

Лекция 12

§12. Теорема за резидуумите

1. Теорема за резидуумите. Теоремата за резидуумите представлява едно от най-важните приложения на развитата до тук теория.

Нека точката z_0 е изолирана особена точка за функцията $f(z)$, която е аналитична в някаква пробита околност на z_0 , $0 < |z - z_0| < R$. Тогава, както вече знаем, $f(z)$ се развива в ред на Лоран

$$(12.1) \quad f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n = \dots + \frac{c_{-2}}{(z - z_0)^2} + \frac{c_{-1}}{z - z_0} + c_0 + c_1(z - z_0) + c_2(z - z_0)^2 + \dots$$

Коефициентът c_{-1} се нарича **резидуум** на функцията $f(z)$ в точката z_0 и се бележи с $\operatorname{res}_{z=z_0} f(z)$.

Понеже редът (12.1) е равномерно (и абсолютно) сходящ над всяко компактно подмножество на пробитата околност $0 < |z - z_0| < R$, можем да интегрираме (12.1) почленно върху коя да е положително ориентирана окръжност Γ_ε с център z_0 и достатъчно малък радиус $\varepsilon > 0$, след което въз основа на твърдение 19.4 получаваме

$$c_{-1} = \operatorname{res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\varepsilon} f(z) dz.$$

Твърдение 12.1. Нека точката z_0 е полюс от ред не по-висок от m за функцията $f(z)$. Тогава е в сила формулата

$$(12.2) \quad \operatorname{res}_{z=z_0} f(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} \left[\frac{1}{(m-1)!} \left[(z - z_0)^{m-1} f(z) \right]^{(m-1)} \right].$$

Доказателство. Понеже z_0 е полюс от ред не по-висок от m , то лорановото развитие на $f(z)$ в околност на точката z_0 има вида

$$f(z) = \frac{c_{-m}}{(z - z_0)^m} + \dots + \frac{c_{-1}}{z - z_0} + c_0 + c_1(z - z_0) + \dots,$$

следователно

$$(z - z_0)^m f(z) = c_{-m} + c_{-m+1}(z - z_0) + \dots + c_{-1}(z - z_0)^{m-1} + c_0(z - z_0)^m + c_1(z - z_0)^{m+1} + \dots,$$

откъдето се вижда, че

$$\left[(z - z_0)^m f(z) \right]^{(m-1)} = c_{-1}(m-1)! + \dots.$$

Тук с многоточие са означени събираеми, всяко от които има като множител някаква положителна степен на $(z - z_0)$. Краят на доказателството е очевиден. ■

Формулата (12.2) работи най-икономично, когато е известен точния ред на полюса. В противен случай ще извършим допълнителни излишни пресмятания. Съгласно твърдение 20.2, ако $f(z)$ е аналитична в някаква пробита околност на точката z_0 и $f(z)$ може да се запише във вида

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)},$$

където функциите $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ са аналитични в околност на z_0 , а точката z_0 е нула от ред $m \geq 1$ за функцията $\psi(z)$, то точката z_0 се явява полюс от ред не по-висок от m , следователно в този случай са налице условията за прилагане на твърдение 12.1.

От особен интерес е случаят, когато полюсът z_0 е от кратност едно – **прост полюс**. Да предположим в този случай, че функцията $f(z)$ може да се запише във вида

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$$

където $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ са аналитични в околност на z_0 , при което $\psi(z_0) = 0$ и $\psi'(z_0) \neq 0$.

Тогава съгласно (12.2) за резидуума в точката z_0 имаме

$$(12.3) \operatorname{res}_{z=z_0} \frac{\varphi(z)}{\psi(z)} = \lim_{z \rightarrow z_0} \left[(z - z_0) \frac{\varphi(z)}{\psi(z)} \right] = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\varphi(z)}{\frac{\psi(z) - \psi(z_0)}{z - z_0}} = \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}.$$

Да намерим например резидуума на функцията

$$f(z) = \frac{e^z}{(z-1)^2}$$

в точката $z_0 = 1$. Съгласно теорема 20.6, точката $z_0 = 1$ е полюс от ред 2, понеже числителят e^z е аналитичен в тази точка. От формула (12.2) имаме ($m = 1$)

$$\operatorname{res}_{z=1} f(z) = \lim_{z \rightarrow 1} \left[(z-1)^2 f(z) \right]' = \lim_{z \rightarrow 1} \left[e^z \right]' = \lim_{z \rightarrow 1} \left[-\frac{1}{z^2} e^z \right] = -e.$$

