 7 & -4\end{pmatrix},\ \text{то}\ A^T=\begin{pmatrix}2 & 5\\ -1 & 7\\ 3 & -4\end{pmatrix}.$$

Очевидно $A^{TT} = A$. Транспонираната на дадена квадратна матрица от ред n също е квадратна матрица от ред n. Квадратната матрица A се нарича ***симетрична***, когато $A^T = A$ и ***антисиметрична***, когато $A^T = -A$. Ако A е антисиметрична, то всичките нейни елементи по главния диагонал са равни на нула.

Твърдение 2.3. Нека A е квадратна матрица от ред n. Тогава $\det A = \det A^T$.

Доказателство. Пресмятането на $\det A$ по формулата (2.6) е все едно да пресметнем $\det A^T$ по формулата (2.7) и обратно. ■

Една квадратна матрица (детерминанта) се нарича ***горна триъгълна***, когато всичките елементи под главния диагонал са нули и ***долна триъгълна***, когато всичките елементи над главния диагонал са нули.

Пример 2.7. Матрицата

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

е горна триъгълна.

Ако всичките елементи извън главния диагонал са нули, то матрицата (детерминантата) се нарича ***диагонална***. Една диагонална матрица е едновременно горна и долна триъгълна. Триъгълните детерминанти (още повече диагоналните) се пресмятат елементарно въз основа на следното

Твърдение 2.4. Нека A е триъгълна (горна или долна) матрица. Тогава нейната детерминанта е равна на произведението на елементите по главния диагонал, $\det A = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$.

Доказателство. Ще докажем твърдението за горна триъгълна матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Да пресметнем $\det A$ по формулата (2.7)

$$\det A = \sum_{\alpha} (-1)^{[\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n]} a_{\alpha_1 1} a_{\alpha_2 2} \cdots a_{\alpha_n n}.$$

Тук има смисъл да разглеждаме само случая $\alpha_1 = 1$, понеже при други стойности на α_1 имаме $a_{\alpha_1 1} = 0$. Индексът α_2 не може да бъде $\alpha_2 = 1$, понеже вече не може да избираме елементи от първия ред и няма смисъл да бъде $\alpha_2 > 2$, понеже тогава $a_{\alpha_2 2} = 0$, следователно има смисъл да разглеждаме само $\alpha_2 = 2$. Разсъждавайки аналогично стигаме последователно до извода, че има смисъл да разглеждаме само събираемото, за което $\alpha_k = k$, $k = 1,2,\ldots,n$, следователно

$$\det A = (-1)^{[12\ldots n]} a_{11}a_{22}\cdots a_{nn} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

Когато матрицата A е долна триъгълна разсъждението е аналогично и освен това верността на твърдението в този случай следва от факта, че транспонираната A^T се явява горна триъгълна, а съгласно твърдение 2.3 имаме $\det A = \det A^T$. ■

Да разгледаме подробно формулата (2.4) върху достатъчно показателен пример на детерминанта от пети ред. В развитието на детерминантата

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \underline{a_{13}} & a_{14} & a_{15} \\ \underline{a_{21}} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & \underline{a_{35}} \\ a_{41} & \underline{a_{42}} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & \underline{a_{54}} & a_{55} \end{vmatrix}$$

по определение има събираемо $(-1)^{[54123]+[42315]} a_{54}a_{42}a_{13}a_{21}a_{35}$, на което съответства субституция

$$s_0 = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 3 & 1 & 5 \end{pmatrix},$$

т.е. $D = \cdots + (-1)^{[s_0]} a_{54}a_{42}a_{13}a_{21}a_{35} + \cdots$. Да фиксираме елемента a_{42} и да го поставим като първи множител. Тогава последното равенство приема вида

$$D = \cdots + (-1)^{[s_0]} a_{42}a_{54}a_{13}a_{21}a_{35} + \cdots,$$

където s_0 записваме в еквивалентната форма

$$s_0 = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

За четността на s_0 намираме

$$[s_0] = (4-1) + [5123] + (2-1) + [4315].$$

Постъпвайки по същия начин за всяко от събираемите, съдържащи a_{42} като множител получаваме

$$D = \cdots + a_{42}(-1)^{(4-1)+(2-1)}\left[(-1)^{[5123]+[4315]} a_{54}a_{13}a_{21}a_{35} + \cdots\right] + \cdots$$

