Лекция 13

§13. Преобразование на Лаплас и z -преобразование

1. Определение и примери. Преобразованието на Лаплас дава възможност за обосновка на операционното смятане, което представлява основният апарат за моделиране в теорията на стационарните системи.

Ще разглеждаме функции $f(t)$, определени за всяко $t \in \mathbb{R}$ и удовлетворяващи следните условия.

1) $f(t)=0$ за $t<0$.

2) Във всеки краен интервал $[0, A]$, $A>0$, функцията $f(t)$ е непрекъсната или има краен брой прекъсвания от първи род.

3) $f(t)$ расте не по-бързо от експонента при $t \to \infty$, т.е.

(13.1) $|f(t)| \le M e^{\sigma_0 t}$, $t \ge 0$,

за някои константи $M \ge 0$ и $\sigma_0 \in \mathbb{R}$.

Всяка функция $f(t)$, която изпълнява посочените три условия ще наричаме ***оригинал***. От условие 2) следва, че във всяка точка $t_0 \in \mathbb{R}$ съществуват двете едностранни граници $f(t_0+0)$ и $f(t_0-0)$. Без ограничение на общността можем да предполагаме, че $f(t)$ няма "изкуствени" прекъсвания, което означава, че ако $f(t_0+0)=f(t_0-0)$, то функцията $f(t)$ ще разглеждаме непрекъсната в точката t_0, при което разбира се $f(t_0)=f(t_0+0)=f(t_0-0)$. Ако $f(t)$ има прекъсване от първи род в точката t_0, $f(t_0+0) \ne f(t_0-0)$, то конкретната стойност $f(t_0)$ няма особено значение за теорията, която ще изложим по-надолу. За удобство можем да предполагаме, че $f(t_0)=f(t_0+0)$, което означава, че $f(t)$ е непрекъсната отдясно в точката t_0. По този начин всеки оригинал $f(t)$ представлява функция, която е непрекъсната отдясно във всяка точка $t_0 \in \mathbb{R}$.

Точната долна граница $\hat{\sigma}=\hat{\sigma}(f)$ на всичките σ_0, за които е валидно равенството (13.1) се нарича ***показател за (експоненциален) ръст*** на функцията $f(t)$. Това означава, че за всяко $\sigma_0 > \hat{\sigma}$ съществува константа M такава, че е изпълнено (13.1), а за всяко $\sigma_0 < \hat{\sigma}$ не може да се намери такава константа (може да се случи $\hat{\sigma}=-\infty$). Непосредствено се вижда, че ако $f_1(t)$, $f_2(t)$, ..., $f_m(t)$ са оригинали, то всяка тяхна линейна комбинация

$$f(t)=\alpha_1 f_1(t)+\alpha_2 f_2(t)+\cdots+\alpha_m f_m(t),$$

където α_k, $k=1,2,\ldots,m$, са константи, също представлява оригинал, при което показателят за ръст на $f(t)$ не надвишава най-големия от показателите на ръст за съставящите функции.

При всяко цяло n и всяко $\sigma>0$ от правилото на Лопитал следва, че

$$\lim_{t\to\infty} t^n e^{-\sigma t}=0,$$

следователно за функцията $f(t)=t^n$ имаме $\hat{\sigma}=0$. От тук следва, че ако $P(t)$ е полином, то също $\hat{\sigma}=0$. Изобщо, ако $f(t)$ е квазиполином от вида

$$f(t)=\sum_{k=1}^{n} P_k(t)\left(a_k \cos\alpha_k t+b_k \sin\alpha_k t\right)e^{\beta_k t},$$

където $P_k(t)$ са полиноми, a_k, b_k, α_k, β_k, $k=1,2,\dots,n$, са константи, при уговорката $f(t)=0$ за $t<0$, то $f(t)$ е оригинал, при което $\hat{\sigma}\le\max(\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_n)$.

Определение 13.1. Ако функцията $f(t)$ е оригинал, то ***преобразование на Лаплас*** на $f(t)$ се нарича следният несобствен интеграл

(13.2) $F(p)=\int\limits_0^\infty f(t)e^{-pt}dt$,

разглеждан като функция на комплексната променлива $p=\sigma+i\omega$ при $\sigma>\hat{\sigma}$, където $\hat{\sigma}$ е показателят за ръст на $f(t)$.