Да намерим резидуума на функцията

$$f(z) = \frac{\sin^2 z}{\cos z}$$

в точката $z_0 = \frac{\pi}{2}$. Тук z_0 се явява прост корен за знаменателя $\cos z$, следователно z_0 представлява прост полюс за $f(z)$ и съгласно формула (12.3) намираме

$$\operatorname{res}_{z=\frac{\pi}{2}} f(z) = \operatorname{res}_{z=\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 z}{\cos z} = \frac{\sin^2 \frac{\pi}{2}}{-\sin \frac{\pi}{2}} = -1,$$

понеже $(\cos z)' = -\sin z$.

Да намерим резидуумите на функцията

$$f(z) = \frac{1}{(z-2)^2(z-3)}.$$

Тук особените точки са $z_1 = 2$ и $z_2 = 3$, при което z_1 се явява полюс от ред 2, а z_2 е прост полюс. Съгласно формулата (12.2) намираме

$$\operatorname{res}_{z=2} \frac{1}{(z-2)^2(z-3)} = \lim_{z \rightarrow 2} \left[(z-2)^2 \frac{1}{(z-2)^2(z-3)} \right]' = \lim_{z \rightarrow 2} \left[\frac{1}{z-3} \right]' = \lim_{z \rightarrow 2} \left[\frac{-1}{(z-3)^2} \right] = -1,$$

а съгласно формула (12.3),

$$\operatorname{res}_{z=3} \frac{1}{(z-2)^2(z-3)} = \operatorname{res}_{z=3} \frac{1}{(z-3)(z-2)^2} = \frac{1}{(3-2)^2} = 1.$$

Теоремата за резидуумите има различни редакции и трябва да се схваща като естествено обобщение на основната теорема на Коши, когато функцията има краен

брой изолирани особени точки. Нека D е едносвързана област с граница (външен контур) частично гладката положително ориентирана жорданова крива Γ_0 , а функцията $f(z)$ е аналитична в затворената област \bar{D} с изключение евентуално на краен брой изолирани особени точки z_1, z_2, \dots, z_n вътре в областта D . Нека $\gamma_k, 1 \leq k \leq n$, са положително ориентираните окръжности с центрове съответно в точките z_k и достатъчно малък радиус $\varepsilon > 0$ така, че кръговете $|z - z_k| \leq \varepsilon$ да не се пресичат и да принадлежат изцяло в областта D , както е показано на рис. 12.1.

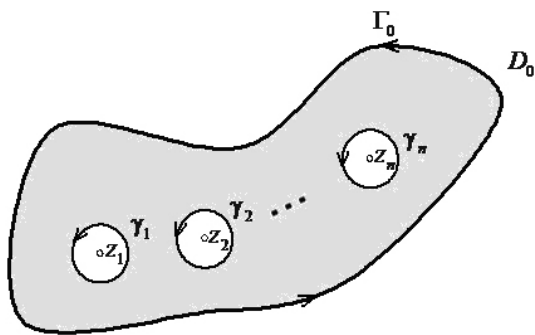


Рис. 12.1.

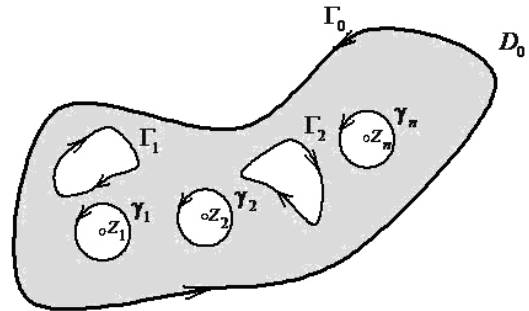


Рис. 12.2.

По този начин можем да разгледаме областта D_0 , която се получава от D след отстраняване на кръговете $|z - z_k| \leq \varepsilon$. По условие функцията $f(z)$ е аналитична в затворената област \bar{D}_0 , следователно можем да приложим твърдение 19.5, според което

$$(12.4) \quad \int_{\Gamma_0} f(z) dz = \int_{\gamma_1} f(z) dz + \int_{\gamma_2} f(z) dz + \dots + \int_{\gamma_n} f(z) dz.$$

От друга страна по определение

$$\int_{\gamma_k} f(z) dz = 2\pi i \operatorname{res}_{z=z_k} f(z), \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

откъдето след заместване в (12.4) намираме формулата

$$(12.5) \quad \int_{\Gamma_0} f(z) dz = 2\pi i \left[\operatorname{res}_{z=z_1} f(z) + \operatorname{res}_{z=z_2} f(z) + \dots + \operatorname{res}_{z=z_n} f(z) \right].$$

Формулата (12.5) може да се получи при по-общи предположения за вида на областта. Да усложним разгледаната току що ситуация, предполагайки наличието на вътрешни контури за областта D , която вече не се явява едносвързана.

