КУРСОВА РАБОТА ПО ВИСША МАТЕМАТИКА
ЧАСТ ПЪРВА

Решенията се подготвят задължително в ръкописен вид и се поднасят за проверка при заверка на семестъра и по време на изпита. След представяне на курсовата работа се провежда събеседване върху решенията на задачите.

Курсовата работа се приема за успешна, когато обучаемият умее да обяснява основните идеи на представените решения.

ЛИНЕЙНА АЛГЕБРА И АНАЛИТИЧНА ГЕОМЕТРИЯ

Задача 1.

а) Пресметнете $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{20}$.

б) Решете уравнението $z^6 = 1 + i\sqrt{3}$.

в) Намерете частното и остатъка от делението на полинома

$$f(x) = x^7 - 3x^5 + x^4 - 2x^3 + 3x - 2$$

с полинома $g(x) = x^2 + x + 1$.

г) Разложете на множители полинома $f(x) = x^6 + 2x^3 + 1$.

Задача 2.

а) Пресметнете детерминантата

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 8 & 7 & -2 \\ 2 & -1 & 8 \end{vmatrix}.$$

б) Пресметнете детерминантата

$$\begin{vmatrix} 8 & 7 & 2 & 10 \\ -8 & 2 & 7 & 10 \\ 4 & 4 & 4 & 5 \\ 0 & 4 & -3 & 2 \end{vmatrix}.$$

в) Пресметнете детерминантата

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 6 \end{vmatrix}.$$

г) Решете уравнението

$$\begin{vmatrix} 3 & x & -x \\ 2 & -1 & 3 \\ x+10 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Задача 3.

а) Намерете матрицата $f(A)$, където

$$f(x)=3x^2-2x+1,\; A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\ 2 & -4 & 1\\ 3 & -5 & 2\end{pmatrix}.$$

б) Намерете обратната матрица A^{-1}, където

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 3 & 0 & 2\\ 4 & -2 & 5\end{pmatrix}.$$

в) Намерете обратната матрица A^{-1}, където

$$A=\begin{pmatrix}3 & 3 & -4 & -3\\ 0 & 6 & 1 & 1\\ 5 & 4 & 2 & 1\\ 2 & 3 & 3 & 2\end{pmatrix}.$$

г) Решете системата посредством формулите на Крамер

$$\begin{aligned} x_1+x_2+x_3+x_4&=2\\ x_1+x_2-x_3-x_4&=-1\\ x_1-x_2&=3\\ x_3-x_4&=1\end{aligned}$$

д) Решете матричното уравнение

$$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}3 & 5\\ 5 & 9\end{pmatrix}.$$

е) Решете матричното уравнение

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\ 3 & 2 & -4\\ 2 & -1 & 0\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}1 & -3 & 0\\ 10 & 2 & 7\\ 10 & 7 & 8\end{pmatrix}.$$

ж) Решете матричното уравнение

$$X\begin{pmatrix}5 & 3 & 1\\ 1 & -3 & -2\\ -5 & 2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5 & 9 & 0\\ -8 & 3 & 1\end{pmatrix}.$$

з) Намерете всички матрици X, за които $AX=XA$, където

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}.$$

Задача 4.

а) Намерете ранга на матрицата

$$A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 3 & -2 & 4\\ 2 & -2 & 5 & 1 & 7\\ 4 & -3 & 8 & -1 & 11\end{pmatrix}.$$

б) Намерете стойностите на параметъра λ, за които матрицата

$$A=\begin{pmatrix}1 & \lambda & -1 & 2\\ 2 & -1 & \lambda & 5\\ 1 & 10 & -6 & \lambda\end{pmatrix}$$

има максимален ранг.