Функцията $F(p)$ се нарича ***образ*** на оригинала $f(t)$. В този случай пишем

$f(t)\Leftrightarrow F(p),\ F(p)=\mathbf{L}\{f(t)\},\ f(t)=\mathbf{L}^{-1}\{F(p)\}$.

Например нека $\eta(t)$ е функцията на Хевисайд (рис. 13.1)

$$\eta(t)=\begin{cases}1,\ t\ge 0\\ 0,\ t<0\end{cases}.$$

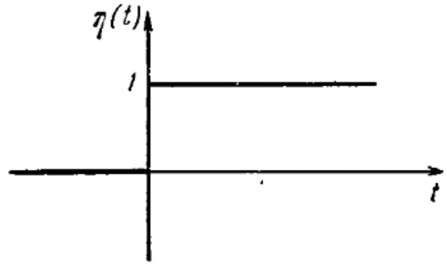

Рис. 13.1.

Тогава за нейния образ имаме

$$F(p)=\int\limits_0^\infty e^{-pt}dt=\frac{1}{p}\int\limits_0^\infty e^{-pt}dpt=\frac{-1}{p}\int\limits_0^\infty de^{-pt}=\frac{-1}{p}e^{-pt}\Big|_0^\infty=\frac{1}{p}\Big[1-\lim_{t\to\infty}e^{-pt}\Big]=\frac{1}{p},$$

понеже при $p=\sigma+i\omega$ с $\sigma>0$

$$\lim_{t\to\infty}\left|e^{-pt}\right|=\lim_{t\to\infty}\left|e^{-\sigma t-i\omega t}\right|=\lim_{t\to\infty}\left|e^{-\sigma t}\right|\left|e^{i\omega t}\right|=\lim_{t\to\infty}e^{-\sigma t}=0.$$

При намирането на тези интеграли винаги се предполага, че $\sigma=\operatorname{Re}p$ е фиксирано отнапред ***достатъчно голямо***. Следователно

(13.3) $\eta(t)\Leftrightarrow\dfrac{1}{p}$.

Функцията $\eta(t)$ има ролята на ***единична функция***, която по първото изискване за оригинал е равна на нула за отрицателни стойности на t. Затова понякога функцията на Хевисайд се означава с $1(t)$. Когато например използваме познатите функции $\sin t$, $\cos t$, e^t и т.н. в качеството на оригинали се има предвид, че те съвпадат със съответните функции за $t\ge 0$ и са равни на нула за $t<0$ (рис. 13.2).

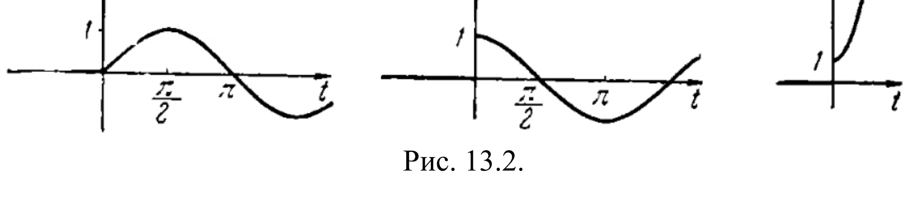

Рис. 13.2.

Формално за тези оригинали можем да пишем $\eta(t)\sin t$, $\eta(t)\cos t$, $\eta(t)e^t$, което обаче води до малко полезни означения.