Нека за определеност D има два вътрешни контури Γ_1 и Γ_2 при което Γ_1 и Γ_2 представляват частично гладки отрицателно ориентирани жорданови криви (рис. 12.2) (по този начин границата на D се явява положително ориентирана). Тук броят на вътрешните контури разбира се няма принципно значение за формулата, която ще докажем. Радиусите на $\gamma_k, 1 \leq k \leq n$, винаги могат да се изберат достатъчно малки, че кръговете $|z - z_k| \leq \varepsilon$ да не се пресичат и да принадлежат изцяло в областта D . Сега отново от твърдение 19.5 получаваме

$$\int_{\Gamma_0} f(z) dz = \int_{\gamma_1} f(z) dz + \int_{\gamma_2} f(z) dz + \dots + \int_{\gamma_n} f(z) dz - \int_{\Gamma_1} f(z) dz - \int_{\Gamma_2} f(z) dz,$$

което по аналогичен начин свеждаме до

$$\int_{\Gamma_0} f(z) dz + \int_{\Gamma_1} f(z) dz + \int_{\Gamma_2} f(z) dz = 2\pi i \left[\operatorname{res}_{z=z_1} f(z) + \operatorname{res}_{z=z_2} f(z) + \dots + \operatorname{res}_{z=z_n} f(z) \right],$$

което се записва накратко

$$(12.6) \int_{\Gamma} f(z) dz = 2\pi i \left[\operatorname{res}_{z=z_1} f(z) + \operatorname{res}_{z=z_2} f(z) + \dots + \operatorname{res}_{z=z_n} f(z) \right],$$

където $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ е положително ориентираният сложен контур на областта D .

По този начин въз основа на формулите (12.5-6) докажем

Теорема 12.1 (теорема за резидуумите). Нека за областта D е налице едно от двете условия.

- 1) Областта D е едносвързана с контур частично гладката жорданова крива Γ_0 .
- 2) Областта D има външен контур Γ_0 и вътрешни контури $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_m$, при което всичките контури се предполагат частично гладки жорданови криви, Γ_0 е ориентирана положително, а $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_m$ са ориентирани отрицателно.

Нека освен това функцията $f(z)$ е аналитична в затворената област \bar{D} с изключение евентуално на краен брой изолирани особени точки z_1, z_2, \dots, z_n вътре в областта D . Тогава е в сила формулата (**формула за резидуумите**)

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{res}_{z=z_k} f(z),$$

където в първия случай $\Gamma = \Gamma_0$, а във втория случай $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1 \cup \dots \cup \Gamma_m$. ■

Например да пресметнем интеграла

$$I = \int_C \frac{\operatorname{cotg} z}{4z - \pi} dz,$$

където C е окръжността $|z|=1$ (ориентирана положително) (рис. 12.3).

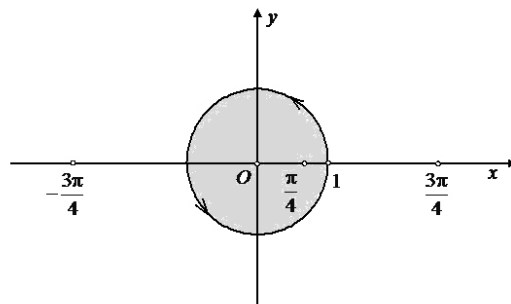


Рис. 12.3.