в) Намерете общото решение на системата

$$2x_1+7x_2+3x_3+x_4=6$$
$$2x_1+5x_2+2x_3+2x_4=4$$
$$9x_1+4x_2+x_3+7x_4=2$$

г) Намерете общото решение на системата

$$x_1+x_2+3x_3-2x_4+3x_5=1$$
$$2x_1+2x_2+4x_3-x_4+3x_5=2$$
$$3x_1+3x_2+5x_3-2x_4+3x_5=1$$

д) Намерете фундаментална система от решения и общото решение на системата

$$3x_1+x_2-8x_3+2x_4+x_5=0$$
$$2x_1-2x_2-3x_3-7x_4+2x_5=0$$

Задача 5. Намерете собствените числа и съответни собствени вектори за матрицата

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\ 3 & 2 & -4\\ 2 & -1 & 0\end{pmatrix}.$$

Задача 6. Нека $\vec{\mathbf{a}}=2\vec{\mathbf{i}}+3\vec{\mathbf{j}}-\vec{\mathbf{k}}$, $\vec{\mathbf{b}}=\vec{\mathbf{i}}-2\vec{\mathbf{j}}+3\vec{\mathbf{k}}$ и $\vec{\mathbf{c}}=3\vec{\mathbf{i}}+\vec{\mathbf{j}}-2\vec{\mathbf{k}}$.

а) Намерете скаларното произведение $\vec{\mathbf{a}}\vec{\mathbf{b}}$.

б) Намерете векторното произведение $\vec{\mathbf{b}}\times\vec{\mathbf{c}}$.

в) Намерете смесеното произведение $\left(\vec{\mathbf{a}},\vec{\mathbf{b}},\vec{\mathbf{c}}\right)$.

г) Намерете лицето на триъгълника с върхове $M_1(1,1,1)$, $M_2(-1,2,0)$ и $M_3(2,4,1)$.

д) Намерете обема на тетраедър с върхове $M_1(1,-1,2)$, $M_2(0,-1,0)$, $M_3(2,-2,1)$ и $M_4(1,1,-3)$.

Задача 7. Напишете общото, каноничното и параметричното уравнение на следните равнинни прави.

а) Права g през точката $M_0(-1,2)\in g$ и нормален вектор $\vec{\mathbf{N}}(2,2)\perp g$.

б) Права g през точката $M_0(1,1)\in g$ и направляващ вектор $\vec{\mathbf{a}}(0,-1)\parallel g$.

в) Права g през точките $M_1(2,-1)\in g$ и $M_2(1,3)\in g$.

г) Права g, намираща се на разстояние $\sqrt{10}$ от точката $M_0(5,4)$ и перпендикулярна на правата $2x+6y-3=0$.

Задача 8. Намерете общото и параметричното уравнение на следните равнинни.

а) Равнина α през точката $M_0(1,2,-1)\in\alpha$ с нормален вектор $\vec{\mathbf{N}}(2,0,-1)\perp\alpha$.

б) Равнина α през точката $M_0(1,1,1)$, успоредна на векторите $\vec{\mathbf{a}}(0,1,2)\parallel\alpha$ и $\vec{\mathbf{b}}(-1,0,1)\parallel\alpha$.

в) Равнина α през трите точки $M_1(1,2,0)\in\alpha$, $M_2(2,1,1)\in\alpha$ и $M_3(3,0,1)\in\alpha$.

г) Равнина α през точката $M_0(1,2,1)$, отсичаща правилен тетраедър от първи октант.

Задача 9. Напишете каноничното и параметричното уравнение на следните пространствени прави.

а) Права g, получена от сечението на равнините

$$\alpha: 2x-y+2z-3=0 \text{ и } \beta: x+2y-z-1=0.$$

б) Права g през точката $M_0(2,0,-3)\in g$ с направляващ вектор $\vec{\mathbf{a}}(2,-3,5)\parallel g$.

в) Права g през двете точки $M_1(1,-2,1)\in g$ и $M_2(3,1,-1)\in g$.

г) Права g през точката $M_0(1,1,1)$, която се намира на разстояние 1 от началото $O(0,0,0)$.

