Лекция 6

§6. Уравнения на права и равнина

1. Уравнение на права в равнината. Тук ще разглеждаме равнина в която е зададена положително ориентирана декартова координатна система Oxy с ортонормиран базис $\vec{\mathbf{i}}$ и $\vec{\mathbf{j}}$ по осите Ox и Oy. Всичките вектори и точки предполагаме зададени чрез техните координати в този базис и в тази координатна система.

Нека е дадена правата g (рис. 6.1). Тя определя единствена права l през началото O на координатната система, която е перпендикулярна на g, $l \perp g$, $O \in l$. Да означим с N пресечната точка на g и l, $N = g \cap l$, и нека $\vec{\mathbf{n}}$ е единичен вектор по направлението на вектора $\overrightarrow{ON}$. Този нормален вектор има координати $\vec{\mathbf{n}} = (\cos\alpha, \sin\alpha)$, където α е ъгълът между оста Ox и вектора $\vec{\mathbf{n}}$, отчетен в положителна посока (посока обратна на движението на часовниковата стрелка).

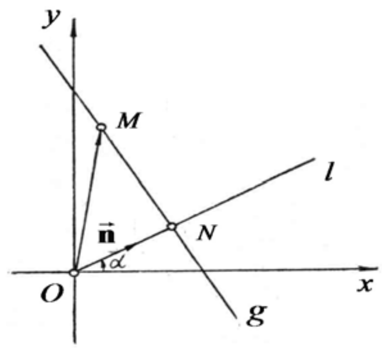

Рис. 6.1.

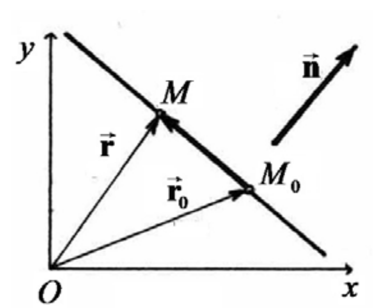

Рис. 6.2.

Нека $M(x,y)$ е някаква точка от правата g (текуща точка), с радиус вектор $\vec{\mathbf{r}} = \overrightarrow{OM}$, $\vec{\mathbf{r}} = \vec{\mathbf{r}}(x,y)$. Правата g се състои от точките $M(x,y)$, за които алгебричната проекция на радиус вектора $\vec{\mathbf{r}}(x,y)$ върху оста l е равна на $p = \left|\overrightarrow{ON}\right|$, което с помощта на скаларно произведение можем да запишем като $g : \vec{\mathbf{r}}\vec{\mathbf{n}} - p = 0$. Сега чрез правилото за пресмятане на скаларно произведение, за правата g намираме следното координатно уравнение

$$g : x\cos\alpha + y\cos\alpha - p = 0,$$

което се нарича ***нормално уравнение на права***, а векторът $\vec{\mathbf{n}}$ се нарича ***нормален вектор*** към правата g, понеже сключва с правата прав ъгъл.

Една права g напълно се определя от дадена точка $M_0(x_0, y_0)$, която лежи върху g, $M_0 \in g$, и даден нормален вектор $\vec{\mathbf{N}}(a,b)$, $\vec{\mathbf{N}} \neq \vec{\mathbf{0}}$, $\vec{\mathbf{N}} \perp g$ (рис. 6.2.). Правата g се състои от точките $M(x,y)$, за които векторите $\overrightarrow{M_0M} = \vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}_0$ и $\vec{\mathbf{N}}$ сключват прав ъгъл. Тук $\vec{\mathbf{r}}$ и $\vec{\mathbf{r}}_0$ са радиус векторите на текущата точка $M(x,y)$ и на дадената точка $M_0(x_0, y_0)$. Това условие с помощта на скаларно произведение записваме като

$$g : (\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}_0)\vec{\mathbf{N}} = 0,$$

откъдето за правата g намираме следното координатно уравнение

$$(6.1) \qquad g : (x - x_0)a + (y - y_0)b = 0.$$

Пример 6.1. Правата g през точката $M_0(2,-3)$ с даден нормален вектор $\vec{\mathbf{N}}(1,-2)$ има уравнение

$g: 1.(x-2)-2.(y+3)=0$ или $g: x-2y-5=0$.

Ако в (6.1) положим $c=-ax_0-by_0$, то последното уравнение може да се запише във вида

$$g: ax+by+c=0,$$

което се нарича ***общо уравнение*** на права в равнината.

Вече се убедихме, че всяка права в равнината се задава чрез някакво общо уравнение от вида (6.1). Следващата теорема показва, че е вярно и обратното.

Теорема 6.1. Нека a, b и c са числа такива, че $a \neq 0$ или $b \neq 0$. Тогава съвкупността от точки $M(x,y)$ в равнината, чиито координати удовлетворяват равенството

(6.2) $\quad ax+by+c=0$,

образуват някаква права g.

Доказателство. Ако разгледаме (6.2) като система от едно уравнение с две неизвестни, то тази система съгласно теоремата на Кронекер-Капели е съвместима и неопределена, следователно има безбройно много решения. Нека (x_1, y_1) и (x_2, y_2) са някои (кои да е) две различни решения и да разгледаме точките $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$. Тези две точки са различни и по тази причина определят единствена права g. Сега ще докажем, че всяка точка $M_3(x_3, y_3)$, чиито координати удовлетворяват равенството (6.2), лежи на същата права g. За тази цел е достатъчно да се убедим, че векторите $\overrightarrow{M_1M_2}$ и $\overrightarrow{M_1M_3}$ са колинеарни. По условие имаме

$$ax_1+by_1+c=0\left(M_1 \in g\right)$$
$$ax_2+by_2+c=0\left(M_2 \in g\right)$$
$$ax_3+bx_3+c=0\left(M_3 \in g\right)$$

Ако извадим почленно първото равенство от другите две получаваме

$$\begin{array}{l}(x_2-x_1)a+(y_2-y_1)b=0\\(x_3-x_1)a+(y_3-y_1)b=0\end{array}.$$

Последното може да се разглежда като хомогенна система от две уравнения с две неизвестни a и b, която система по условие има ненулево решение. Съгласно общите свойства на хомогенните системи, последното е възможно единствено когато нейната детерминанта е равна на нула,

$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 \end{vmatrix}=0,$$

което пък означава, че между редовете на детерминантата има линейна зависимост. Тези редове обаче са точно координатите на векторите $\overrightarrow{M_1M_2}$ и $\overrightarrow{M_1M_3}$, следователно те са линейно зависими, което и трябваше да докажем. ■

В общото уравнение на права (6.1) винаги се изисква поне един от двата коефициента a или b да бъде различен от нула, което може да се запише $|a|+|b|>0$. Когато пишем общо уравнение на права винаги ще подразбираме, че това условие е налице.

Нека е дадена права g с общо уравнение $g: ax+by+c=0$. ***Тогава ненулевият вектор*** $\vec{\mathbf{N}}(a,b)$ ***е нормален към правата***. Наистина, нека $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ са някакви (кои да е) точки от g, което означава, че

$$ax_1 + by_1 + c = 0$$
$$ax_2 + by_2 + c = 0.$$

Като извадим първото уравнение от второто получаваме равенството

$$a(x_2 - x_1) + b(y_2 - y_1) = 0,$$

което показва, че векторите $\vec{\mathbf{N}}(a,b)$ и $\overrightarrow{M_1M_2}(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$ са ортогонални. По този начин получихме, че така определеният вектор $\vec{\mathbf{N}}$ е ортогонален на всеки вектор с начало и край върху правата, което доказва твърдението.

Параметрично уравнение. Да разгледаме задачата за намиране на уравнение на права g през дадена точка $M_0(x_0, y_0)$, $M_0 \in g$, и даден ***направляващ вектор*** $\vec{\mathbf{a}}(a_1, a_2)$, $\vec{\mathbf{a}} \neq \vec{\mathbf{0}}$, $\vec{\mathbf{a}} \parallel g$ (рис. 6.3).

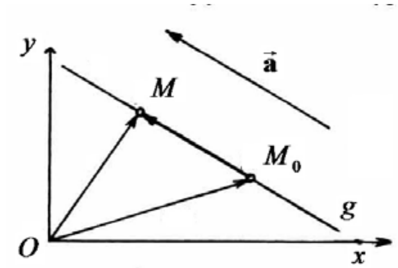

Рис. 6.3.

Тогава векторът $\vec{N}(-a_2, a_1)$ е нормален към правата, понеже скаларното произведение на $\vec{\mathbf{N}}$ и $\vec{\mathbf{a}}$ е нула, $\vec{\mathbf{N}}\vec{\mathbf{a}} = -a_2a_1 + a_1a_2 = 0$, и следователно търсеното уравнение може да бъде получено като уравнение на права през дадена точка M_0 и даден нормален вектор $\vec{\mathbf{N}}$,

$$g : -a_2(x - x_0) + a_1(y - y_0) = 0.$$

Ако е даден един направляващ вектор $\vec{\mathbf{a}}$ за правата g, то всеки друг вектор $\lambda\vec{\mathbf{a}}$, който се получава от $\vec{\mathbf{a}}$ след умножение с число $\lambda \neq 0$, също се явява направляващ за правата g.

От друга страна, правата g се състои от точките $M(x, y)$, за които векторът $\overrightarrow{M_0M} = \vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}_0$ е колинеарен на вектора $\vec{\mathbf{a}}$, което позволява да представим правата като $g : \vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}_0 = t\vec{\mathbf{a}}$, където t е параметър, или

$$g : \vec{\mathbf{r}} = \vec{\mathbf{r}}_0 + t\vec{\mathbf{a}},$$

което се нарича ***векторно параметрично уравнение*** на правата g. Записвайки последното в координатен вид намираме

$$g : \left| \begin{aligned} x &= x_0 + a_1t \\ y &= y_0 + a_2t \end{aligned} \right.,$$

което се нарича ***скаларно параметрично уравнение*** на g. Точките от g се получават при различните стойности на параметъра t, който може да бъде всяко реално число.

Като елиминираме от последния запис параметъра t, получаваме

$$t = \frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2},$$

което обосновава следния запис

$$g : \frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2},$$

който се нарича ***канонично уравнение*** на правата g. В този запис знаменателите a_1 или a_2 могат да бъдат нули (но не и двата едновременно), което не е противоречие, понеже това не означава деление на нула.