За този интеграл имаме

$$f(z) = \frac{\operatorname{cotg} z}{4z - \pi}.$$

Особените точки на $f(z)$ са $z_0 = \frac{\pi}{4}$, а също така и всичките точки $\pm \frac{\pi}{2}, \pm \frac{3\pi}{2}, \dots$, където се анулира $\sin z$. От тях само $z_1 = 0$ попада вътре в областта. Сега от формулата за резидуумите имаме

$$I = 2\pi i \left[\operatorname{res}_{z=\frac{\pi}{4}} f(z) + \operatorname{res}_{z=0} f(z) \right] = 2\pi i \left[\operatorname{res}_{z=\frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{cotg} z}{4z - \pi} + \operatorname{res}_{z=0} \frac{\operatorname{cotg} z}{4z - \pi} \right].$$

И двете точки представляват прости полюси, следователно

$$\operatorname{res}_{z=\frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{cotg} z}{4z - \pi} = \frac{\operatorname{cotg} \frac{\pi}{4}}{4} = \frac{1}{4}, \quad \operatorname{res}_{z=0} \frac{\operatorname{cotg} z}{4z - \pi} = \operatorname{res}_{z=0} \frac{\frac{\cos z}{\sin z}}{4z - \pi} = \frac{\left[\frac{\cos 0}{4 \cdot 0 - \pi} \right]}{\cos 0} = -\frac{1}{\pi},$$

откъдето за интеграла I намираме

$$I = 2\pi i \left[\frac{1}{4} - \frac{1}{\pi} \right].$$

2. Приложения на теоремата за резидуумите. Теоремата за резидуумите има многобройни приложения. Тук ще разгледаме само възможността, която тази теорема предлага за пресмятане на някои несобствени и тригонометрични интеграли.

Да разгледаме отначало несобствени интеграли от вида

$$(12.7) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx,$$

където $P(x)$ и $Q(x)$ са полиноми с реални коефициенти, за които $\deg Q(x) \geq \deg P(x) + 2$ и освен това $Q(z)$ няма нули върху реалната ос. Такива реални несобствени интеграли могат да се пресмятат чрез теоремата за резидуумите в случая когато намирането на примитивна за подинтегралната функция е трудно или невъзможно. Нека z_1, z_2, \dots, z_n са онези корени на полинома $Q(z)$, които лежат в горната полуравнина $y > 0$ (рис. 12.4). Нека R е избрано толкова голямо, че всичките $z_k, k = 1, 2, \dots, n$, лежат в кръга с център в началото и радиус R . Такъв избор е възможен, понеже те са краен брой (не повече от всичките корени на полинома $Q(z)$).

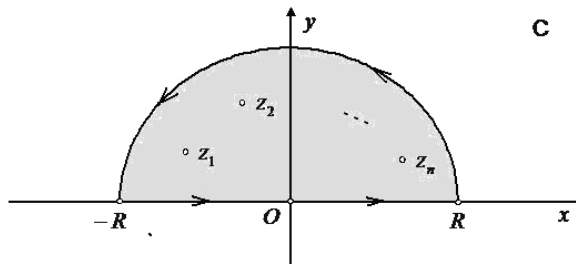


Рис. 12.4.

В този случай ще интегрираме функцията

$$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$$

по контура $L = L_R \cup [-R, R]$, където L_R е горната полуокръжност с център в нулата и радиус R , а $[-R, R]$ е съответната отсечка по реалната ос. Всичките точки $z_k, k = 1, 2, \dots, n$, представляват полюси за $f(z)$ от ред не по-висок от кратността на съответното z_k като корен на полинома $Q(z)$. За всяко достатъчно голямо R , според теоремата за резидуумите имаме

$$(12.8) \int_{-R}^R f(z) dx + \int_{L_R} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{res } f(z),$$

където сумата е по полюсите на функцията $f(z)$, които са точно нулите на полинома $Q(z)$. Идеята на този подход се основава на факта, че интегралът по полуокръжността L_R клони към нула при $R \rightarrow \infty$, докато интегралът по отсечката $[-R, R]$ клони точно към интеграла, който искаме да пресметнем.

Сега ще докажем, че при направените предположения, най-вече от това, че $\deg Q(x) \geq \deg P(x) + 2$, следва

$$(12.9) \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{L_R} \frac{P(z)}{Q(z)} dz = 0.$$