Нека $f(t)$ е оригинал с показател за ръст $\hat{\sigma}$. Тогава за всяко $\sigma_0 > \hat{\sigma}$ съществува константа $M > 0$, за която $|f(t)| \le M e^{\sigma_0 t}$, $t \ge 0$, откъдето лесно се получава, че преобразованието на Лаплас представлява абсолютно (и равномерно за всички p с $\sigma = \operatorname{Re} p > \sigma_0$) сходящ интеграл, понеже при $\sigma > \sigma_0$ имаме

$$\left|\int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt\right| \le \int_0^\infty |f(t)|\left|e^{-pt}\right|dt = \int_0^\infty |f(t)|\left|e^{-\sigma t - i\omega i}\right|dt = \int_0^\infty |f(t)|e^{-\sigma t}dt,$$

$$\left|\int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt\right| \le M\int_0^\infty e^{\sigma_0 t}e^{-\sigma t}dt = M\frac{-1}{\sigma-\sigma_0}e^{-(\sigma-\sigma_0)t}\Big|_0^\infty = \frac{M}{\sigma-\sigma_0}\left[1-\lim_{t\to\infty}e^{-(\sigma-\sigma_0)t}\right] = \frac{M}{\sigma-\sigma_0}.$$

Всъщност е валидна следната обща теорема.

Теорема 13.1. Нека $f(t)$ е оригинал с показател за ръст $\hat{\sigma}$. Тогава преобразованието на Лаплас $F(p)$ представлява аналитична функция в полуравнината $\sigma = \operatorname{Re} p > \hat{\sigma}$ (рис. 13.3), чиито производни могат да се намерят посредством диференциране под знака на интеграла,

$$F^{(n)}(p) = \int_0^\infty (-t)^n f(t)e^{-pt}dt, \; n = 1,2,\dots,$$

и разбира се също представляват аналитични функции в полуравнината $\operatorname{Re} p > \hat{\sigma}$. ■

Например

$$F'(p) = -\int_0^\infty tf(t)e^{-pt}dt, \; \operatorname{Re} p > \hat{\sigma}(f).$$

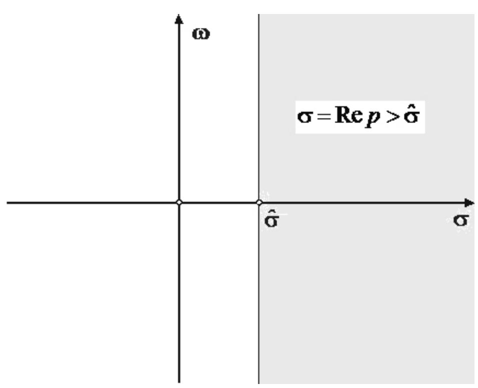

Рис. 13.3.

Да намерим образа на функцията $f(t) = e^{at}$, където $a = \alpha + i\beta$ е някакво комплексно число. Тук $\left|e^{at}\right| = \left|e^{\alpha t}e^{i\beta t}\right| = \left|e^{\alpha t}\right|$, следователно $\hat{\sigma} = \alpha$. При $\operatorname{Re} p > \alpha$ имаме

$$F(p) = \int_0^\infty e^{at}e^{-pt}dt = \int_0^\infty e^{-(p-a)t}dt = \frac{-1}{p-a}e^{-(p-a)t}\Big|_0^\infty = \frac{1}{p-a}\left[1-\lim_{t\to\infty}e^{-(p-a)t}\right] = \frac{1}{p-a},$$

следователно

(13.4) $\quad e^{at} \Leftrightarrow \dfrac{1}{p-a}.$

Функцията $F(p)$ от общи съображения знаем, че е аналитична в полуравнината $\operatorname{Re} p > \alpha$. От нейния конкретен вид обаче се вижда, че тя е аналитична в цялата комплексна равнина с изключение на точката a.

Получената ситуация е типична за елементарните приложения. ***Образите обикновено се получават аналитични в цялата равнина с изключение на краен брой изолирани особени точки*** (полюси). Всъщност именно резидуумите на $F(p)$ в тези полюси, както ще се убедим по-нататък, идентифицират по единствен начин оригинала $f(t)$, който поражда $F(p)$. Всичките тези полюси задължително лежат в другата полуравнина $\operatorname{Re} p < \hat{\sigma}(f)$ или по вертикалната права $\operatorname{Re} p = \hat{\sigma}$, понеже $F(p)$ със сигурност е аналитична в полуравнината $\operatorname{Re} p > \hat{\sigma}$ и не може да има там особени точки.