Ако $a_1 = 0$, то правата g е успоредна на оста Ox, ако $a_2 = 0$, то правата g е успоредна на оста Oy. Нека g не е успоредна на оста Oy, т.е. $a_2 = 0$. Тогава каноничното уравнение може да се преобразува във вида

$$g : y = \left(\frac{a_2}{a_1}\right)x + \left(y_0 - x_0\frac{a_2}{a_1}\right)$$

което се записва по следния начин

$$g : y = kx + n .$$

Числото k се нарича ***ъглов коефициент*** на правата g. Другият параметър n задава пресечната точка на g с координатната ос Oy (пресечната точка има координати $(0, n)$).

Преминаването към различните видове уравнения на една права се получава лесно въз основа на дадените определения.

Пример 6.2. Ако правата g е дадена чрез своето канонично уравнение

$$g : \frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{3},$$

то по условие имаме една точка $M_0(-1,2)$, която лежи върху g и един направляващ вектор $\vec{\mathbf{a}}(2,3)$, следователно скаларното параметрично уравнение на g има вида

$$g : \begin{vmatrix} x = -1 + 2t \\ y = 2 + 3t \end{vmatrix}.$$

Един нормален вектор към тази права има координати $\vec{\mathbf{N}}(-3,2)$, следователно общото уравнение на g има вида

$$g : -3(x+1) + 2(y-2) = 0 \text{ или } g : -3x + 2y - 5 = 0 .$$

Уравнение на права през две точки. Да потърсим уравнение на права g по две дадени различни точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$, които лежат върху нея. В този случай ненулевият вектор $\vec{\mathbf{a}}(x_2 - x_1, y_2 - y_1) = \overrightarrow{M_1M_2}$ се явява направляващ за правата, следователно g има скаларно параметрично уравнение

$$g : \begin{vmatrix} x = x_1 + (x_2 - x_1)t \\ y = y_1 + (y_2 - y_1)t \end{vmatrix}$$

и канонично уравнение

$$g = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}.$$

Пример 6.3. Да намерим уравнение на правата g през двете точки $M_1(1,3)$ и $M_2(-3,2)$. Скаларното параметрично и каноничното уравнения имат съответно вида

$$g : \begin{vmatrix} x = 1 - 4t \\ y = 3 - t \end{vmatrix},\quad g : \frac{x-1}{-4} = \frac{y-3}{-1},$$

откъдето лесно се намира и общото уравнение

$$g : (-1)(x-1) = (-4)(y-3) \text{ или } g : -x + 4y - 3 = 0 .$$

Нека правата g е определена от двете различни точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ и не се явява успоредна на координатната ос Oy. Тогава $x_1 \neq x_2$ и уравнението на g може да се запише във вида

$$g : y = y_1 + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) \text{ или } g : y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}x + \left[y_1 - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}x_1\right],$$

което показва, че правата g има ъглов коефициент

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

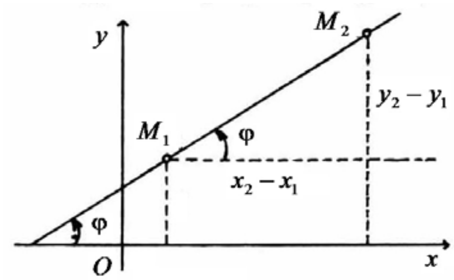

Рис. 6.4.

От друга страна (рис. 6.4.) от правоъгълния триъгълник с хипотенуза M_1M_2 се вижда, че

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1},$$

следователно за ъгловият коефициент имаме $k = \operatorname{tg}\varphi$, където φ, $-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$, е ъгълът, който сключва правата g с оста Ox.

От горното разсъждение веднага се получава, че съотношението

$$g : y = y_0 + k(x - x_0),$$

задава ***уравнение на права*** g***, минаваща през дадена точка*** $M_0(x_0, y_0)$ ***с даден ъглов коефициент*** k.

Взаимно разположение на две прави. Нека са дадени двете прави g_1 и g_2 чрез своите общи уравнения

$$g_1 : a_1x + b_1y + c_1 = 0\left(|a_1| + |b_1| > 0\right) \text{ и } g_2 : a_2x + b_2y + c_2 = 0\left(|a_2| + |b_2| > 0\right).$$

Различаваме следните три основни взаимни разположения.

1) Правите g_1 и g_2 се пресичат в единствена точка, $M_0(x_0, y_0)$, $M_0 = g_1 \cap g_2$.

2) Правите g_1 и g_2 са успоредни но не се сливат, $g_1 \parallel g_2$, $g_1 \neq g_2$.

3) Правите g_1 и g_2 се сливат, $g_1 \equiv g_2$.

Тези разположения можем да установим, разглеждайки уравненията на двете прави като система от две линейни уравнения с две неизвестни

$$a_1x + b_1y = -c_1$$

$$a_2x + b_2y = -c_2$$

с основна и разширена матрици

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \text{ и } \widetilde{A} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & -c_1 \\ a_2 & b_2 & -c_2 \end{pmatrix}.$$

По условие за ранговете на тези матрици винаги е изпълнено $1 \leq r(A) \leq r(\widetilde{A}) \leq 2$.

Първият случай е налице, когато системата е съвместима и определена – има единствено решение (x_0, y_0), което задава координатите на единствената пресечна точка $M_0(x_0, y_0)$. Според теоремата на Кронекер-Капели, това означава, че $r(A) = r(\widetilde{A}) = 2$, което е еквивалентно на $r(A) = 2$.

Вторият случай е налице, когато системата не е съвместима – няма решение. Според теоремата на Кронекер-Капели, това означава, че $r(A) < r(\widetilde{A})$, което е възможно, само когато $r(A) = 1$ и $r(\widetilde{A}) = 2$.

Третият случай е налице, когато системата е съвместима и неопределена – има безбройно много решения. Според теоремата на Кронекер-Капели, това означава, че $r(A) = r(\widetilde{A}) = 1$, което е еквивалентно на $r(\widetilde{A}) = 1$. В този случай става дума за една и съща права, представена (евентуално) чрез две различни уравнения, едното от които се получава от другото след умножение с някакво различно от нула число.

Пример 6.4. Правите

$$g_1 : 2x - 3y + 1 = 0 \text{ и } g_2 : 4x - 6y + 3 = 0$$

са успоредни, понеже

$$r\left[\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{pmatrix}\right] = 1 \text{ и } r\left[\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & -6 & 3 \end{pmatrix}\right] = 2.$$

Ъгъл между две прави. Под ъгъл φ между двете прави $g_1 : a_1x + b_1y + c_1 = 0$ и $g_2 : a_2x + b_2y + c_2 = 0$ се разбира ъгълът между кои да е техни направляващи вектори. По този начин φ се явява ъгълът между техните нормални вектори $\vec{\mathbf{N}}_1(a_1, b_1)$ и $\vec{\mathbf{N}}_2(a_2, b_2)$, следователно за ъгъла между правите g_1 и g_2 получаваме формулата

$$\cos\varphi = \frac{\vec{\mathbf{N}}_1\vec{\mathbf{N}}_2}{\left|\vec{\mathbf{N}}_1\right|\left|\vec{\mathbf{N}}_2\right|} = \frac{a_1a_2 + b_1b_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}.$$

Това определение дава два ъгъла, които се допълват до π. Когато $\varphi \neq \frac{\pi}{2}$, единият от тях е остър, а другият е тъп. Ако правите не са перпендикулярни, то за ***острия ъгъл*** между тях имаме

$$\cos\varphi = \frac{\left|\vec{\mathbf{N}}_1\vec{\mathbf{N}}_2\right|}{\left|\vec{\mathbf{N}}_1\right|\left|\vec{\mathbf{N}}_2\right|} = \frac{\left|a_1a_2 + b_1b_2\right|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}, \quad \left(0 \le \varphi < \frac{\pi}{2}\right).$$

Пример 6.5. Правите

$$g_1 : 2x + 3y - 1 = 0 \text{ и } g_2 : -3x + 2y - 2 = 0$$

са перпендикулярни, понеже

$$\cos\varphi = \frac{2.(-3) + 3.2}{\sqrt{2^2 + 3^2}\sqrt{(-3)^2 + 2^2}} = 0.$$

Ъгълът между две прави може да бъде намерен и с помощта на техните ъглови коефициенти (рис. 6.5). Нека са дадени правите g_1 и g_2, които сключват с координатната ос Ox съответно ъгли α_1 и α_2 и освен това сключват помежду си различен от прав ъгъл φ. Тогава

$$\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{\operatorname{tg}\alpha_2 - \operatorname{tg}\alpha_1}{1 + \operatorname{tg}\alpha_1 \operatorname{tg}\alpha_2},$$

откъдето за ъгъла между правите получаваме формулата

$$\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2},$$

където k_1 и k_2 са ъгловите коефициенти на g_1 и g_2.

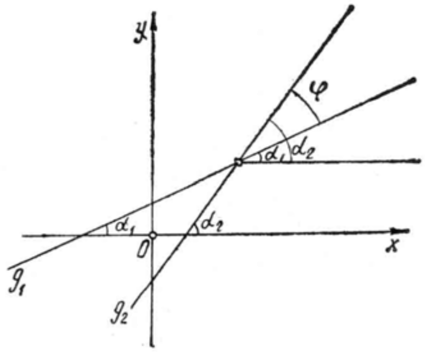

Рис. 6.6.

За да получим формула за ***острия ъгъл*** между правите, трябва да приложим последната формула по абсолютна стойност,

$$\operatorname{tg}\varphi = \left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}\right|.$$

От тук се вижда, че ако $k_1 = k_2$, то правите са успоредни, и ако $k_1 k_2 + 1 = 0$, то правите са перпендикулярни.

Разстояние между точка и права. Да разгледаме правата g, зададена чрез своето общо уравнение

$$g: ax + by + c = 0$$

и някаква точка от равнината $M_0(x_0, y_0)$ (рис. 6.6).