Задача 10. Напишете уравнението на оста на правите

$$g_1 : \frac{x-6}{3} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z+3}{4} \text{ и } g_2 : \frac{x+1}{3} = \frac{y+7}{-3} = \frac{z-4}{8}$$

и намерете разстоянието между g_1 и g_2.

МАТЕМАТИЧЕСКИ АНАЛИЗ

Задача 11. Намерете производните на следните функции.

а) $y = \dfrac{2x}{x^2 - 1}$

б) $y = \dfrac{1 + x - x^2}{1 - x + x^2}$

в) $y = \sqrt[3]{\dfrac{1 - x^3}{1 + x^3}}$

г) $y = \sqrt{x+1} - \ln\left(x - \sqrt{x^2 - \sin x}\right)$

д) $y = x \arcsin \sqrt{\dfrac{x}{x+1}} + \operatorname{arctg}\sqrt{x} - \sqrt{x}$

е) $y = \dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1 - x^2}} + \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1-x}{1+x}$

Задача 12. Изследвайте функциите (дефиниционна област, интервали на монотонност, екстремуми, асимптоти) и начертайте графиките.

а) $y = \dfrac{x}{x^2 + 1}$

б) $y = \dfrac{x^2}{x - 1}$

в) $y = \dfrac{x^3}{x^2 - 1}$

Задача 13. Намерете границите

а) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x - x}{x^3}$

б) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos x - 1}{x^2}$

в) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1 - x}{x^2}$

Задача 14. Намерете следните неопределени интеграли

а) $\int \left(2 - 3x + \cos 2x - x^4\right) dx$

б) $\int \dfrac{x}{x+3}\, dx$

в) $\int x e^{x^2}\, dx$

г) $\int \dfrac{\arccos x}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx$

д) $\int \sqrt[3]{2x-7}dx$

е) $\int \frac{dx}{\sqrt{x-5}}$

ж) $\int x \ln x dx$

з) $\int x^2\left(e^x - \cos x\right)dx$

и) $\int \frac{dx}{\left(1+x^2\right)^2}$

й) $\int e^x \cos x dx$

к) $\int \frac{x+1}{x^2+x+1}dx$

л) $\int \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}}$

м) $\int \frac{2x+3}{(x-2)(x+3)}dx$

н) $\int \frac{x^2+1}{(x+1)^2(x-1)}dx$

о) $\int \frac{dx}{2+\sqrt{x}}$

п) $\int \frac{1-\sqrt{x+1}}{1+\sqrt{x+1}}dx$

р) $\int \sqrt{x^2+1}dx$

с) $\int \frac{dx}{\cos^3 x}$

т) $\int \frac{dx}{2\sin x - \cos x + 5}$

у) $\int \frac{\sin x \cos x}{1+\sin^4 x}dx$

Задача 15. Решете следните определение интеграли

а) $\int_0^{\pi} x \sin x dx$

б) $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{3+2\cos x}$

в) $\int_4^9 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$

Задача 16.

а) Намерете лицето на фигурата, ограничена от параболата $y = x^2 + 2x$ и правата $y = x + 2$.

б) Намерете лицето на фигурата, ограничена от кривата $r = a\sin 2\varphi$, $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$, $a > 0$.

в) Намерете дължината на кривата $x = e^t \cos t$, $y = e^t \sin t$, $0 \le t \le \pi$.

г) Намерете обема на ротационното тяло, образувано от въртенето около оста Ox на фигурата, ограничена от линиите $2y = x^2$ и $2x + 2y - 3 = 0$.

Задача 17. Определете дефиниционното множество на следните функции:

а) $u = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$

б) $u = \ln(x - y)$

в) $u = \arccos \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

Задача 18. Намерете частните производни от първи и втори ред на функциите:

а) $u = x^4 + y^4 - 2x^2 y^2$

б) $u = \operatorname{tg} \dfrac{x^2}{y}$

Задача 19. Намерете допирателната равнина и нормалния вектор към повърхнината:

а) $z = x^2 + y^2$ в точката $M_0(1,2,5)$.