Нека $m = \deg P(z)$ и

$$P(z) = p_m z^m + p_{m-1} z^{m-1} + \dots, \quad p_m \neq 0,$$

$$Q(z) = q_{m+s} z^{m+s} + q_{m+s-1} z^{m+s-1} + \dots, \quad q_{m+s} \neq 0,$$

където $m+s = \deg Q(z)$. По условие $s \geq 2$. Ако $z \in L_R$, то последователно оценяваме модула на $f(z)$,

$$|f(z)| = \left| \frac{P(z)}{Q(z)} \right| = \left| \frac{p_m z^m + p_{m-1} z^{m-1} + \dots}{q_{m+s} z^{m+s} + q_{m+s-1} z^{m+s-1} + \dots} \right| = \left| \frac{z^m \left(p_m + p_{m-1} \frac{1}{z} + \dots \right)}{z^{m+s} \left(q_{m+s} + q_{m+s-1} \frac{1}{z} + \dots \right)} \right|,$$

$$(12.10) \quad \left| \frac{P(z)}{Q(z)} \right| = \left| \frac{z^m}{z^{m+s}} \frac{p_m + p_{m-1} \frac{1}{z} + \dots}{q_{m+s} + q_{m+s-1} \frac{1}{z} + \dots} \right| = \frac{1}{R^s} \left| \frac{p_m + p_{m-1} \frac{1}{z} + \dots}{q_{m+s} + q_{m+s-1} \frac{1}{z} + \dots} \right|,$$

понеже $|z| = R$. Лесно се съобразява, че вторият множител в дясната страна на (12.10) е ограничен при $R \rightarrow \infty$, т.е. може да се намери R_0 такава, че

$$\left| \frac{p_m + p_{m-1} \frac{1}{z} + \dots}{q_{m+s} + q_{m+s-1} \frac{1}{z} + \dots} \right| \leq M,$$

за някаква константа M при всяко $R > R_0$. Сега от (12.10) следва, че

$$(12.11) \quad \left| \frac{P(z)}{Q(z)} \right| \leq \frac{M}{R^s},$$

за всяко $R > R_0$. От правилото за оценка на комплексния интеграл получаваме

$$\left| \int_{L_R} \frac{P(z)}{Q(z)} dz \right| \leq \max_{z \in L_R} \left| \frac{P(z)}{Q(z)} \right| \mu(L_R),$$

където $\mu(L_R) = \pi R$ е дължината на кривата L_R , следователно съгласно (12.11) е изпълнено

$$\left| \int_{L_R} \frac{P(z)}{Q(z)} dz \right| \leq \frac{M}{R^s} \pi R = \frac{M\pi}{R^{s-1}},$$

откъдето непосредствено се получава верността на (12.9). От друга страна очевидно

$$(12.12) \quad \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx.$$

Съотношенията (12.9) и (12.12) дават търсената формула

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx = 2\pi i \sum_k \operatorname{res}_{z=z_k} \frac{P(z)}{Q(z)}.$$

По този начин доказахме

Твърдение 12.2. Нека $P(x)$ и $Q(x)$ са полиноми, за които $\deg Q(x) \geq \deg P(x) + 2$ и освен това $Q(z)$ няма нули върху реалната ос и нека z_1, z_2, \dots, z_n са онези нули на полинома $Q(z)$, които лежат в горната полуравнина $\operatorname{Im} z > 0$. Тогава е в сила формулата

$$(12.13) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx = 2\pi i \sum_k \operatorname{res}_{z=z_k} \frac{P(z)}{Q(z)}. \blacksquare$$

От направеното доказателство се вижда, че твърдение 12.2 е вярно както за полиноми с реални коефициенти, така и за полиноми с комплексни коефициенти.

Например да пресметнем интеграла

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^4}.$$

Тук ще приложим твърдение 12.2 за рационалната функция $f(z) = \frac{1}{1+z^4}$.

Знаменателят няма нули върху реалната ос и освен това $\deg(1+z^4) = 4 > \deg 1 + 2 = 2$.

Функцията $f(z)$ има изолирани особени точки корените на уравнението $Q(z) = z^4 + 1 = 0$. Неговите корени се намират по известната формула

$$z_k = \sqrt[4]{|-1|} \left[\cos \frac{\arg(-1) + 2k\pi}{4} + i \sin \frac{\arg(-1) + 2k\pi}{4} \right], \quad k = 0, 1, 2, 3,$$

$$z_k = \cos \frac{\pi + 2k\pi}{4} + i \sin \frac{\pi + 2k\pi}{4}, \quad k = 0, 1, 2, 3.$$

От тях само

$$z_0 = \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} + i \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{и} \quad z_1 = \cos \frac{\pi + 2\pi}{4} + i \sin \frac{\pi + 2\pi}{4} = -\frac{1}{\sqrt{2}} + i \frac{1}{\sqrt{2}}$$

лежат в горната полуравнина $\operatorname{Im} z > 0$. Сега от твърдение 12.2 следва, че

$$I = 2\pi i \left[\operatorname{res}_{z=z_0} \frac{1}{z^4 + 1} + \operatorname{res}_{z=z_1} \frac{1}{z^4 + 1} \right].$$

И двете точки са прости полюси, понеже $Q'(z) = 4z^3$ и $Q'(z_0) \neq 0$, $Q'(z_1) \neq 0$.