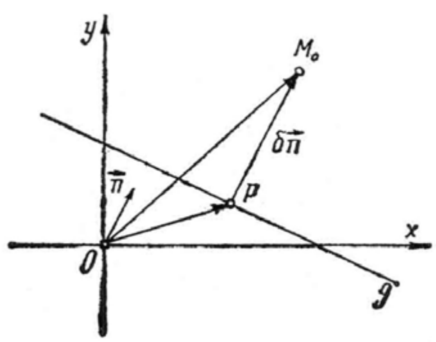

Рис. 6.6.

Тогава векторът $\vec{\mathbf{N}}(a,b)$ е нормален към правата, а векторът

$$\vec{\mathbf{n}} = \frac{\vec{\mathbf{N}}}{|\vec{\mathbf{N}}|} = \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)$$

е единичен нормален вектор към g. Нека P е ортогоналната проекция на точката M_0 върху g. Търсим разстоянието $d = d(g, M_0)$ между правата g и точката M_0. Очевидно $d = \left|\overrightarrow{PM_0}\right|$. Векторът $\overrightarrow{PM_0}$ е успореден на $\vec{\mathbf{n}}$, следователно $\overrightarrow{PM_0} = \delta\vec{\mathbf{n}}$, за някое число δ, а за търсеното разстояние получаваме

$$d = |\delta\vec{\mathbf{n}}| = |\delta||\vec{\mathbf{n}}| = |\delta|.$$

От друга страна $\overrightarrow{OM_0}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PM_0}=\overrightarrow{OP}+\delta\vec{\mathbf{n}}$, откъдето за координатите на точката P, които са същевременно и координати на нейния радиус вектор $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OM_0}-\delta\vec{\mathbf{n}}$ намираме

$$P\left(x_0-\delta\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},y_0-\delta\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right).$$

Числото δ ще определим от условието, че точката P лежи върху правата g, което означава, че нейните координати удовлетворяват уравнението,

$$a\left(x_0-\delta\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)+b\left(y_0-\delta\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)+c=0.$$

След преобразуване на последния израз получаваме

$$\delta=\frac{ax_0+bx_0+c}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

откъдето за търсеното разстояние намираме формулата

$$d=\frac{|ax_0+bx_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Пример 6.6. За разстоянието между правата $g:3x-4y+2=0$ и точката $M_0(1,0)$ пресмятаме

$$d=\frac{|3.1-4.0+2|}{\sqrt{3^2+4^2}}=1.$$

2. Уравнения на равнина в пространството. Предполагаме зададена правоъгълна положително ориентирана координатна система $Oxyz$ с ортонормирани базисни вектори $\vec{\mathbf{i}}$, $\vec{\mathbf{j}}$, $\vec{\mathbf{k}}$, с помощта на която ще представяме векторите и точките посредством техните координати.

Да разгледаме равнината α, съдържаща точката $M_0(x_0,y_0,z_0)\in\alpha$ и успоредна на двата неколинеарни вектора $\vec{\mathbf{a}}(a_1,a_2,a_3)\parallel\alpha$ и $\vec{\mathbf{b}}(b_1,b_2,b_3)\parallel\alpha$ (рис. 6.7).

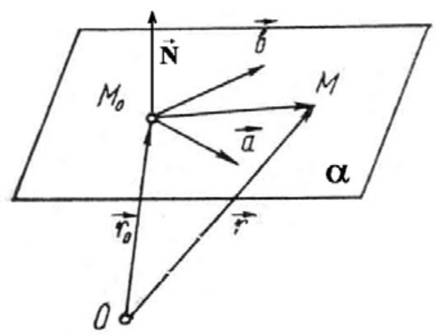

Рис. 6.7.

Тези данни определят по единствен начин равнината α, за която ще потърсим координатно уравнение. Нека $\vec{\mathbf{r}}_0=\overrightarrow{OM_0}$ и $\vec{\mathbf{r}}=\overrightarrow{OM}$ са радиус векторите на дадената точка M_0 и текущата точка M. Равнината α се състои от точките $M(x,y,z)$, за които векторите $\overrightarrow{M_0M}=\vec{\mathbf{r}}-\vec{\mathbf{r}}_0$, $\vec{\mathbf{a}}$ и $\vec{\mathbf{b}}$ са компланарни (лежат равнината α), което означава, че тяхното смесено произведение е равно на нула. По този начин за равнината α получихме представянето $\alpha:\left(\overrightarrow{MM_0},\vec{\mathbf{a}},\vec{\mathbf{b}}\right)=0$, което обосновава следното координатно уравнение за α

$$(6.3)\qquad \alpha: \begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Ако означим с A, B и C адюнгираните количества на първия ред на тази детерминанта, то уравнението (6.3) приема вида

$$(6.4)\qquad \alpha: A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0.$$

Сега като положим $D=-Ax_0-By_0-Cz_0$, получаваме

$$\alpha: Ax+By+Cz+D=0,$$

което се нарича ***общо уравнение*** на равнина в пространството. В това общо уравнение поне един от коефициентите A, B или C е различен от нула, понеже тези адюнгирани количества представляват координатите на векторното произведение

$$\vec{\mathbf{a}}\times\vec{\mathbf{b}} = \begin{vmatrix} \vec{\mathbf{i}} & \vec{\mathbf{j}} & \vec{\mathbf{k}} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix},$$

което е различно от нулевия вектор, понеже по условие векторите $\vec{\mathbf{a}}$ и $\vec{\mathbf{b}}$ са линейно независими. Това условие ще предполагаме налице, винаги когато разглеждаме общо уравнение на равнина в пространството.

Пример 6.7. Да намерим общото уравнение на равнината α, която съдържа точката $M_0(1,-2,3)$ и успоредна на векторите $\vec{\mathbf{a}}(1,1,-1)$ и $\vec{\mathbf{b}}(-1,0,2)$. Съгласно (6.3) това уравнение има вида

$$\alpha: \begin{vmatrix} x-1 & y+2 & z-3 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0,$$

откъдето намираме

$$\alpha: 2x-y+z-7=0.$$

Теорема 6.2. Нека A, B, C и D са числа такива, че $|A|+|B|+|C|>0$ (поне едно между A, B и C е различно от нула). Тогава съвкупността от точки $M(x,y,z)$ в пространството, чиито координати удовлетворяват равенството

$$(6.5)\qquad Ax+By+Cz+D=0,$$

образуват някаква равнина α.

Доказателство. Ако разгледаме (6.5) като система от едно уравнение с три неизвестни, то тази система съгласно теоремата на Кронекер-Капели е съвместима и определена, следователно има безбройно много решения. По условие $A\neq 0$ или $B\neq 0$ или $C\neq 0$. За определеност да предположим, че $A\neq 0$ (другите случаи се разглеждат аналогично), при което за простота можем да предположим $A=1$. Тогава съгласно общата теорема за структурата на решенията на линейна система, решенията на (6.3) се записват във вида

$$(6.6)\qquad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -D \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -B \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -C \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

където λ и μ са произволни коефициенти. Да положим

$$\vec{\mathbf{v}}_1 = \begin{pmatrix} -D \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \vec{\mathbf{v}}_2 = \begin{pmatrix} -B \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ и } \vec{\mathbf{v}}_3 = \begin{pmatrix} -C \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Тогава векторите $\vec{\mathbf{r}}_1 = \vec{\mathbf{v}}_1$, $\vec{\mathbf{r}}_2 = \vec{\mathbf{v}}_1 + \vec{\mathbf{v}}_2$, $\vec{\mathbf{r}}_3 = \vec{\mathbf{v}}_1 + \vec{\mathbf{v}}_3$, които се получават от (6.6) съответно при $\lambda = \mu = 0$, $\lambda = 1$ и $\mu = 0$, $\lambda = 0$ и $\mu = 1$ са решения на системата (6.5), при което очевидно $\vec{\mathbf{r}}_2 - \vec{\mathbf{r}}_1 = \vec{\mathbf{v}}_2$ и $\vec{\mathbf{r}}_3 - \vec{\mathbf{r}}_1 = \vec{\mathbf{v}}_3$ са линейно независими, понеже за техния ранг е изпълнено

$$r(\vec{\mathbf{r}}_2, \vec{\mathbf{r}}_3) = r\begin{pmatrix} -B & -C \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2.$$

Нека $\vec{\mathbf{r}}_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{\mathbf{r}}_2 = (x_2, y_2, z_2)$ и $\vec{\mathbf{r}}_3 = (x_3, y_3, z_3)$. Координатите на тези вектори удовлетворяват уравнението (6.6). Да разгледаме точките $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ и $M_3(x_3, y_3, z_3)$. Тези три точки сигурно ***не лежат върху една права***, понеже векторите $\overrightarrow{M_1M_2} = \vec{\mathbf{r}}_2 - \vec{\mathbf{r}}_1$ и $\overrightarrow{M_1M_3} = \vec{\mathbf{r}}_3 - \vec{\mathbf{r}}_1$ са линейно независими. Следователно M_1, M_2 и M_3 определят по единствен начин някаква равнина α (рис. 6.8).

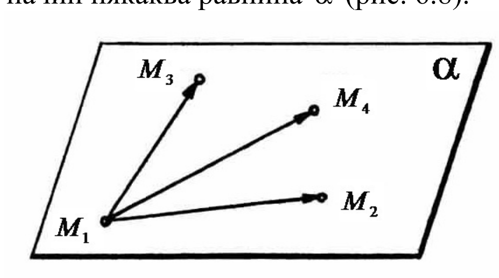

Рис. 6.8.

Остава да докажем, че всяка точка $M_4(x_4, y_4, z_4)$, чиито координати удовлетворяват уравнението (6.5), лежи в същата равнина α. По условие имаме

$$\begin{aligned} &Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0 \\ &Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D = 0 \\ &Ax_3 + By_3 + Cz_3 + D = 0 \\ &Ax_4 + By_4 + Cz_4 + D = 0 \end{aligned}$$

Ако извадим почленно първото равенство от другите три получаваме

$$\begin{aligned} &(x_2 - x_1)A + (y_2 - y_1)B + (z_2 - z_1)C = 0 \\ &(x_3 - x_1)A + (y_3 - y_1)B + (z_3 - z_1)C = 0 \, . \\ &(x_4 - x_1)A + (y_4 - y_1)B + (z_4 - z_1)C = 0 \end{aligned}$$

Последното може да се разглежда като хомогенна система от три уравнения с три неизвестни A, B и C, която по условие има ненулево решение. Съгласно общите свойства на хомогенните системи, последното е възможно единствено когато нейната детерминанта е равна на нула,

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & z_4 - z_1 \end{vmatrix} = 0,$$

което означава, че между редовете на детерминантата има линейна зависимост. От друга страна тези редове са точно координатите на векторите $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\overrightarrow{M_1M_3}$ и $\overrightarrow{M_1M_4}$, което показва, че те са линейно зависими и следователно векторът $\overrightarrow{M_1M_4}$ лежи в равнината α. ■

Един ненулев вектор $\vec{\mathbf{N}}$ се нарича нормален към равнината α, когато е перпендикулярен на α, $\vec{\mathbf{N}} \perp \alpha$. Според това определение, векторът $\vec{\mathbf{N}}$ е нормален към α когато е ортогонален на всеки вектор от равнината α.