2. Основни свойства. Причината поради която преобразованието на Лаплас работи толкова добре в математическото моделиране е начинът, по който задава съответствието между оригинали и образи. По-нататък ще се убедим, че това съответствие при някакви естествени уговорки е взаимно еднозначно. Освен това съществуват и прости връзки между образът на дадена функция и образите на нейните производни и интеграли. В определен смисъл диференциалното и интегралното смятане за дадени функции се превръща в своеобразно смятане над техните образи, при което последното в технически план е значително по-лесно. Следва да се има предвид, че ***операционното смятане***, както още се нарича цялата технология на работа с оригинали и образи, е било открито и използвано от английския електроинженер Оливър Хевисайд преди да му бъде придадена строга математическа форма, намерила окончателен вид в работите на полския математик Ян Микусински.

Тук ще разгледаме основните свойства на преобразованието на Лаплас.

1) ***Линейност.*** Поради линейното свойство на интеграла, преобразованието на Лаплас също е линейно, т.е. образ на линейна комбинация е равен на съответната линейна комбинация от образи, т.е.

$$\mathbf{L}\{\lambda_1 f_1(t)+\lambda_2 f_2(t)+\cdots+\lambda_m f_m(t)\}=\lambda_1\mathbf{L}\{f_1(t)\}+\lambda_2\mathbf{L}\{f_2(t)\}+\cdots+\lambda_m\mathbf{L}\{f_m(t)\}.$$

Например да намерим образа на функцията $f(t)=\sin\beta t$. Имаме

$$\sin\beta t=\frac{e^{i\beta t}-e^{-i\beta t}}{2i},$$

а от друга страна пресметнахме

$$e^{\alpha t}\Leftrightarrow\frac{1}{p-\alpha},$$

следователно

$$\sin\beta t\Leftrightarrow\frac{1}{2i}\left[\frac{1}{p-\beta i}+\frac{1}{p+\beta i}\right]=\frac{\beta}{p^2+\beta^2}. \tag{13.5}$$

Аналогично пресмятаме

$$\cos\beta t\Leftrightarrow\frac{p}{p^2+\beta^2}. \tag{13.6}$$

2) ***Формула за отместването***. Ако $f(t)\Leftrightarrow F(p)$, то

$$e^{\alpha t}f(t)\Leftrightarrow F(p-\alpha).$$

По определение

$$\mathbf{L}\{e^{\alpha t}f(t)\}=\int_0^\infty e^{\alpha t}f(t)e^{-pt}dt=\int_0^\infty f(t)e^{-(p-\alpha)t}dt=F(p-\alpha).$$

Например от (13.5) и от формулата за отместването имаме

(13.7) $e^{\alpha t}\sin\beta t \Leftrightarrow \dfrac{\beta}{(p-\alpha)^2+\beta^2}$ и $e^{\alpha t}\cos\beta t \Leftrightarrow \dfrac{(p-\alpha)}{(p-\alpha)^2+\beta^2}$.

3) ***Формула за закъснението***. Нека $f(t)\Leftrightarrow F(p)$ и $a>0$. Тогава можем да разгледаме функцията $f(t-a)$ (рис. 13.4), която също представлява оригинал. За образа на $f(t-a)$ е в сила формулата

$$f(t-a)\Leftrightarrow e^{-pa}F(p).$$

Имаме

$$\mathbf{L}\{f(t-a)\}=\int_0^\infty f(t-a)e^{-pt}dt=\int_a^\infty f(t-a)e^{-pt}dt,$$

понеже $f(t-a)=0$ за $t<a$.

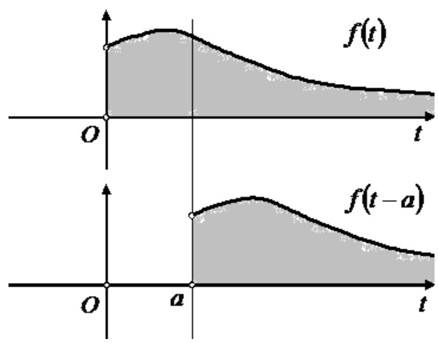

Рис. 13.4.