б) $x^2 + y^2 + z^2 = 169$ в точката $M_0(3,4,12)$.

Задача 20. Разложете в ред на Тейлър функцията $f(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ в околност на точката $M_0(1,1,1)$.

Задача 21. Намерете локалните екстремуми на следните функции:

а) $z = x^2 - xy + y^2 - 2x + y + 3$

б) $z = xy \ln \sqrt{x^2 + y^2}$

в) $u = x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 6z + 2$

Задача 22. Намерете точките на условен екстремум за функциите:

а) $z = xy$ при условие $x + y = 1$

б) $u = x^2 + y^2 + z^2$ при условие $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$, $a > b > c > 0$.

Задача 23. Пресметнете:

а) Интеграла

$$\iint_A xy\,dxdy$$

в областта A, получена от пресичането на линиите $y = x$ и $y = x^2$.

б) Интеграла

$$\iint_A y\,dxdy$$

където A е областта, определена от условията $x^2 + y^2 + z^2 \le 1$, $x \ge 0$, $y \ge 0$, $z \ge 0$.

в) Интеграла

$$\iint_A \sqrt{x^2 + y^2}\,dxdy$$

в областта $A: x^2 + y^2 \le 9$.

г) Интеграла

$$\iint_A \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}\,dxdy$$

в областта $A: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \le 1$, $a, b > 0$.

д) Интеграла

$$\iiint_A xyzdxdydz,$$

където A е областта, оградена от повърхнините $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

Задача 24. Решете следните диференциални уравнения и системи.

а) $y' - \frac{y}{x} = x$

б) $y' = y \operatorname{tg} x + \frac{1}{\cos x}$

в) $y'' - y = 2x \sin x$

г) $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x}$

д) $y''' + y'' + y' + y = xe^x$

е) $\begin{vmatrix} x' - x - y = e^t \\ y' + x - y = 0 \end{vmatrix}$, $x(0) = 0$, $y(0) = 1$

ТЕОРИЯ НА ВЕРОЯТНОСТИТЕ

Задача 25. Монета се хвърля пет пъти. Намерете вероятността да се падне:

а) пет пъти герб

б) два пъти герб

в) поне един път герб

Задача 26. Урна съдържа 8 бели и 12 черни сфери. Изваждат се последователно две сфери. Намерете вероятността:

а) и двете сфери да бъдат бели

б) двете сфери да бъдат с различен цвят

Задача 27. Двама стрелци поразяват цел с вероятности съответно 0.7 и 0.8. Двамата независимо един от друг произвеждат по един изстрел. Намерете вероятността целта да бъде поразена поне с един изстрел.

Задача 28. Дадени са три урни, при което първата съдържа 5 бели и 3 черни сфери, втората съдържа 2 бели и 5 черни сфери, а третата съдържа 7 бели и 2 черни сфери. От случайно избрана урна по случаен начин е избрана една сфера.

а) Да се намери вероятността избраната сфера да бъде бяла.

б) Ако е известно, че избраната сфера се е оказала бяла, да се определи вероятността тя да е била избрана от втората урна.

Задача 29. Случайната величина X има нормално разпределение със средно $\mu = 5$ и дисперсия $\sigma^2 = 100$. Намерете вероятността стойностите на величината X да бъдат в интервала $(20, 50)$.

Задача 30. Случайните величини X и Y имат следната таблица на съвместно разпределение

X \ Y	20	40	60
10	0.15	0.05	0
20	0.1	0.2	0.1

30	0.05	0.1	0.25

Намерете:

а) Математическите очаквания и дисперсиите на X и Y

б) Коефициента на линейна корелация между X и Y

Задача 31. Проведена е серия от 100 подхвърляния на правилна монета. Намерете вероятността:

а) Броят на показанията "герб" да бъде между 40 и 60

б) Броят на попаденията "герб" да бъде поне 30.