Твърдение 6.1. Векторът $\vec{\mathbf{N}}$ е нормален към равнината α тогава и само тогава, когато е ортогонален на някои (кои да е) два линейно независими (неколинеарни) вектори $\vec{\mathbf{a}}$ и $\vec{\mathbf{b}}$ от тази равнина.

Доказателство. Нека вектори $\vec{\mathbf{a}}$ и $\vec{\mathbf{b}}$ лежат в равнината α и са линейно независими, при което $\vec{\mathbf{N}} \perp \vec{\mathbf{a}}$ и $\vec{\mathbf{N}} \perp \vec{\mathbf{b}}$. На езика на скаларното произведение последното означава $\vec{\mathbf{N}}\vec{\mathbf{a}} = \vec{\mathbf{N}}\vec{\mathbf{b}} = 0$. Да разгледаме кой да е вектор $\vec{\mathbf{c}}$ от тази равнина. По условие $\vec{\mathbf{a}}$ и $\vec{\mathbf{b}}$ са линейно независими, следователно образуват базис в α и $\vec{\mathbf{c}}$ може да се изрази като линейна комбинация на $\vec{\mathbf{a}}$ и $\vec{\mathbf{b}}$, $\vec{\mathbf{c}} = \lambda\vec{\mathbf{a}} + \mu\vec{\mathbf{b}}$. Тогава

$$\vec{\mathbf{N}}\vec{\mathbf{c}} = \vec{\mathbf{N}}\left(\lambda\vec{\mathbf{a}} + \mu\vec{\mathbf{b}}\right) = \lambda\vec{\mathbf{N}}\vec{\mathbf{a}} + \mu\vec{\mathbf{N}}\vec{\mathbf{b}} = 0,$$

следователно $\vec{\mathbf{N}} \perp \vec{\mathbf{c}}$. Последното е валидно за всеки вектор от α, което по определение означава, че $\vec{\mathbf{N}}$ е нормален към α. Ако пък е известно, че $\vec{\mathbf{N}}$ е нормален към α, то $\vec{\mathbf{N}}$ е ортогонален на всеки вектор от α, в частност и на векторите $\vec{\mathbf{a}}$ и $\vec{\mathbf{b}}$. ■

Нека е дадена равнина α с общо уравнение $\alpha: Ax + By + Cz + D = 0$. ***Тогава ненулевият вектор*** $\vec{\mathbf{N}}(A,B,C)$ ***е нормален към равнината*** α. Наистина, нека $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ са някакви точки от α, което означава, че

$$\begin{aligned} &Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0 \\ &Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D = 0 \end{aligned}.$$

Като извадим първото уравнение от второто получаваме равенството

$$A(x_2 - x_1) + B(y_2 - y_1) + C(z_2 - z_1) = 0,$$

което показва, че векторите $\vec{\mathbf{N}}(A,B,C)$ и $\overrightarrow{M_1M_2}(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$ са ортогонални, следователно така определеният вектор $\vec{\mathbf{N}}$ е ортогонален на всеки вектор с начало и край върху равнината, което доказва твърдението.

Една равнина α напълно се определя по дадена точка $M_0(x_0, y_0, z_0) \in \alpha$ и даден нормален вектор $\vec{\mathbf{N}}(A,B,C) \perp \alpha$, $\vec{\mathbf{N}} \neq \vec{\mathbf{0}}$ (рис. 6.9).

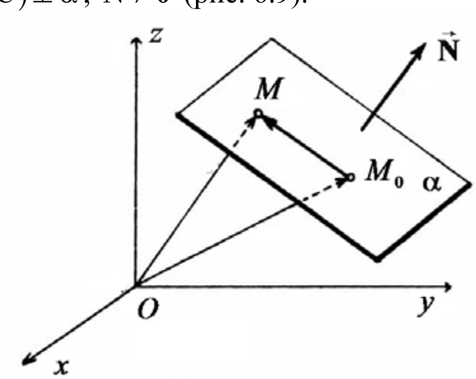

Рис. 6.9.

Нека $\vec{\mathbf{r}}_0(x_0, y_0, z_0)$ и $\vec{\mathbf{r}}(x, y, z)$ са радиус векторите на дадената точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и текущата точка от равнината $M(x, y, z)$. Равнината α се състои от точките $M(x, y, z)$, за които $\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}_0 = \overrightarrow{M_0 M} \perp \vec{\mathbf{N}}$, което означава, че скаларното произведение на векторите $\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}_0$ и $\vec{\mathbf{N}}$ е равно на нула. Следователно точките от α се описват от съотношението $\alpha : (\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}_0)\vec{\mathbf{N}} = 0$, което в координатна форма има вида

(6.7) $\quad \alpha : A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$,

и се нарича ***уравнение на равнина през дадена точка и известен нормален вектор***.

Пример 6.8. Уравнението на равнината α, която съдържа точката $M_0(2,-1,3)$ и има нормален вектор $\vec{\mathbf{N}}(2,1,1)$ има вида

$$\alpha : 2(x-2) + 1(y+1) + 1(z-3) = 0.$$

Уравнението (6.7) предлага алтернативен начин за решаване на задачата за намиране уравнение на равнина през дадена $M_0(x_0, y_0, z_0) \in \alpha$ и съдържаща два линейно независими вектора $\vec{\mathbf{a}}(a_1, a_2, a_3) \parallel \alpha$ и $\vec{\mathbf{b}}(b_1, b_2, b_3) \parallel \alpha$. В този случай, съгласно твърдение 6.1, векторът $\vec{\mathbf{N}} = \vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}}$ е нормален към равнината α, следователно поставената задача може да бъде решена посредством уравнението (6.7). Между записа на уравненията (6.4) и (6.7) няма формална разлика, понеже при уравнението (6.4) коефициентите A, B и C се оказаха координатите на вектора $\vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}}$, които се явяват и координати на вектора $\vec{\mathbf{N}}$ при уравнението (6.7).

От друга страна, както вече споменахме при извода на уравнението (6.3), равнината α може да бъде характеризирана като съвкупността от точки в пространството, за които векторите $\overrightarrow{M_0 M} = \vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}_0$, $\vec{\mathbf{a}}$ и $\vec{\mathbf{b}}$ са линейно зависими, което означава, че $\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}_0$ може да се запише като линейна комбинация на векторите $\vec{\mathbf{a}}$ и $\vec{\mathbf{b}}$, понеже те образуват базис в α. По този начин за α намерихме представянето $\alpha : \vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}_0 = \lambda\vec{\mathbf{a}} + \mu\vec{\mathbf{b}}$, което записваме във вида

(6.8) $\quad \alpha : \vec{\mathbf{r}} = \vec{\mathbf{r}}_0 + \lambda\vec{\mathbf{a}} + \mu\vec{\mathbf{b}}$,

където параметрите λ и μ могат да приемат произволни константи. Последното се нарича ***векторно параметрично уравнение*** на равнина в пространството. За разлика от параметричното уравнение на права, което съдържа само един параметър, (6.8) съдържа два параметъра, понеже геометричната размерност на равнината е равна на 2.

Записвайки (6.8) в координатен вид, получаваме

$$\alpha : \left| \begin{array}{l} x = x_0 + \lambda a_1 + \mu b_1 \\ y = y_0 + \lambda a_2 + \mu b_2 \\ z = z_0 + \lambda a_3 + \mu b_3 \end{array} \right.$$

което се нарича ***скаларно параметрично уравнение*** на равнина в пространството.

Уравнение на равнина през три точки. Да разгледаме три точки в пространството $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ и $M_3(x_3, y_3, z_3)$, които не лежат върху една права. Тогава те определят единствена равнина α. Ако положим

$$\vec{\mathbf{a}} = \overrightarrow{M_1 M_2}(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1) \text{ и } \vec{\mathbf{b}} = \overrightarrow{M_1 M_3}(x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1),$$

то координатното уравнение на α може да се намери по формулата (6.3)

$$\alpha:\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0 .$$

Тази равнина има нормален вектор

$$\vec{\mathbf{N}}=\vec{\mathbf{a}}\times\vec{\mathbf{b}}=\begin{vmatrix} \vec{\mathbf{i}} & \vec{\mathbf{j}} & \vec{\mathbf{k}} \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}.$$

Пример 6.9. Общото уравнение на равнината α през трите точки $M_1(1,2,3)$, $M_2(3,4,5)$ и $M_3(3,2,1)$ има вида

$$\alpha:\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ 3-1 & 4-2 & 5-3 \\ 3-1 & 2-2 & 1-3 \end{vmatrix}=-4x+8y-4z=0 .$$

Преминаването от един вид уравнение към друг ще покажем върху пример. Нека равнината α е зададена чрез своето общо уравнение $\alpha: x-3y+2z-5=0$. Тогава, разсъждавайки както при доказателството на теорема 6.2 (разглеждайки общото уравнение на равнината като система от едно линейно уравнение с три неизвестни), за точките от равнината получаваме следното представяне

$$(6.9)\qquad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

от което веднага получаваме, че точката $M_0(-5,0,0)$ лежи в равнината α, а векторите $\vec{\mathbf{a}}(3,1,0)$ и $\vec{\mathbf{b}}(-2,0,1)$ са успоредни на α. Векторното равенство (6.9) е всъщност параметричното уравнение на α, понеже може да бъде преписано във вида

$$\alpha:\left|\begin{array}{l} x=5+3\lambda-2\mu \\ \quad y=\lambda \\ \quad z=\mu \end{array}\right. .$$

Пример 6.10. Нека равнината α е зададена посредством параметричното уравнение

$$\alpha:\left|\begin{array}{l} x=1+2\lambda+5\mu \\ y=-2-\lambda+2\mu \\ z=3+5\lambda-2\mu \end{array}\right. .$$

Тогава точката $M_0(1,-2,3)$ лежи в α, а векторите $\vec{\mathbf{a}}(2,-1,5)$ и $\vec{\mathbf{b}}(5,2,-2)$ са успоредни на α, следователно векторът

$$\vec{\mathbf{N}}=\vec{\mathbf{a}}\times\vec{\mathbf{b}}=\begin{vmatrix} \vec{\mathbf{i}} & \vec{\mathbf{j}} & \vec{\mathbf{k}} \\ 2 & -1 & 5 \\ 5 & 2 & -2 \end{vmatrix}=-7\vec{\mathbf{i}}+29\vec{\mathbf{j}}+9\vec{\mathbf{k}}$$

е нормален към α. Сега общото уравнение на α може да бъде намерено по два (еквивалентни) начина. По формулата (6.7) имаме

$$\alpha: -7(x-1)+29(x+2)+9(z-3)=0 .$$

Взаимно разположение на две равнини. Нека са дадени двете равнини α_1 и α_2 чрез своите общи уравнения

(6.10) $\alpha_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и $\alpha_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$,

където $|A_1| + |B_1| + |C_1| > 0$ и $|A_2| + |B_2| + |C_2| > 0$. Различаваме следните три основни взаимни разположения.