Сега след смяна на променливата $t-a=\tau$ получаваме

$$\mathbf{L}\{f(t-a)\}=\int_0^\infty f(\tau)e^{-p(\tau+a)}dt=\int_0^\infty f(\tau)e^{-p\tau}e^{-pa}dt=e^{-pa}\int_0^\infty f(\tau)e^{-p\tau}dt=e^{-pa}F(p).$$

4) ***Формула за изпреварването***. Нека $f(t)\Leftrightarrow F(p)$ и $a>0$. Тогава е в сила формулата

$$f(t+a)\Leftrightarrow e^{pa}\left[F(p)-\int_0^a f(t)e^{-pt}dt\right].$$

Имаме

$$\mathbf{L}\{f(t+a)\}=\int_0^\infty f(t+a)e^{-pt}dt,$$

което след смяна на променливата $t+a=\tau$ приема вида

$$\mathbf{L}\{f(t+a)\}=\int_a^\infty f(\tau)e^{-p(\tau-a)}dt=\int_a^\infty f(\tau)e^{-p\tau}e^{pa}dt=e^{pa}\int_a^\infty f(\tau)e^{-p\tau}dt,$$

$$\mathbf{L}\{f(t+a)\}=e^{pa}\left[\int_0^\infty f(\tau)e^{-p\tau}dt-\int_0^a f(\tau)e^{-p\tau}dt\right],$$

$$\mathbf{L}\{f(t+a)\}=e^{pa}\left[F(p)-\int_0^a f(\tau)e^{-p\tau}dt\right].$$

5) ***Формула за подобието***. Нека $f(t)\Leftrightarrow F(p)$ и $\lambda>0$. Тогава е в сила формулата

$$f(\lambda t)\Leftrightarrow \frac{1}{\lambda}F\left(\frac{p}{\lambda}\right).$$

Имаме

$$\mathbf{L}\{f(\lambda t)\}=\int_0^\infty f(\lambda t)e^{-pt}dt=\frac{1}{\lambda}\int_0^\infty f(\lambda t)e^{-\frac{p}{\lambda}(\lambda t)}d(\lambda t),$$

което след смяната $\lambda t=\tau$ приема вида

$$\mathbf{L}\{f(\lambda t)\}=\frac{1}{\lambda}\int_0^\infty f(\tau)e^{-\frac{p}{\lambda}\tau}d\tau=\frac{1}{\lambda}F\left(\frac{p}{\lambda}\right).$$

Например от съотношението

$$\sin t\Leftrightarrow\frac{1}{p^2+1}$$

и формулата за подобието намираме познатия израз

$$\sin\lambda t\Leftrightarrow\frac{1}{\lambda}\frac{1}{\left(\frac{p}{\lambda}\right)^2+1}=\frac{\lambda}{p^2+\lambda^2}.$$

6) ***Формула за изображение на T-периодичен оригинал***. Нека функцията $f(t)$ е T-периодична, т.е. $f(t+T)=f(t)$ при $t\ge 0$ $(T>0)$ и нека $f(t)\Leftrightarrow F(p)$. Тогава е в сила формулата

$$f(t)\Leftrightarrow\frac{\int_0^T f(t)e^{-pt}dt}{1-e^{-pT}}.$$

Имаме $f(t)=f(t+T)$ следователно според формулата за изпреварването,

$$\mathbf{L}\{f(t)\}=\mathbf{L}\{f(t+T)\}=e^{pT}\left[\mathbf{L}\{f(t)\}-\int_0^T f(t)e^{-pt}dt\right],$$

което след очевидно преобразуване доказва твърдението.

Конволюция $f_1*f_2(t)$ на два оригинала $f_1(t)$ и $f_2(t)$ наричаме функцията, определена от интеграла

(13.8) $\quad f_1*f_2(t)=\int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau.$

Така определената функция удовлетворява трите условия за оригинал. Освен това може да се докаже

Твърдение 13.1. Конволюцията притежава следните основни свойства.
1) ***Комутативност*** – $f_1*f_2(t)=f_2*f_1(t)$.
2) ***Асоциативност*** – $f_1*(f_2*f_3)(t)=(f_2*f_1)*f_3(t)$.
3) ***Линейност*** – $f_1*(\alpha f_2+\beta f_3)(t)=\alpha f_1*f_2(t)+\beta f_1*f_3(t)$. ■

Комутативността означава всъщност, че

$$\int_0^t f_1(t-\tau)f_2(\tau)d\tau=\int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau,$$

което лесно се доказва след смяна на променливата $t-\tau=\theta$.