или

(2.8) $$D = \cdots + a_{42}(-1)^{4+2}\sum (-1)^{[i_1 i_2 i_3 i_4]+[j_1 j_2 j_3 j_4]} a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} a_{i_3 j_3} a_{i_4 j_4} + \cdots,$$

където $i_1 i_2 i_3 i_4$ е пермутация на индексите $\{1,2,3,5\}$, $j_1 j_2 j_3 j_4$ е пермутация на индексите $\{1,3,4,5\}$, а сумирането е по различните субституции

$$\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & i_3 & i_4 \\ j_1 & j_2 & j_3 & j_4 \end{pmatrix}.$$

По определение сумата в дясната страна на (2.8)

$$\sum (-1)^{[i_1 i_2 i_3 i_4]+[j_1 j_2 j_3 j_4]} a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} a_{i_3 j_3} a_{i_4 j_4}$$

е равна на стойността на детерминантата, която се получава от D след елиминиране на четвъртия ред и втория стълб.

Така по естествен начин стихнахме до целесъобразността на следните определения. ***Поддетерминанта*** D_{ij} на елемента a_{ij} на детерминантата D от ред n, се нарича детерминантата от ред $n-1$, която се получава от D след елиминиране на реда и стълба на елемента a_{ij}. ***Адюнгирано количество*** A_{ij} на елемента a_{ij} се определя като $A_{ij} = (-1)^{i+j} D_{ij}$. Сега формулата (2.8) приема вида $D = \cdots + a_{42}A_{42} + \cdots$. Разсъждавайки аналогично за останалите елементи в общия случай получаваме, че ***адюнгираното количество на елемента*** a_{ij} ***е равно на множителя пред*** a_{ij} ***в дясната страна на основната формула за детерминанта (2.4).***

Ако разгледаме сега всичките елементи на четвъртия ред и групираме събираемите от формулата (2.4) по тях (всяко от събираемите попада точно в една група) ще получим

$$D = a_{41}A_{41} + a_{42}A_{42} + a_{43}A_{43} + a_{44}A_{44} + a_{45}A_{45},$$

и ако извършим същото по елементите на втория стълб ще получим

$$D = a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{32} + a_{42}A_{42} + a_{52}A_{52}.$$

Последните две формули представляват частен случай на общото правило за развитие на детерминанта по адюнгираните количества на даден ред или на даден стълб. От направените разсъждения непосредствено следва верността на следната основна

Теорема 2.1. Всяка детерминанта може да се пресметне чрез развитие по адюнгираните количества на кой да е ред

$$\det A = a_{p1}A_{p1} + a_{p2}A_{p2} + \cdots + a_{pn}A_{pn}$$

или по адюнгираните количества на кой да е стълб

$$\det A = a_{1q}A_{1q} + a_{2q}A_{2q} + \cdots + a_{nq}A_{nq}. \ \blacksquare$$

4. Основни свойства на детерминантите. Да означим за удобство редовете на квадратната матрица от ред n, $A = (a_{ij})$, чрез $\mathbf{a}_k = (a_{k1}\, a_{k2} \ldots a_{kn})$, $k = 1,2,\ldots,n$. Тогава матрицата A може да се запише като

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \end{pmatrix}.$$

Аналогично ако означим стълбовете чрез

$$\mathbf{b}_k = \begin{pmatrix} a_{1k} \\ a_{2k} \\ \vdots \\ a_{nk} \end{pmatrix}, \ k = 1,2,\ldots,n,$$

то матрицата A може да се запише като

$$A = (\mathbf{b}_1\, \mathbf{b}_2 \cdots \mathbf{b}_n).$$

Преди всичко да отбележим, че съгласно твърдение 2.3, ***ако детерминантата притежава някакво свойство формулирано за нейните редове, то притежава същото свойство формулирано за нейните стълбове.***

Свойство 1. Ако дадена детерминанта има ред (стълб) само от нули, то нейната стойност е нула.

Верността на това свойство следва веднага от теорема 2.1, като развием детерминантата по адюнгирани количества на нулевия ред (стълб).