1) Равнините α_1 и α_2 се пресичат в една права g, $g = \alpha_1 \cap \alpha_2$.

2) Равнините α_1 и α_2 са успоредни но не се сливат, $\alpha_1 \parallel \alpha_2$, $\alpha_1 \neq \alpha_2$.

3) Равнините α_1 и α_2 се сливат, $\alpha_1 \equiv \alpha_2$.

Тези разположения можем да установим, разглеждайки уравненията на двете равнини като система от две линейни уравнения с три неизвестни

$$A_1x + B_1y + C_1z = -D_1$$
$$A_2x + B_2y + C_2z = -D_2$$

с основна и разширена матрици

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix} \text{ и } \widetilde{A} = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & -D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & -D_2 \end{pmatrix}.$$

По условие за ранговете на тези матрици винаги е изпълнено $1 \leq r(A) \leq r(\widetilde{A}) \leq 2$.

Вторият случай е налице, когато системата не е съвместима – няма решение. Според теоремата на Кронекер-Капели, това означава, че $r(A) < r(\widetilde{A})$, което е възможно, само когато $r(A) = 1$ и $r(\widetilde{A}) = 2$.

При първия и третия случай системата е съвместима, което означава $r(A) = r(\widetilde{A}) = 2$ или $r(A) = r(\widetilde{A}) = 1$

Нека е налице равенството $r(A) = r(\widetilde{A}) = 1$, което е еквивалентно на $r(\widetilde{A}) = 1$. Тогава, съгласно теоремата за базисния минор, всеки от редовете на разширената матрица $\widetilde{A}$ се получава от другия след умножение с някакво различно от нула число, следователно уравненията на α_1 и α_2 задават едно и също множество в пространството, което съответства на третия случай на сливащи се равнини.

Поради липса на друга възможност, за първия случай на равнини пресичащи се в една права остава случая $r(A) = r(\widetilde{A}) = 2$.

Взаимното разположение на двете равнини α_1 и α_2 може да бъде характеризирано и с помощта на техните нормални вектори $\vec{\mathbf{N}}_1(A_1, B_1, C_1)$ и $\vec{\mathbf{N}}_2(A_2, B_2, C_2)$, понеже две равнини са успоредни (колинеарни, линейно зависими) тогава и само тогава, когато са успоредни техните нормални вектори, а двата вектора $\vec{\mathbf{N}}_1$ и $\vec{\mathbf{N}}_2$ са успоредни тогава и само тогава, когато $\vec{\mathbf{N}}_1 \times \vec{\mathbf{N}}_2 = \vec{\mathbf{0}}$.

По този начин доказахме следното

Твърдение 6.2. Нека са дадени двете равнини α_1 и α_2 чрез своите общи уравнения (6.10). Тогава

1) Равнините α_1 и α_2 се пресичат в една права тогава и само тогава, когато $r(A) = 2$, което е еквивалентно на $\vec{\mathbf{N}}_1 \times \vec{\mathbf{N}}_2 \neq \vec{\mathbf{0}}$.

2) Равнините α_1 и α_2 са успоредни но не се сливат тогава и само тогава, когато $r(A) = 1$ и $r(\widetilde{A}) = 2$. Последното е налице, точно когато $\vec{\mathbf{N}}_1 \times \vec{\mathbf{N}}_2 = \vec{\mathbf{0}}$ и всяка точка от едната равнина не лежи върху другата равнина.

3) Равнините α_1 и α_2 са успоредни но не се сливат тогава и само тогава, когато $r(\widetilde{A})=1$. Последното е налице, точно когато $\vec{\mathbf{N}}_1 \times \vec{\mathbf{N}}_2 = \vec{\mathbf{0}}$ и всяка точка от едната равнина лежи върху другата равнина. ■

Една примерна точка M_α, която лежи в равнината $\alpha: Ax+By+Cz+D=0$ има координати

$$M_\alpha\left(\frac{-AD}{A^2+B^2+C^2}, \frac{-BD}{A^2+B^2+C^2}, \frac{-CD}{A^2+B^2+C^2}\right).$$

Тази точка се явява проекцията на началото на координатната система върху равнината.

Пример 6.11. Равнините

$$\alpha_1: 2x-3y+z+1=0 \text{ и } g_2: 3x-2y-5z+3=0$$

се пресичат в една права, понеже за ранга на основната матрица имаме

$$r\left[\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & -2 & 5 \end{pmatrix}\right]=2$$

и разбира се

$$\vec{\mathbf{N}}_1 \times \vec{\mathbf{N}}_2 = \begin{vmatrix} \vec{\mathbf{i}} & \vec{\mathbf{j}} & \vec{\mathbf{k}} \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -2 & -5 \end{vmatrix} = 17\vec{\mathbf{i}} + 13\vec{\mathbf{j}} + 5\vec{\mathbf{k}} \neq \vec{\mathbf{0}}.$$

Ъгъл между две равнини. Ъгълът между двете равнини (6.10) се определя като ъгълът φ, който сключват кои да е два нормални вектора, например $\vec{\mathbf{N}}_1(A_1, B_1, C_1)$ и $\vec{\mathbf{N}}_2(A_2, B_2, C_2)$, следователно за ъгъла φ между равнините α_1 и α_2 е в сила формулата

$$\cos\varphi = \frac{\vec{\mathbf{N}}_1 \vec{\mathbf{N}}_2}{\left|\vec{\mathbf{N}}_1\right|\left|\vec{\mathbf{N}}_2\right|} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}.$$

Това определение дава два ъгъла, които се допълват до π. Когато $\varphi \neq \frac{\pi}{2}$, единият от тях е остър, а другият е тъп.

Пример 6.12. За ъгъла между равнините

$$\alpha_1: x+2y+3z-5=0 \text{ и } \alpha_2: 3x-y+2z+1=0$$

намираме

$$\cos\varphi = \frac{1.3+2.(-1)+3.2}{\sqrt{1^2+2^2+3^2}\sqrt{3^2+(-1)^2+2^2}} = \frac{1}{2},$$

следователно в този пример равнините α_1 и α_2 сключват ***остър ъгъл*** $\varphi = \frac{\pi}{3}$.

Разстояние между точка и равнина. Да разгледаме равнината α, зададена чрез своето общо уравнение $\alpha: Ax+By+cz+D=0$ и някаква точка от пространството $M_0(x_0, y_0, z_0)$ (рис. 6.10). През точката M_0 да прекараме права g до пресичане с равнината α в точката $M_1(x_1, y_1, z_1)$.

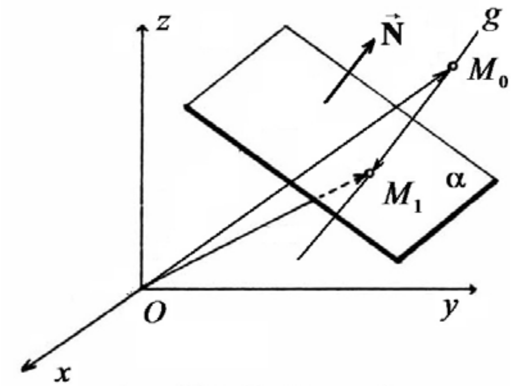

Рис. 6.10.

Тогава векторът $\vec{\mathbf{N}}(A,B,C)$ е нормален към равнината, а векторът

$$\vec{\mathbf{n}}=\frac{\vec{\mathbf{N}}}{\left|\vec{\mathbf{N}}\right|}=\left(\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\right)$$

е ***единичен нормален вектор*** към α. Точката M_1 се явява ортогоналната проекция на M_0 върху равнината α. Търсим разстоянието $d=d(\alpha,M_0)$ между равнината α и точката M_0. Очевидно $d=\left|\overrightarrow{M_0M_1}\right|$. Векторът $\overrightarrow{M_0M_1}$ е успореден на $\vec{\mathbf{n}}$, следователно $\overrightarrow{M_0M_1}=\delta\vec{\mathbf{n}}$, за някое число δ, а за търсеното разстояние получаваме

$$d=|\delta\vec{\mathbf{n}}|=|\delta||\vec{\mathbf{n}}|=|\delta|.$$

От друга страна $\overrightarrow{OM_1}=\overrightarrow{OM_0}+\overrightarrow{M_0M_1}=\overrightarrow{OM_0}+\delta\vec{\mathbf{n}}$, откъдето за координатите на точката M_1, които са същевременно и координати на нейния радиус вектор $\overrightarrow{OM_1}=\overrightarrow{OM_0}+\delta\vec{\mathbf{n}}$ намираме

$$M_1\left(x_0+\delta\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},y_0+\delta\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},z_0+\delta\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\right).$$

Числото δ ще определим от условието, че точката M_1 лежи върху равнината α, което означава, че нейните координати удовлетворяват уравнението,

$$A\left(x_0+\delta\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\right)+B\left(x_0+\delta\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\right)+$$
$$+C\left(x_0+\delta\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\right)+D=0.$$

След преобразуване на последния израз получаваме

$$\delta=\frac{Ax_0+Bx_0+Cz_0}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

откъдето за търсеното разстояние намираме формулата

$$d=\frac{|Ax_0+Bx_0+Cz_0|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

Пример 6.13. За разстоянието между равнината $\alpha:2x+y-2z+5=0$ и точката $M_0(2,1,-4)$ пресмятаме

$$d=\frac{|3.2+1.1+(-2)(-4)+5|}{\sqrt{2^2+1^2+(-2)^2}}=6\,.$$

3. Уравнения на права в пространството. Предполагаме зададена правоъгълна положително ориентирана координатна система $Oxyz$ при ортонормирани базисни вектори $\vec{\mathbf{i}}$, $\vec{\mathbf{j}}$, $\vec{\mathbf{k}}$, с помощта на която ще представяме векторите и точките посредством техните координати.