Пресмятаме последователно

$$\operatorname{res}_{z=z_0} \frac{1}{z^4 + 1} = \frac{1}{4(z_0)^3} = \frac{z_0}{4(z_0)^4} = -\frac{z_0}{4} \quad \text{и} \quad \operatorname{res}_{z=z_1} \frac{1}{z^4 + 1} = \frac{1}{4(z_1)^3} = \frac{z_1}{4(z_1)^4} = -\frac{z_1}{4},$$

$$I = 2\pi i \left[-\frac{z_0}{4} - \frac{z_1}{4} \right] = -2\pi i \left[\frac{z_0 + z_1}{4} \right] = -2\pi i \left[\frac{\frac{2i}{\sqrt{2}}}{4} \right] = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

Интегралите от вида

$$A = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} \cos \alpha x dx \quad \text{и} \quad B = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} \sin \alpha x dx, \quad \alpha > 0,$$

се обединяват в един посредством формулата на Ойлер $\cos \alpha x + i \sin \alpha x = e^{i\alpha x}$,

$$A + iB = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} e^{i\alpha x} dx.$$

Твърдение 12.3. Нека $P(x)$ и $Q(x)$ са полиноми (с реални или комплексни коефициенти) такива, че $\deg Q(x) \geq \deg P(x) + 1$ и знаменателят $Q(x)$ няма корени по реалната ос. Нека освен това z_1, z_2, \dots, z_n са нулите на $Q(z)$ в горната полуравнина $\operatorname{Im} z > 0$. Тогава при всяко $\alpha > 0$ е в сила формулата

$$(12.14) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} e^{i\alpha x} dx = 2\pi i \sum_k \operatorname{res}_{z=z_k} \left[\frac{P(z)}{Q(z)} e^{i\alpha z} \right].$$

Доказателство. Тук ще положим

$$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} e^{i\alpha z}$$

и ще разсъждаваме аналогично както при доказването на твърдение 12.2. Достатъчно е да покажем, че

$$(12.15) \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{L_R} \frac{P(z)}{Q(z)} e^{i\alpha z} dz = 0,$$

понеже всичко друго се повтаря по същия начин. Кривата L_R има параметрично представяне

$$L_R : z = R e^{it} = R[\cos t + i \sin t], \quad 0 \leq t \leq \pi,$$

следователно при $z \in L_R$,

$$|e^{i\alpha z}| = |e^{i\alpha R[\cos t + i \sin t]}| = |e^{i\alpha R \cos t}| |e^{-\alpha R \sin t}| = |e^{-\alpha R \sin t}|, \quad 0 \leq t \leq \pi.$$

Разсъждавайки аналогично, от правилото за оценяване на интеграла получаваме

$$(12.16) \left| \int_{L_R} \frac{P(z)}{Q(z)} e^{i\alpha z} dz \right| \leq \int_0^\pi \frac{M}{R^s} e^{-\alpha R \sin t} R dt = \frac{M}{R^{s-1}} \int_0^\pi e^{-\alpha R \sin t} dt = \frac{2M}{R^{s-1}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\alpha R \sin t} dt,$$

където $s = \deg Q(z) - \deg P(z)$. По условие $s \geq 1$. От друга страна лесно се установява, че

$$\sin t \geq \frac{2}{\pi} t, \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2},$$

следователно

$$e^{-\alpha R \sin t} \leq e^{-\frac{\alpha R^2}{\pi} t}, \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2},$$

откъдето след заместване в (12.16) намираме

$$\left| \int_{L_R} \frac{P(z)}{Q(z)} e^{i\alpha z} dz \right| \leq \frac{2M}{R^{s-1}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{\alpha R^2}{\pi} t} dt = \frac{2M}{R^{s-1}} [1 - e^{-R\alpha}].$$

Дясната страна в последното неравенство клони към нула при $R \rightarrow \infty$, което доказва (12.15), а от там и верността на твърдението. ■

Например да пресметнем интеграла

$$I = \int_0^\infty \frac{\cos ax}{x^2 + b^2} dx, \quad a > 0, \quad b > 0.$$

Тук от съображения за четност можем да напишем

$$I = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty \frac{\cos ax}{x^2 + b^2} dx.$$