Да намерим образа на конволюцията $f_1*f_2(t)$. Съгласно (13.8) при $t>0$ имаме

$$\mathbf{L}\{f_1*f_2(t)\}=\int_0^\infty\left[\int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau\right]e^{-pt}dt.$$

Понеже

$$\int_t^{\infty} f_1(\tau) f_2(t-\tau)d\tau = 0,$$

последното може да се запише във вида

$$\mathbf{L}\{f_1 * f_2(t)\} = \int_0^{\infty}\left[\int_0^{\infty} f_1(\tau) f_2(t-\tau)d\tau\right]e^{-pt}dt = \int_0^{\infty}\left[\int_0^{\infty} f_1(\tau)e^{-p\tau} f_2(t-\tau)e^{-p(t-\tau)}d\tau\right]dt$$

След смяна реда на интегриране получаваме

$$\mathbf{L}\{f_1 * f_2(t)\} = \int_0^{\infty}\left[\int_0^{\infty} f_1(\tau)e^{-p\tau} f_2(t-\tau)e^{-p(t-\tau)}dt\right]d\tau = \int_0^{\infty} f_1(\tau)e^{-p\tau}\left[\int_0^{\infty} f_2(t-\tau)e^{-p(t-\tau)}dt\right]d\tau. \tag{13.9}$$

За интеграла в скобите след смяна на променливата $t-\tau=\theta$ получаваме

$$\int_0^{\infty} f_2(t-\tau)e^{-p(t-\tau)}dt = \int_{-\tau}^{\infty} f_2(\theta)e^{-p\theta}d\theta = \int_0^{\infty} f_2(\theta)e^{-p\theta}d\theta = \mathbf{L}\{f_2(t)\},$$

понеже

$$\int_{-\tau}^{0} f_2(\theta)e^{-p\theta}d\theta = 0,$$

откъдето след заместване в (13.9) получаваме

$$\mathbf{L}\{f_1 * f_2(t)\} = \int_0^{\infty} f_1(\tau)e^{-p\tau}\mathbf{L}\{f_2(t)\}d\tau = \mathbf{L}\{f_2(t)\}\int_0^{\infty} f_1(\tau)e^{-p\tau}d\tau = \mathbf{L}\{f_2(t)\}\mathbf{L}\{f_1(t)\}.$$

По този начин доказахме следната ***основна*** за операционното смятане

Теорема 13.2 ***(Борел).*** Нека $f_1(t)$ и $f_2(t)$ са оригинали. Тогава образът на конволюцията $f_1 * f_2(t)$ е равен на произведението на образите на $f_1(t)$ и $f_2(t)$, т.е.

$\mathbf{L}\{f_1 * f_2(t)\} = \mathbf{L}\{f_1(t)\}\mathbf{L}\{f_2(t)\}$. ■

Теоремата на Борел показва, че преобразованието на Лаплас превръща ***операцията конволюция*** между оригинали в ***операцията умножение*** на образи.

Например да намерим оригинала $f(t)$ по известен образ

$$F(p) = \frac{p}{(p^2+1)^2}.$$

Тук имаме

$$F(p) = \frac{p}{p^2+1}\frac{1}{p^2+1}.$$

Вече знаем, че

$$\cos t \Leftrightarrow \frac{p}{p^2+1} \text{ и } \sin t \Leftrightarrow \frac{1}{p^2+1},$$

следователно от теоремата на Борел имаме

$$f(t) = \cos t * \sin t = \int_0^t \cos\tau \sin(t-\tau)d\tau, \ t \ge 0.$$

Преобразуваме

$$\int_0^t \cos\tau\sin(t-\tau)d\tau = \frac{1}{2}\int_0^t [\sin t + \sin(t-2\tau)]d\tau = \frac{1}{2}\left[\tau\sin t + \frac{1}{2}\cos(t-2\tau)\right]_{\tau=0}^{\tau=t}$$