Да разгледаме правата g, определена от точката $M_0(x_0,y_0,z_0)$, която лежи върху g, $M_0\in g$, и даден направляващ вектор $\vec{\mathbf{a}}(a_1,a_2,a_3)\neq\vec{\mathbf{0}}$, $\vec{\mathbf{a}}\parallel g$ (рис. 6.11).

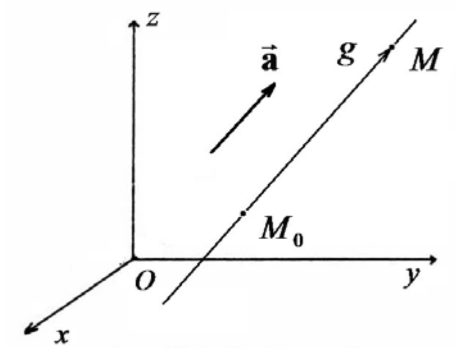

Рис. 6.11.

Правата g се състои от точките M, за които векторът $\overrightarrow{M_0M}$ е успореден на $\vec{\mathbf{a}}$, следователно g се характеризира чрез равенството $\overrightarrow{M_0M}=\lambda\vec{\mathbf{a}}$, което можем да запишем като $\vec{\mathbf{r}}-\vec{\mathbf{r}}_0=\lambda\vec{\mathbf{a}}$, където $\vec{\mathbf{r}}$ и $\vec{\mathbf{r}}_0$ са радиус векторите на текущата точка $M(x,y,z)$ и дадената точка M_0. По този начин получихме ***векторно параметричното уравнение*** на правата g,

$$g:\vec{\mathbf{r}}=\vec{\mathbf{r}}_0+\lambda\vec{\mathbf{a}}\,.$$

Последното в координатна форма има вида

$$g:\left|\begin{array}{l}x=x_0+\lambda a_1\\ y=y_0+\lambda a_2\\ z=z_0+\lambda a_3\end{array}\right.$$

което се нарича ***скаларно параметрично уравнение*** на правата g.

Пример 6.14. Правата g през точката $M_0(1,2,3)$ с направляващ вектор $\vec{\mathbf{a}}(2,-1,1)$ има уравнение

$$(6.11)\quad g:\left|\begin{array}{l}x=1+2\lambda\\ y=2-\lambda\ ,\\ z=3+\lambda\end{array}\right.$$

където λ е параметър, който може да приема произволни стойности. Сега като изключим параметъра λ от уравненията на (6.11), за правата g получаваме следното представяне

$$g:\frac{x-x_0}{a_1}=\frac{y-y_0}{a_2}=\frac{z-z_0}{a_3}\,,$$

което се нарича ***канонично уравнение*** на правата. И тук, както при каноничното уравнение на права в равнината, някое от числата a_1, a_2 или a_3 може да бъде нула, но не и трите едновременно, понеже представляват координатите на ненулевия направляващ вектор $\vec{\mathbf{a}}$.

Пример 6.16. Нека правата g е зададена чрез своето канонично уравнение

$$g: \frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{-1}.$$

От последния запис веднага заключаваме, че точката $M_0(-1,2,3)$ лежи върху правата g и векторът $\vec{\mathbf{a}}(2,3,-1)$ е направляващ за g, следователно правата g има следното параметрично уравнение

$$g: \left| \begin{array}{l} x = -1 + 2\lambda \\ y = 2 + 3\lambda \\ z = 3 - \lambda \end{array} \right. .$$

Нека правата g е определена като ***пресечница*** на двете пресичащи се равнини

$$\alpha_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \text{ и } \alpha_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$$

Да разгледаме общите уравнения на α_1 и α_2 заедно като система от две линейни уравнения с три неизвестни x, y и z

$$(6.12) \quad \left| \begin{array}{l} A_1x + B_1y + C_1z = -D_1 \\ A_2x + B_2y + C_2z = -D_2 \end{array} \right. .$$

По условие равнините α_1 и α_2 се пресичат, което означава, че техните нормални вектори $\vec{\mathbf{N}}_1(A_1, B_1, C_1)$ и $\vec{\mathbf{N}}_2(A_2, B_2, C_2)$ не са успоредни и следователно техният ранг е равен на 2, $r(\vec{\mathbf{N}}_1, \vec{\mathbf{N}}_2) = 2$ и съответно за ранга на основната матрица на (6.12) намираме

$$r\left[\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix}\right] = r(\vec{\mathbf{N}}_1, \vec{\mathbf{N}}_2) = 2.$$

Последният факт показва, че системата (6.12) е съвместима и неопределена, при което има точно едно свободно неизвестно. Поне един от минорите

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}$$

е различен от нула, например нека

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Тогава системата (6.12) може да се преобразува по метода на Гаус-Жордан с базисни неизвестни x и y и свободно неизвестно z, при което ще приеме вида

$$\left| \begin{array}{l} x + C_1'z = D_1' \\ y + C_2'z = D_2' \end{array} \right. ,$$

която има общо решение

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_1' \\ D_2' \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -C_1' \\ -C_2' \\ 1 \end{pmatrix},$$

от което веднага получаваме параметричното уравнение на пресечната права g.

От друга страна пресечницата $g = \alpha_1 \cap \alpha_2$ лежи едновременно в двете равнини и следователно е перпендикулярна едновременно на двата нормални вектора $\vec{\mathbf{N}}_1$ и $\vec{\mathbf{N}}_2$, откъдето веднага следва, че векторът $\vec{\mathbf{a}} = \vec{\mathbf{N}}_1 \times \vec{\mathbf{N}}_2$ се явява направляващ за g. Сега за да намерим уравнение за правата g е достатъчно за имаме на разположение една (коя да е) точка от нея, което означава да намерим някакво (кое да е) частно решение на линейната система (6.12).

Пример 6.16. Да намерим уравнение за правата g, получена от пресичането на равнините $\alpha_1 : x + y + 2z - 1 = 0$ и $\alpha_2 : 2x - y + 3z - 5 = 0$. Тази права има направляващ вектор

$$\vec{\mathbf{a}} = \vec{\mathbf{N}}_1 \times \vec{\mathbf{N}}_2 = \begin{vmatrix} \vec{\mathbf{i}} & \vec{\mathbf{j}} & \vec{\mathbf{k}} \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 5\vec{\mathbf{i}} + \vec{\mathbf{j}} - 3\vec{\mathbf{k}}.$$

За да намерим една точка от правата, търсим едно решение на системата

$$\left| \begin{array}{l} x + y + 2z = 1 \\ 2x - y + 3z = 5 \end{array} \right. .$$

Като положим $z = 0$, получаваме $x = 2$ и $y = -1$, следователно точката $M_0(2,-1,0)$ лежи върху правата g, за която намираме следното канонично уравнение

$$g : \frac{x-2}{5} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{-3}$$

и съответно следното параметрично уравнение

$$g : \left| \begin{array}{l} x = 2 + 5\lambda \\ y = -1 + \lambda \\ z = -3\lambda \end{array} \right. .$$

Нека $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$ са две различни точки от пространството. Тогава съществува единствена права g, която минава и през двете точки. Тази права има направляващ вектор $\vec{\mathbf{a}} = \overrightarrow{M_1M_2}(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$, следователно правата g има уравнение

$$g : \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1},$$

което се нарича ***канонично уравнение*** на права в пространството през две дадени точки.

Пример 6.17. Правата g минаваща през точките $M_1(1,2,3)$ и $M_2(3,1,-2)$ има уравнение

$$g : \frac{x-1}{-2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{5}.$$

Взаимно разположение на права и равнина. Да разгледаме правата

(6.13) $\quad g : \dfrac{x - x_0}{a_1} = \dfrac{y - y_0}{a_2} = \dfrac{z - z_0}{a_3}$

с дадена точка от нея $M_0(x_0, y_0, z_0) \in g$ и даден направляващ вектор $\vec{\mathbf{a}}(a_1, a_2, a_3) \neq \vec{\mathbf{0}}$ и равнината α

(6.14) $\quad \alpha : Ax + By + Cz + D = 0$

с нормален вектор $\vec{\mathbf{N}}(A, B, C) \neq \vec{\mathbf{0}}$. Различаваме следните три основни взаимни разположения.

1) Правата g пробожда равнината α в една точка $M_1(x_1, y_1, z_1) = g \cap \alpha$.

2) Правата g е успоредна на равнината α и не лежи в нея, $g \parallel \alpha$, $g \notin \alpha$.
3) Правата g лежи в равнината α, $g \in \alpha$.

Първият случай е налице, когато векторите $\vec{\mathbf{a}}$ и $\vec{\mathbf{N}}$ не сключват прав ъгъл, т.е. когато $\vec{\mathbf{a}}\vec{\mathbf{N}} = a_1A + a_2B + a_3C \neq 0$. Пресечната точка $M_1(x_1, y_1, z_1)$ лежи върху g, следователно за нейните координати имаме

$$\begin{vmatrix} x_1 = x_0 + \tau a_1 \\ y_1 = y_0 + \tau a_2 \\ z_1 = y_0 + \tau a_3 \end{vmatrix}$$

при някоя конкретна стойност на параметъра τ. За да намерим тази стойност заместваме координатите на M_1 в уравнението на равнината α и получаваме

$$\tau(a_1A + a_2B + a_3C) + (Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D) = 0$$

или по друг начин

(6.15) $\tau(\vec{\mathbf{a}}\vec{\mathbf{N}}) + (Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D) = 0$,

което винаги има единствено решение, понеже коефициентът пред τ в този случай сигурно е различен от нула.