Да положим

$$A = \int_{-\infty}^\infty \frac{\cos ax}{x^2 + b^2} dx \quad \text{и} \quad B = \int_{-\infty}^\infty \frac{\sin ax}{x^2 + b^2} dx.$$

Тогава

$$(12.17) A + iB = \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{x^2 + b^2} e^{iax} dx$$

Веднага се вижда че са налице условията за прилагане на твърдение 12.3. Знаменателят $Q(z) = z^2 + b^2$ има два прости корена $z_1 = ib$ и $z_2 = -ib$. От тях само z_1 лежи в горната полуравнина. Отгук интеграла (12.16) намираме

$$A + iB = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2 + b^2} e^{iax} dx = 2\pi i \operatorname{res}_{z=ib} \frac{1}{x^2 + b^2} e^{iax} = 2\pi i \frac{e^{iaib}}{2ib} = \pi \frac{e^{-ab}}{b}.$$

След сравняване на реалните и имагинерните части получаваме

$$A = \pi \frac{e^{-ab}}{b} \text{ и } B = 0,$$

откъдето окончателно за стойността на търсения интеграл намираме

$$I = \frac{1}{2} A = \pi \frac{e^{-ab}}{2b}.$$

Теоремата за резидуумите може да бъде полезна и при пресмятане на определени интеграли от вида

$$\int_0^{2\pi} R(\cos x, \sin x) dx,$$

където $R(u, v)$ е някаква рационална функция. След смяната $e^{ix} = z$ имаме

$$\cos x = \frac{z + \frac{1}{z}}{2} \text{ и } \sin x = \frac{z - \frac{1}{z}}{2i}.$$

Твърдение 12.4. Нека $R(u, v)$ е рационална функция, при което комплексната функция

$$R\left(\frac{z + \frac{1}{z}}{2}, \frac{z - \frac{1}{z}}{2i}\right)$$

няма нули по единичната окръжност $C: |z| = 1$. Тогава

$$(12.18) \int_0^{2\pi} R(\cos x, \sin x) dx = \int_C R\left(\frac{z + \frac{1}{z}}{2}, \frac{z - \frac{1}{z}}{2i}\right) \frac{dz}{iz} = 2\pi \sum_k \operatorname{res}_{z=z_k} \left[R\left(\frac{z + \frac{1}{z}}{2}, \frac{z - \frac{1}{z}}{2i}\right) \frac{1}{z} \right],$$

където сумирането е по всичките полюси на подинтегралната функция, които лежат вътре в единичната окръжност.

Доказателство. Ако в интеграла

$$\int_C R\left(\frac{z + \frac{1}{z}}{2}, \frac{z - \frac{1}{z}}{2i}\right) \frac{dz}{iz}$$

заместим с параметризацията на $C: z = e^{ix}$, $0 \leq x \leq 2\pi$, $dz = ie^{ix} dx$, ще получим

$$\int_C R\left(\frac{z + \frac{1}{z}}{2}, \frac{z - \frac{1}{z}}{2i}\right) \frac{dz}{iz} = \int_0^{2\pi} R(\cos x, \sin x) \frac{ie^{ix} dx}{ie^{ix}} = \int_0^{2\pi} R(\cos x, \sin x) dx.$$

Другата част на формулата (12.18) се получава веднага от теоремата за резидуумите. ■

Например да пресметнем интеграла

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{dx}{1 + a \cos x}, \quad 0 < a < 1.$$

Съгласно твърдение 12.4 полагаме $e^{ix} = z$ и получаваме

$$I = \frac{1}{i} \int_C \frac{dz}{\left[\frac{z + \frac{1}{z}}{1 + a \frac{z}{2}} \right] z} = \frac{2}{i} \int_C \frac{dz}{az^2 + 2z + a},$$

където C е единичната окръжност. Подинтегралната функция има два прости полюса, които са корените на знаменателя,

$$z_1 = \frac{-1 + \sqrt{1 - a^2}}{a} \text{ и } z_2 = \frac{-1 - \sqrt{1 - a^2}}{a},$$

от които само z_1 лежи вътре в C . Пресмятаме

$$\operatorname{res}_{z=z_1} \frac{1}{az^2 + 2z + a} = \frac{1}{2\sqrt{1 - a^2}},$$