и намираме

$$f(t) = \frac{t\sin t}{2}, \ t \ge 0.$$

Да намерим образа на функцията $f(t)=t$. Тази функция може да се разгледа като образувана от конволюцията на функцията на Хевисайд със себе си,

$$t=\eta*\eta(t)=\int_0^t \eta(\tau)\eta(t-\tau)d\tau=\int_0^t d\tau,$$

следователно

$$t \Leftrightarrow \frac{1}{p}\frac{1}{p}=\frac{1}{p^2}.$$

По същия начин функцията $\frac{t^2}{2}$ може да се разгледа като конволюцията на t с $\eta(t)$,

$$\frac{t^2}{2}=\int_0^t \tau\eta(t-\tau)d\tau=\int_0^t \tau d\tau,$$

следователно

$$\frac{t^2}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{p^2}\frac{1}{p}=\frac{1}{p^3}.$$

Продължавайки нататък получаваме, че

(13.10) $\frac{t^n}{n!} \Leftrightarrow \frac{1}{p^{n+1}},\ n=1,2,\dots.$

3. Диференциране и интегриране. Нека функцията $f(t)$ и нейната производна $f'(t)$ са оригинали и $f(t)\Leftrightarrow F(p)$. Тогава

$$\mathbf{L}\{f'(t)\}=\int_0^\infty f'(t)e^{-pt}dt=\int_0^\infty e^{-pt}df(t)=e^{-pt}f(t)\Big|_0^\infty-\int_0^\infty f(t)de^{-pt},$$

$$\mathbf{L}\{f'(t)\}=\left[\lim_{t\to\infty}e^{-pt}f(t)-\lim_{t\to+0}e^{-pt}f(t)\right]+\int_0^\infty pe^{-pt}f(t)dt.$$

За всяко p с достатъчно голямо $\sigma=\operatorname{Re}p>\hat{\sigma}(f)$ е изпълнено $\lim_{t\to\infty}e^{-pt}f(t)=0$, а очевидно $\lim_{t\to 0}e^{-pt}f(t)=f(+0)$, където $f(+0)$ е дясната граница на $f(t)$ при $t\to 0$, следователно

$$\mathbf{L}\{f'(t)\}=pF(p)-f(+0).$$

Понеже всичките оригинали предполагаме непрекъснати отдясно, последната формула приема вида

(13.11) $f'(t)\Leftrightarrow pF(p)-f(0).$

Твърдение 13.2. Нека $f(t)$, $f'(t)$, ..., $f^{(n)}(t)$ са оригинали и $f(t)\Leftrightarrow F(p)$. Тогава за образа на $f^{(n)}(t)$ е в сила формулата

(13.12) $f^{(n)}(t)\Leftrightarrow p^nF(p)-p^{n-1}f(0)-p^{n-2}f'(0)-\dots-pf^{(n-2)}(0)-f^{(n-1)}(0).$

Доказателство. При $n=1$ твърдението вече е доказано в (13.11). При $n=2$, съгласно (13.10) имаме

$$\mathbf{L}\{f''(t)\}=p\mathbf{L}\{f'(t)\}-f'(0),$$

откъдето след заместване $\mathbf{L}\{f'(t)\}=pF(p)-f(0)$ намираме

$$\mathbf{L}\{f''(t)\}=p(pF(p)-f(0))-f'(0)=p^2F(p)-pf(0)-f'(0).$$

продължавайки по същия начин установяваме верността за всяко естествено n. ■

Например да намерим образа на израза

$$f''(t)+2f'(t)+f(t),$$

ако $f(0)=1$ и $f'(0)=2$. Имаме

$$f(t) \Leftrightarrow F(p),$$

$$f'(t) \Leftrightarrow pF(p)-f(0)=pF(p)-1,$$

$$f''(t) \Leftrightarrow p^2F(p)-pf(0)-f'(0)=p^2F(p)-p-2,$$

откъдето получаваме

$$f''(t)+2f'(t)+f(t) \Leftrightarrow p^2F(p)-p-2+2(pF(p)-1)+F(p),$$

$$f''(t)+2f'(t)+f(t) \Leftrightarrow (p^2+2p+1)F(p)-p-4.$$

Ако $f(0)=f'(0)=\cdots f^{(n-1)}(0)=0$, то формулата (13.12) приема особено прост вид

$$f^{(n)}(t) \Leftrightarrow p^nF(p).$$

Следващото твърдение касае образа на интеграла.