Уравнението, което представлява частен случай на система от едно линейно уравнение с едно неизвестно τ, (6.15) определя всичките общи точки между правата g и равнината α, следователно тяхното взаимно разположение изцяло зависи от вида на (6.15). Когато това уравнение има единствено решение (съвместима и определена система), то правата пробожда равнината.

Ако (6.15) няма решения (несъвместима система), то правата и равнината са успоредни, което е вторият случай. Това е налице, когато $\vec{\mathbf{a}}\vec{\mathbf{N}} = a_1A + a_2B + a_3C = 0$, т.е. когато векторите $\vec{\mathbf{a}}$ и $\vec{\mathbf{N}}$ са ортогонални, но другият коефициент е различен от нула, $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \neq 0$.

Последната възможност за (6.15) е да има безбройно много решения (съвместима и неопределена система), което определя третия случай, когато правата лежи в равнината. Това е налице, когато $\vec{\mathbf{a}}\vec{\mathbf{N}} = a_1A + a_2B + a_3C = 0$ и другият коефициент е равен на нула, $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$.

Пример 6.18. Да определим взаимното разположение на правата

$$g : \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z}{-1}$$

и равнината $\alpha : x + y - 2z - 3 = 0$. Тук $M_0(1,2,0)$ е точка от g, а векторът $\vec{\mathbf{a}}(1,-2,-1)$ е направляващ за g. Равнината α има нормален вектор $\vec{\mathbf{N}}(1,1,-2)$. За да определим взаимното разположение на g и α съставяме уравнението (6.15), което в дадения конкретен случай има вида $\tau + 3 = 0$, което има единственото решение $\tau = -3$ и следователно правата пробожда равнината. За да намерим координатите на прободната точка $M_1(x_1, y_1, z_1)$, в параметричното уравнение на g

$$\begin{vmatrix} x = 1 + \lambda \\ y = 2 - 2\lambda \\ z = -\lambda \end{vmatrix}$$

заместваме параметъра λ със стойността $\lambda = \tau = 1$, при която стойност се получава точката M_1 и намираме, че M_1 има координати $M_1(2,0,-1)$.

Ъгъл φ между правата g, зададена с каноничното уравнение (6.13) и равнината α, зададена с общото уравнение (6.14), когато g не е перпендикулярна на α, се нарича ъгълът между правата g и нейната ортогонална проекция в равнината (рис. 6.12). Когато $g \perp \alpha$, по определение $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$ (в този случай ортогоналната проекция на g върху α се свежда до прободната точка на g с α).

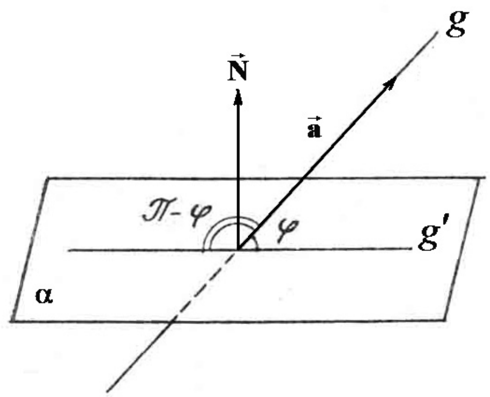

Рис. 6.12.

Горното определение задава два ъгъла, които се допълват до π. Нека ψ е ъгълът между направляващият вектор $\vec{\mathbf{a}}$ и нормалният вектор $\vec{\mathbf{N}}$. Тогава при всяко взаимно разположение на $\vec{\mathbf{a}}$ и $\vec{\mathbf{N}}$ е изпълнено $\sin\varphi = |\cos\psi|$, следователно за ъгъла φ между правата g и равнината α имаме

$$\sin\varphi = \frac{|a_1 A + a_2 B + a_3 C|}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Разстояние от точка до права. Да разгледаме правата g през точката $M_0(x_0, y_0, z_0)$ с направляващ вектор $\vec{\mathbf{a}}(a_1, a_2, a_3) \neq \vec{\mathbf{0}}$, която има канонично уравнение

$$g: \frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2} = \frac{z - z_0}{a_3}$$

и нека $M_1(x_1, y_1, z_1)$ е дадена точка от пространството. Под ***перпендикуляр***, спуснат от точката M_1 към правата g се разбира правата g', която минава през M_1 и пресича дадената права g под прав ъгъл в някаква точка $M_2(x_2, y_2, z_2)$ (рис. 6.13).

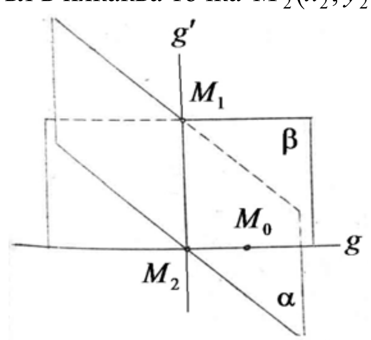

Рис. 6.13.

Нека α е равнината през точката M_1 и перпендикулярна на правата g. Тази равнина има нормален вектор $\vec{\mathbf{N}} = \vec{\mathbf{a}}$, следователно има уравнение

$$\alpha: a_1(x-x_1)+a_2(y-y_1)+a_3(z-z_1)=0 .$$

Нека β е равнина през точката M_1, която съдържа правата g. За тази равнина познаваме два успоредни вектора $\vec{\mathbf{a}}$ и $\vec{\mathbf{b}}=\overrightarrow{M_0M_1}(x_1-x_0, y_1-y_0, z_1-z_0)$, следователно за нейното уравнение имаме

$$\beta: \begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix}=0 .$$

Правата g', която минава през точката M_1 и е перпендикулярна на дадената права g се получава от пресичането на равнините α и β, $g'=\alpha\cap\beta$.

Дължината на отсечката $d=M_1M_2$ се нарича ***разстояние*** от точката M_1 до правата g. За да намерим това разстояние да разгледаме успоредника, построен върху векторите $\vec{\mathbf{a}}$ и $\overrightarrow{M_0M_1}$ (рис. 6.14).

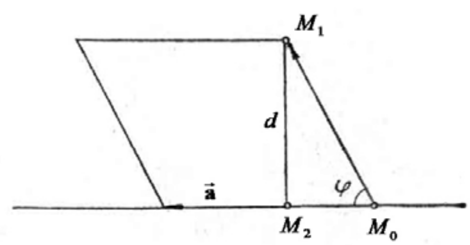

Рис. 6.14.

За неговото лице S имаме на разположение два израза

$$S=\left|\overrightarrow{M_0M_1}\times\vec{\mathbf{a}}\right|=|\vec{\mathbf{a}}|d ,$$

откъдето за търсеното разстояние намираме формулата

$$d=\frac{\left|\overrightarrow{M_0M_1}\times\vec{\mathbf{a}}\right|}{|\vec{\mathbf{a}}|}=\frac{\sqrt{\begin{vmatrix} y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ a_2 & a_3 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} z_1-z_0 & x_1-x_0 \\ a_3 & a_1 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} x_1-x_0 & y_1-y_0 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix}^2}}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}} .$$

Пример 6.19. да намерим разстоянието между правата

$$g: \frac{x-3}{2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z+2}{1}$$

и точката $M_1(-1,4,3)$. Имаме $\overrightarrow{M_0M_1}=(-4,3,5)$. Пресмятаме

$$\overrightarrow{M_0M_1}\times\vec{\mathbf{a}}=\begin{vmatrix} \vec{\mathbf{i}} & \vec{\mathbf{j}} & \vec{\mathbf{k}} \\ -4 & 3 & 5 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}=8\vec{\mathbf{i}}+14\vec{\mathbf{j}}-2\vec{\mathbf{k}} ,$$

откъдето намираме

$$d=\frac{\left|\overrightarrow{M_0M_1}\times\vec{\mathbf{a}}\right|}{|\vec{\mathbf{a}}|}=\frac{\sqrt{8^2+14^2+(-2)^2}}{\sqrt{2^2+(-1)^2+1^2}}=2\sqrt{11} .$$

Взаимно разположение на две прави в пространството. Да разгледаме правите g_1 и g_2, дадени чрез своите канонични уравнения

$$g_1 : \frac{x-x_1}{a_1} = \frac{y-y_1}{a_2} = \frac{z-z_1}{a_3},\ M_1(x_1, y_1, z_1) \in g_1,\ \vec{\mathbf{a}}(a_1, a_2, a_3) \parallel g_1,$$

$$g_2 : \frac{x-x_2}{b_1} = \frac{y-y_2}{b_2} = \frac{z-z_2}{b_3},\ M_2(x_2, y_2, z_2) \in g_2,\ \vec{\mathbf{b}}(b_1, b_2, b_3) \parallel g_2 .$$

Да разгледаме вектора $\overrightarrow{M_1M_2}(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$ (рис. 6.15)

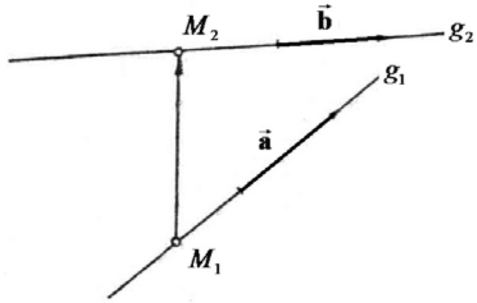

Рис. 6.16.

и да образуваме смесеното произведение

$$\Delta = \left(\overrightarrow{M_1M_2}, \vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}}\right) = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}.$$

Очевидно правите g_1 и g_2 лежат в една равнина тогава и само тогава, когато $\Delta = 0$. Освен това g_1 и g_2 са успоредни тогава и само тогава, когато $\vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}} = \vec{\mathbf{0}}$.

Различаваме следните основни взаимни разположения на правите g_1 и g_2.

1) Правите g_1 и g_2 са ***кръстосани***, което означава, че те ***не лежат в една равнина***. Това е случаят, когато векторите $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\vec{\mathbf{a}}$ и $\vec{\mathbf{b}}$ не лежат в една равнина, т.е. когато тяхното смесено произведение е различно от нула, $\Delta \neq 0$.