откъдето за интеграла намираме

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{dx}{1 + a \cos x} = 2\pi i \frac{2}{i} \operatorname{res}_{z=z_1} \frac{1}{az^2 + 2z + a} = \frac{2\pi}{\sqrt{1 - a^2}}.$$

Да пресметнем сега **интеграла на Ойлер**

$$(12.19) \quad E = \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx.$$

Първо да отбележим, че този несобствен интеграл е условно сходящ и се определя като границата

$$E = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R \frac{\sin x}{x} dx.$$

Понеже подинтегралната функция е четна,

$$(12.20) \quad E = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{2} \int_{-R}^R \frac{\sin x}{x} dx \right].$$

Да разгледаме областта D от рис. 12.5,

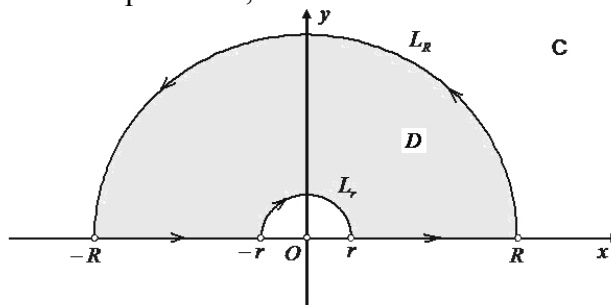


Рис. 12.5

с контур съставен от положително ориентираната полуокръжност $L_R: z = Re^{it}$, $0 \leq t \leq \pi$, отрицателно ориентираната полуокръжност $L_r: z = re^{-it}$, $-\pi \leq t \leq 0$, и двете отсечки по реалната ос $[-R, -r]$ и $[r, R]$, $R > r > 0$. В такъв случай целият контур на областта,

$$\Gamma = L_R \cup [-R, -r] \cup L_r \cup [r, R]$$

е положително ориентиран, а в самата област D , функцията $f(z) = e^{iz}$ е аналитична. Съгласно основната теорема на Коши имаме

$$(12.21) \quad 0 = \int_{\Gamma} \frac{e^{iz}}{z} dz = \int_{L_R} \frac{e^{iz}}{z} dz + \int_{L_r} \frac{e^{iz}}{z} dz + \int_{[-R,-r]} \frac{e^{iz}}{z} dz + \int_{[r,R]} \frac{e^{iz}}{z} dz = \\ = I_1(R) + I_2(r) + I_3(R,r) + I_4(R,r)$$

В последния израз ще правим гранични преходи по $R \rightarrow \infty$ и $r \rightarrow 0$. Както в доказателството на твърдение 12.3 намираме, че

$$(12.22) \quad \lim_{R \rightarrow \infty} I_1(R) = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{L_R} \frac{e^{iz}}{z} dz = 0.$$

Интеграла $I_2(r)$ преобразуваме

$$I_2(r) = \int_{L_r} \frac{e^{iz}}{z} dz = \int_{-\pi}^0 \frac{e^{re^{-it}}}{re^{-it}} (-i) e^{-it} dt = (-i) \int_{-\pi}^0 e^{re^{-it}} dt,$$

следователно

$$(12.23) \quad \lim_{r \rightarrow 0} I_2(r) = (-i) \lim_{r \rightarrow 0} \int_{-\pi}^0 e^{re^{-it}} dt = (-i) \int_{-\pi}^0 dt = (-i)\pi.$$

От друга страна очевидно

$$I_3(R,r) + I_4(R,r) = \int_{[-R,-r]} \frac{e^{iz}}{z} dz + \int_{[r,R]} \frac{e^{iz}}{z} dz = \int_{[-R,-r]} \frac{i \sin z}{z} dz + \int_{[r,R]} \frac{i \sin z}{z} dz,$$

следователно

$$(12.24) \quad \lim_{R \rightarrow \infty, r \rightarrow 0} [I_3(R,r) + I_4(R,r)] = \lim_{R \rightarrow \infty, r \rightarrow 0} \left[\int_{[-R,-r]} \frac{i \sin z}{z} dz + \int_{[r,R]} \frac{i \sin z}{z} dz \right] = i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin z}{z} dz.$$

Сега от (12.21-24) получаваме равенството

$$0 = (-i)\pi + i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin z}{z} dz,$$

следователно

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin z}{z} dz = \pi,$$

а за интеграла на Ойлер (12.19) получаваме

$$(12.25) \quad E = \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin z}{z} dz = \frac{\pi}{2}$$