Пример 2.8. За следната детерминанта имаме

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

понеже вторият ред съдържа само нули.

Свойство 2. Ако един ред (стълб) на дадена детерминанта е сбор от два реда (стълба), то детерминантата е равна на сбора от съответните две детерминанти, т.е. ако $\mathbf{a}_p = \mathbf{a}'_p + \mathbf{a}''_p$, където $\mathbf{a}_p = (a_{p1}\, a_{p2} \cdots a_{pn})$, $\mathbf{a}'_p = (a'_{p1}\, a'_{p2} \cdots a'_{pn})$, $\mathbf{a}''_p = (a''_{p1}\, a''_{p2} \cdots a''_{pn})$, то

$$\det\begin{pmatrix} \vdots \\ \mathbf{a}_p \\ \vdots \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} \vdots \\ \mathbf{a}'_p \\ \vdots \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} \vdots \\ \mathbf{a}''_p \\ \vdots \end{pmatrix}.$$

За доказателство е достатъчно да развием детерминантата по адюнгираните количества на p-тия ред.

Пример 2.9. За следната детерминанта имаме

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 4 \end{vmatrix},$$

понеже вторият ред на детерминантата отляво е сбор на двата втори реда на детерминантите отдясно.

Свойство 3. Ако всеки елемент на даден ред (стълб) е умножен с някакво число λ, то множителят λ може да бъде изнесен пред знака на детерминантата, т.е.

$$\det\begin{pmatrix} \vdots \\ \lambda\mathbf{a}_p \\ \vdots \end{pmatrix} = \lambda \det\begin{pmatrix} \vdots \\ \mathbf{a}_p \\ \vdots \end{pmatrix}.$$

И тук доказателството се получава като развием детерминантата по адюнгираните количества на p-тия ред (стълб).

Пример 2.10. За следната детерминанта имаме

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 4 & -6 & 8 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & -3 & 4 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix},$$

понеже за втория ред имаме $(4\ -6\ \ 8) = 2(2\ -3\ 4)$.

Свойство 4. Ако сменим местата на два реда (стълба) в една детерминанта, то се променя само нейният знак, т.е. ако

$$A_1 = \begin{pmatrix} \vdots \\ \mathbf{a}_p \\ \vdots \\ \mathbf{a}_q \\ \vdots \end{pmatrix} \text{ и } A_2 = \begin{pmatrix} \vdots \\ \mathbf{a}_q \\ \vdots \\ \mathbf{a}_p \\ \vdots \end{pmatrix}, \text{ то } \det A_1 = -\det A_2.$$

Да пресметнем детерминантата $\det A_1$ по основната формула (2.4) като изброяваме субституциите при числител, фиксиран на основната пермутация

$$s_1 = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & p & \cdots & q & \cdots & n \\ \beta_1 & \cdots & \beta_p & \cdots & \beta_q & \cdots & n \end{pmatrix}$$

и детерминантата $\det A_2$ по формулата (2.4) като изброяваме субституциите при фиксиран числител във формата

$$s_2 = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & q & \cdots & p & \cdots & n \\ \beta_1 & \cdots & \beta_p & \cdots & \beta_q & \cdots & n \end{pmatrix},$$

при пълно изброяване на пермутациите $\beta_1\beta_2\ldots\beta_n$. Съответните събираеми в сумата (2.4) се различават само по знак, понеже $[s_2]=[s_1]+1$, което доказва свойството.

Пример 2.11. За следната детерминанта имаме

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 5 \\ 4 & 6 & 8 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 4 & 6 & 8 \\ 3 & -2 & 5 \end{vmatrix},$$

понеже детерминантата в дясната страна се е получила след смяна местата на втория и третия ред на детерминантата в лявата страна.

От свойство 4 следва, че ***ако една детерминанта има два равни реда (стълба), то нейната стойност е равна на нула***. Наистина, ако в такава детерминанта сменим местата на равните редове (стълбове), то тя фактически не се променя, а съгласно свойство 4, тя си сменя знака, следователно $\det A = -\det A$, т.е. $\det A = 0$. Може да се докаже, че е в сила следното по-общо

Свойство 5. Ако една детерминанта има два пропорционални реда (стълба), то нейната стойност е равна на нула.