2) Правите g_1 и g_2 лежат в една равнина α, където се пресичат в една точка. Това съответства на случая, когато $\Delta = 0$ (лежат в една равнина) и $\vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}} \neq \vec{\mathbf{0}}$ (правите не са успоредни).

3) Правите g_1 и g_2 лежат в една равнина α, където са успоредни и не се сливат. Това съответства на случая, когато $\vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}} = \vec{\mathbf{0}}$ (правите g_1 и g_2 са успоредни, при което по необходимост имаме $\Delta = 0$, понеже в този случай детерминантата съдържа два пропорционални реда) и точката M_1 не принадлежи на правата g_2, както и точката M_2 не принадлежи на правата g_1 (правите не се сливат).

4) Правите g_1 и g_2 се сливат. Това съответства на случая, когато $\vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}} = \vec{\mathbf{0}}$, при което точката M_1 принадлежи на правата g_2, както и точката M_2 принадлежи на правата g_1.

От изброените случаи най-голям интерес представлява случаят, когато правите g_1 и g_2 са кръстосани, понеже се явява типичен за взаимното разположение на две прави в пространството.

Пример 6.20. Да определим взаимното разположение на двете прави

$$g_1 : \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-1}{3} \text{ и } g_1 : \frac{x-3}{-1} = \frac{y-2}{5} = \frac{z+2}{1}.$$

Тук имаме $M_1(1,-1,1) \in g_1$, $\vec{\mathbf{a}}(2,1,3) \parallel g_1$ и $M_2(3,2,-2) \in g_2$, $\vec{\mathbf{b}}(-1,5,1) \parallel g_2$. Пресмятаме

$$\Delta = \left(\overrightarrow{M_1M_2}, \vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}}\right) = \begin{vmatrix} 3-1 & 2+1 & -2-1 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 5 & 1 \end{vmatrix} = -76 \neq 0,$$

следователно двете прави са кръстосани.

Ос на две кръстосани прави. За всеки две кръстосани прави g_1 и g_2 съществува единствена трета права g, която ги пресича под прав ъгъл.

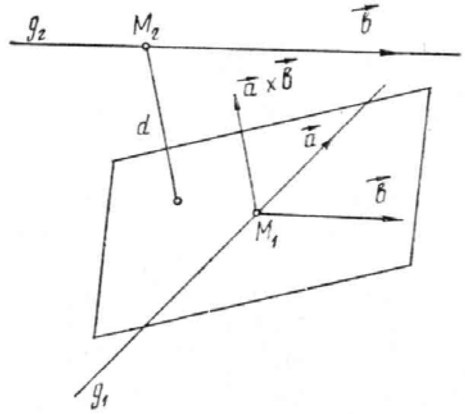

Рис. 6.16.

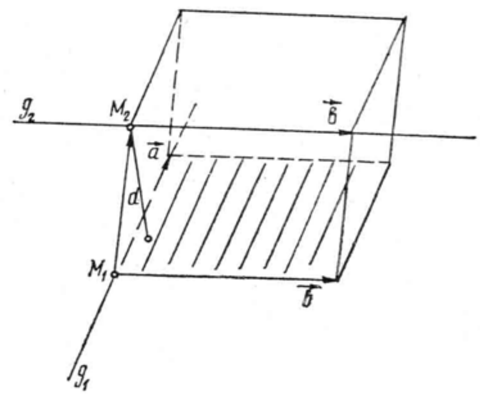

Рис. 6.17.

За направляващ вектор на оста g можем да изберем вектора $\vec{\mathbf{c}}(c_1, c_2, c_3) = \vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}}$,

$$\vec{\mathbf{c}} = \begin{vmatrix} \vec{\mathbf{i}} & \vec{\mathbf{j}} & \vec{\mathbf{k}} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}.$$

По условие $\vec{\mathbf{c}} \neq \vec{\mathbf{0}}$ иначе правите биха били успоредни. Нека α_1 е равнина, която съдържа правата g_1 и е успоредна на вектора $\vec{\mathbf{c}}$ и нека α_2 е равнина, която съдържа правата g_2 и също е успоредна на вектора $\vec{\mathbf{c}}$. Тогава тези равнини имат уравнения

$$\alpha_1 : \begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0 \text{ и } \alpha_2 : \begin{vmatrix} x-x_2 & y-y_2 & z-z_2 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

и нормални вектори $\vec{\mathbf{N}}_1 = \vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{c}}$ и $\vec{\mathbf{N}}_2 = \vec{\mathbf{b}} \times \vec{\mathbf{c}}$.

Да допуснем, че векторите $\vec{\mathbf{N}}_1$ и $\vec{\mathbf{N}}_2$ са успоредни. Тогава съществува тяхна нулева линейна комбинация $\lambda\vec{\mathbf{N}}_1 + \mu\vec{\mathbf{N}}_2 = \vec{\mathbf{0}}$, при което поне един от коефициентите λ или μ не е равен на нула. Имаме

$$\vec{\mathbf{0}} = \lambda\vec{\mathbf{N}}_1 + \mu\vec{\mathbf{N}}_2 = \lambda\vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{c}} + \mu\vec{\mathbf{b}} \times \vec{\mathbf{c}} = \left(\lambda\vec{\mathbf{a}} + \mu\vec{\mathbf{b}}\right) \times \vec{\mathbf{c}},$$

следователно векторът $\vec{\mathbf{c}} \neq \vec{\mathbf{0}}$ е успореден с вектора $\lambda\vec{\mathbf{a}} + \mu\vec{\mathbf{b}}$, с който от друга страна са взаимно перпендикулярни, понеже

$$\left(\lambda\vec{\mathbf{a}} + \mu\vec{\mathbf{b}}\right)\vec{\mathbf{c}} = \lambda\vec{\mathbf{a}}\vec{\mathbf{c}} + \mu\vec{\mathbf{b}}\vec{\mathbf{c}} = 0 + 0 = 0.$$

Получихме, че векторът $\lambda\vec{\mathbf{a}} + \mu\vec{\mathbf{b}}$ е едновременно колинеарен и ортогонален с даден ненулев вектор, което е възможно, единствено когато $\lambda\vec{\mathbf{a}} + \mu\vec{\mathbf{b}} = \vec{\mathbf{0}}$, което пък означава, е $\lambda = \mu = 0$, понеже $\vec{\mathbf{a}}$ и $\vec{\mathbf{b}}$ не са успоредни по условие.

По този начин установихме, че равнините α_1 и α_2 не са успоредни и следователно се пресичат в една права, която права очевидно се явява оста g на двете кръстосани прави g_1 и g_2.

Пример 6.21. Да намерим оста g на двете кръстосани прави

$$g_1: \frac{x-2}{8} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-7}{1} \text{ и } g_2: \frac{x}{2} = \frac{y}{-2} = \frac{z}{1}.$$

За правата g_1 имаме направляващ вектор $\vec{\mathbf{a}}(8,4,1)$, а за правата g_2 имаме направляващ вектор $\vec{\mathbf{b}}(2,-2,1)$. За вектора $\vec{\mathbf{c}} = \vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}}$ пресмятаме

$$\vec{\mathbf{c}} = \begin{vmatrix} \vec{\mathbf{i}} & \vec{\mathbf{j}} & \vec{\mathbf{k}} \\ 8 & 4 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \vec{\mathbf{i}} - \vec{\mathbf{j}} - 4\vec{\mathbf{k}}.$$

Равнините α_1 и α_2 имат уравнения

$$\alpha_1: \begin{vmatrix} x-2 & y-2 & z-7 \\ 8 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & -4 \end{vmatrix} = 0 \text{ и } \alpha_2: \begin{vmatrix} x & y & z \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & -4 \end{vmatrix} = 0,$$

откъдето намираме общите уравнения

$$\alpha_1: 5x - 11y + 4z + 48 = 0 \text{ и } \alpha_2: x + y = 0.$$

Понеже за оста g вече разполагаме с направляващ вектор $\vec{\mathbf{c}}(1,-1,-4)$, за да получим уравнението на тази ос остава да намерим една (коя да е) точка от g. За тази цел търсим някакво частно решение на системата

$$\begin{aligned} 5x - 11y + 4z + 48 &= 0 \\ x + y &= 0 \end{aligned}.$$

Полагайки $z = 0$ намираме $x = -3$ и $y = 3$, следователно точката $M_0(-3,3,0)$ лежи върху оста g, за която вече ос получаваме каноничното уравнение

$$g: \frac{x+3}{1} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z}{-4}.$$

Разстояние между две кръстосани прави. Ако правите g_1 и g_2 са кръстосани, то под разстояние $d = d(g_1, g_2)$ между тези оправи се разбира дължината на отсечката между пресечните точки на оста с двете прави. Нека β е равнина през правата g_1, която е успоредна на направляващия вектор $\vec{\mathbf{b}}$ на другата права g_2. Тогава правата g_2 е успоредна на равнината β и следователно разстоянието между коя да е точка от g_2 и равнината β е едно и също, равно на търсеното разстояние d (рис. 6.6). Да разгледаме паралелепипеда, построен върху векторите $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\vec{\mathbf{a}}$ и $\vec{\mathbf{b}}$, за който d се явява височина (рис. 6.7). За обема V на този успоредник разполагаме с два израза, единият чрез абсолютната стойност на смесеното произведение $\left(\overrightarrow{M_1M_2}, \vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}}\right)$, а другият по известната формула за обем на паралелепипед – лице на основа по височина,

$$V = \left|\left(\overrightarrow{M_1M_2}, \vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}}\right)\right| = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}| d,$$

откъдето за търсеното разстояние между кръстосаните прави g_1 и g_2 намираме формулата

$$d=\frac{\left|\left(\overrightarrow{M_1M_2},\vec{\mathbf{a}},\vec{\mathbf{b}}\right)\right|}{\left|\vec{\mathbf{a}}\times\vec{\mathbf{b}}\right|}=\frac{\left|\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}\right|}{\sqrt{\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}^2}}.$$

Това разстояние представлява най-малката дължина на отсечка, единият край на която лежи върху правата g_1, а другият край лежи върху правата g_2.