Наистина, ако $\mathbf{a}_p = \lambda \mathbf{a}_q$, то

$$\det\begin{pmatrix} \vdots \\ \mathbf{a}_p \\ \vdots \\ \mathbf{a}_q \\ \vdots \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} \vdots \\ \lambda\mathbf{a}_q \\ \vdots \\ \mathbf{a}_q \\ \vdots \end{pmatrix} = \lambda\det\begin{pmatrix} \vdots \\ \mathbf{a}_q \\ \vdots \\ \mathbf{a}_q \\ \vdots \end{pmatrix} = \lambda.0 = 0.$$

Пример 2.12. За следната детерминанта имаме

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \\ -4 & 6 & 7 \end{vmatrix} = 0,$$

понеже първият и вторият ред са пропорционални.

Свойство 6. Ако към един ред (стълб) на дадена детерминанта прибавим друг ред (стълб), умножен с число, то стойността на детерминантата не се променя.

Наистина, да прибавим към p-тия ред на детерминанта q-тия ред, умножен с числото λ $(p<q)$. Тогава

$$\det\begin{pmatrix} \vdots \\ \mathbf{a}_p + \lambda\mathbf{a}_q \\ \vdots \\ \mathbf{a}_q \\ \vdots \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} \vdots \\ \mathbf{a}_p \\ \vdots \\ \mathbf{a}_q \\ \vdots \end{pmatrix} + \lambda\det\begin{pmatrix} \vdots \\ \mathbf{a}_q \\ \vdots \\ \mathbf{a}_q \\ \vdots \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} \vdots \\ \mathbf{a}_p \\ \vdots \\ \mathbf{a}_q \\ \vdots \end{pmatrix}.$$

Пример 2.13. За следната детерминанта имаме

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -3 \\ 4 & 6 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 4 & 6 & 8 \end{vmatrix},$$

понеже вторият ред на детерминантата отдясно се получава от втория ред на детерминантата отляво след като от него е изваден първият ред, умножен с числото 2.

Свойство 7. Ако елементите на един ред (стълб) умножим по адюнгираните количества на елементите на друг ред (стълб) и съберем получените произведения, се получава нула.

Нека елементите на p-тия ред са умножени с адюнгираните количества на елементите на q-тия ред и съберем $(p \neq q)$. Получаваме

$$a_{p1}A_{q1} + a_{p2}A_{q2} + \cdots + a_{pn}A_{qn},$$

което е нула, понеже представлява стойността на детерминанта, която се получава от изходната след замяна q-тия ред с p-тия, а това е вече детерминанта с два равни реда, която има стойност нула съгласно свойство 4.

5. Пресмятане на детерминанти чрез елементарни преобразувания. Вече споменахме, че формулата (2.4) е неефективна за непосредствени пресмятания. От друга страна една детерминанта допуска сравнително лесно пресмятане въз основа на доказаните по-горе основни свойства по следната схема. Върху детерминантата последователно се прилагат елементарни преобразувания с цел тя да бъде приведена към триъгълна форма, след което нейната стойност се определя въз основа на твърдение 2.4. Разглеждаме следните елементарни преобразувания.

Д1) Смяна местата на два реда (стълба). При това преобразуване се променя единствено знакът на детерминантата.

Д2) Умножаване на един ред (стълб) с число и прибавянето му към друг ред (стълб). При това преобразуване стойността на детерминантата не се променя.

Д3) Умножаване на даден ред (стълб) с число $\lambda \neq 0$. При това преобразуване стойността на детерминантата се умножава с λ.

Твърдение 2.5. Нека $\det A \neq 0$. Тогава посредством елементарните преобразувания **Д1 и Д2** матрицата A може да бъде доведена до горна триъгълна (а също така и до диагонална) с различни от нула елементи по главния диагонал, при което преобразуванията да бъдат ***само по редовете*** на матрицата A.

Доказателство. Първо да обърнем внимание, че ако детерминантата на една матрица е различна от нула (равна на нула), то след преобразуванията **Д1**, **Д2** и **Д3** нейната детерминанта продължава да бъде различна от нула (равна на нула). По условие $\det A \neq 0$, следователно в първия стълб има ненулеви елементи. Тогава чрез **Д1** можем да осигурим елементът в горния ляв ъгъл да бъде различен от нула, след което чрез **Д2** да направим всичките елементи под него да бъдат нули. Матрицата ще приеме вида

$$(2.9) \qquad A \sim \begin{pmatrix} * & \# & \# & \# & \# \\ 0 & \# & \# & \# & \# \\ 0 & \# & \# & \# & \# \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \# & \# & \# & \# \end{pmatrix},$$

където чрез 0 са означени нулеви елементи, чрез * е означен елемент сигурно различен от нула, а чрез # са означени елементи, за които се допуска да приемат всякакви стойности. Да разгледаме сега втория стълб. Между елементите с номера по-големи или равни на две сигурно има поне един ненулев. Иначе разсъждавайки както при доказателството на твърдение 2.4 ще направим заключение, че $\det A = 0$, което противоречи на условието. Тогава с помощта отново на **Д1** и **Д2** можем да приведем матрицата във вида

$$(2.10)\quad A\sim\begin{pmatrix} * & \# & \# & \# & \# \\ 0 & * & \# & \# & \# \\ 0 & 0 & \# & \# & \# \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \# & \# & \# \end{pmatrix}.$$

Продължавайки по-нататък с останалите редове ще приведем матрицата в горна триъгълна форма, при което по главния диагонал ще има само ненулеви елементи,

$$A\sim\begin{pmatrix} * & \# & \# & \# & \# \\ 0 & * & \# & \# & \# \\ 0 & 0 & * & \# & \# \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & * \end{pmatrix}.$$

За да приведем по нататък A в диагонален вид е достатъчно да приложим последователно правилото **Д2** отначало върху последния стълб, после върху предпоследния и т.н., докато стигнем до втория стълб. ■

Елементарните преобразувания **Д1**, **Д2** и **Д3** са ***обратими***, което означава, че посредством тях можем да се върнем към първоначалната форма на една матрица, когато тя е била променена чрез тях.

Описаният в доказателството на твърдение 2.5 метод на преобразуване на дадена матрица е общ начин за намиране на нейната детерминанта понеже или в процеса на преобразуване ще се уверим, че детерминантата е равна на нула или ще сведем детерминантата до горна триъгълна, за която стойността е равна на произведението на елементите от главния диагонал. Преобразуването **Д3** има помощен характер и теоретически не е необходимо за реализиране на поставената цел, но е полезно в практическите пресмятания.

Вече сме готови да докажем правилото за детерминанти на блокови матрици.

Свойство 8. Нека матрицата A има блокова структура

$$A=\begin{pmatrix} P & R \\ \mathbf{0} & Q \end{pmatrix},$$

където P е квадратна матрица от ред p, Q е квадратна матрица от ред q, а R е някаква $(p\times q)$ матрица. В долния ляв ъгъл стои $(q\times p)$ матрица, чиито елементи са нули (нулев блок). Тогава

$$(2.11)\quad \det A=(\det P)(\det Q).$$

Същата формула е вярна, когато A има вида

$$A=\begin{pmatrix} P & \mathbf{0} \\ R & Q \end{pmatrix}.$$

За доказателство да преобразуваме матрицата A съгласно описаната по-горе схема чрез правилата **Д1** и **Д2** действайки отначало само върху редовете и стълбовете на P. Лесно се забелязва, че прилагането на тези правила ***не променя верността*** на свойство 8, следователно то ще бъде доказано, ако в процеса на преобразуване достигнем до матрици, за които въпросното свойство е вярно. Ако $\det P\neq 0$, то в процеса на преобразуване P ще приеме горна триъгълна форма. Ако $\det P=0$, то в някой от стълбовете на P ще достигнем до ситуация, в която всичките елементи под съответния диагонален и самият диагонален елемент ще бъдат нули. Но тогава и детерминантата на A ще бъде нула по същите причини, понеже в цялата матрица A

елементите под този диагонален елемент както и самият той ще бъдат нули, следователно в случая $\det P = 0$ свойство 7 е доказано. Ако $\det P \neq 0$, то след привеждане P в горна триъгълна форма ще продължим да преобразуваме вече матрицата Q, а едновременно с това разбира се и матрицата A. Случаят когато $\det Q = 0$ се третира аналогично на случая $\det P = 0$. Ако $\det Q \neq 0$, то матрицата Q може да се приведе в горна триъгълна форма. В крайна сметка ще получим цялата матрица A в горна триъгълна форма, а в този случай свойство 7 става очевидно, понеже всичките детерминанти от формулата (2.11) са произведения на елементите си от главния диагонал.

Да разгледаме сега следните елементарни преобразувания.

T1) Смяна местата на два реда или на два стълба.

T2) Умножаване на един ред с число и прибавянето му към друг ред.

Следващото твърдение е полезно уточнение на твърдение 2.5.

Твърдение 2.6. Нека A е квадратна матрица от ред n. Тогава посредством елементарните преобразувания **T1 и T2** матрицата A може да бъде доведена до диагонална с различни от нула елементи по главния диагонал или до матрица, която съдържа нулев ред.

Доказателство. Ако A е нулевата матрица, то няма какво да се доказва. Нека A има ненулеви елементи. Тогава чрез **T1** можем да осигурим ненулев елемент в горния ляв ъгъл на преобразуваната матрица, след което чрез **T2** да анулираме елементите в първия стълб под него, като по този начин ще приведем A във вида (2.9). Ако $n > 1$ и в останалата част на матрицата, от втория ред нататък и от втория стълб нататък има само нули, то твърдението е доказано. Ако там има поне един ненулев елемент, то чрез **T1** можем да го поставим на второ място по главния диагонал, след което с помощта на **T2** да анулираме елементите под него, като по този начин ще приведем матрицата във вида (2.10). Ако $n > 2$ и в останалата част на матрицата, от третия ред нататък и от третия стълб нататък има само нули, то твърдението е доказано. Ако там има поне един ненулев елемент, то продължаваме с описаното действие. Този процес ще приключи когато A се приведе в горна триъгълна форма или когато в оставащата част на матрицата има само нули. Във втория случай получаваме матрица с нулеви редове, а в първия случай получаваме горна триъгълна матрица с различни от нула елементи по главния диагонал, която можем да преобразуваме до диагонална чрез **T2.** Първият случай съответства на $\det A = 0$, а втория на $\det A \neq 0$. ■

6. Детерминанта на Вандермонд. На много възлови места в линейната алгебра се появява детерминантата

$$VDM(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix},$$

която се нарича детерминанта на Вандермонд, породена от числата x_1, x_2, ..., x_n.

Пример 2.14. При $n = 2$ имаме

$$VDM(x_1, x_2) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix} = x_2 - x_1,$$

а при $n = 3$ имаме

$$VDM(x_1,x_2,x_3)=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ x_1 & x_2 & x_3\\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2\end{vmatrix}.$$

Тук чрез умножаване на втория ред с x_1 и изваждане от третия и умножаване на първия ред с x_1 и изваждане от втория получаваме

$$VDM(x_1,x_2,x_3)=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & x_2-x_1 & x_3-x_1\\ 0 & x_2^2-x_1x_2 & x_3^2-x_1x_3\end{vmatrix},$$

$$VDM(x_1,x_2,x_3)=\begin{vmatrix}x_2-x_1 & x_3-x_1\\ x_2^2-x_1x_2 & x_3^2-x_1x_3\end{vmatrix}=(x_2-x_1)(x_3-x_1)\begin{vmatrix}1 & 1\\ x_2 & x_3\end{vmatrix},$$

$$VDM(x_1,x_2,x_3)=(x_2-x_1)(x_3-x_1)VDM(x_2,x_3).$$

Разсъждавайки аналогично за по-високите стойности на n, получаваме връзка

$$VDM(x_1,x_2,\ldots,x_n)=(x_2-x_1)(x_3-x_1)\cdots(x_n-x_1)VDM(x_2,\ldots,x_n),$$

откъдето по индукция веднага следва верността на формулата

$$(2.12)\quad VDM(x_1,x_2,\ldots,x_n)=\prod_{i>j}(x_i-x_j),$$

където произведението се разпростира върху всевъзможните двойки индекси i и j, за които $1\le i,j\le n$ и $i>j$.

Твърдение 2.7. Детерминантата на Вандермонд е равна на нула тогава и само тогава, когато между числата които я пораждат има две равни.

Доказателство. Следва непосредствено от формулата (2.12). ■