Твърдение 13.3. Нека $f(t) \Leftrightarrow F(p)$. Тогава

(13.13) $$\int_0^t f(\tau)d\tau \Leftrightarrow \frac{F(p)}{p}.$$

Доказателство. Съгласно (13.11) имаме

$$\mathbf{L}\left\{\left(\int_0^t f(\tau)\tau\right)'\right\} \Leftrightarrow p\mathbf{L}\left\{\int_0^t f(\tau)d\tau\right\}-\int_0^0 f(\tau)d\tau=p\mathbf{L}\left\{\int_0^t f(\tau)d\tau\right\}.$$

От друга страна $\left(\int_0^t f(\tau)d\tau\right)'=f(t)$, следователно

$$\mathbf{L}\{f(t)\} \Leftrightarrow p\mathbf{L}\left\{\int_0^t f(\tau)d\tau\right\}=p\mathbf{L}\left\{\int_0^t f(\tau)d\tau\right\},$$

което доказва твърдението. ■

Да намерим например оригинала $f(t)$ по известно изображение

$$F(p)=\frac{1}{p^2(p-1)}.$$

Имаме

$$e^t \Leftrightarrow \frac{1}{p-1}.$$

След интегриране получаваме

$$\int_0^t e^\tau d\tau=e^t-1 \Leftrightarrow \frac{1}{p(p-1)}.$$

След още едно интегриране намираме

$$\int_0^t (e^\tau-1)d\tau=e^t-t-1 \Leftrightarrow \frac{1}{pp(p-1)}.$$

Нека $f(t) \Leftrightarrow F(p)$. Тогава от теорема 13.1 имаме, че при $\operatorname{Re} p>\hat{\sigma}(f)$,

$$F^{(n)}(p)=\int_0^\infty (-t)^n f(t)e^{-pt}dt,\ n=1,2,\ldots,$$

което веднага ни дава верността на

Твърдение 13.4. Нека $f(t) \Leftrightarrow F(p)$. Тогава

(13.14) $t^nf(t) \Leftrightarrow (-1)^nF^{(n)}(p),\ n=1,2,\ldots$. ■

Например

$$\sin t \Leftrightarrow \frac{1}{p^2+1},$$

следователно

$$t^2 \sin t \Leftrightarrow (-1)^2\left(\frac{1}{p^2+1}\right)'' = \frac{6p^2-2}{\left(p^2+1\right)^3}.$$

Твърдение 13.5. Нека $f(t) \Leftrightarrow F(p)$ и функцията $\frac{f(t)}{t}$ е оригинал. Тогава

(13.15) $\frac{f(t)}{t} \Leftrightarrow \int_p^\infty F(s)ds$,

когато интегралът е сходящ.

Доказателство. Имаме

$$\mathbf{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} = \int_0^\infty \frac{f(t)}{t} e^{-pt} dt = \int_0^\infty f(t) \int_p^\infty e^{-st} ds dt = \int_p^\infty \left[\int_0^\infty f(t) e^{-pt} dt\right] ds,$$

$$\mathbf{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} = \int_p^\infty F(s)ds. \ \blacksquare$$

Например

$$\sin t \Leftrightarrow \frac{1}{p^2+1},$$

следователно

$$\frac{\sin t}{t} \Leftrightarrow \int_p^\infty \frac{ds}{s^2+1} = \operatorname{arctg} s\Big|_p^\infty = \operatorname{arctg}\infty - \operatorname{arctg} p = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} p.$$

Тук спестяваме дългите обяснения за характера на $\operatorname{arctg} p$, разглеждана като функция на комплексната променлива p.

Теорема 13.3 *(интеграл на Дюамел)*. Нека $f_1(t)$ и $f_2(t)$, при което $f_1(t)$ е непрекъсната функция, а $f_2(t)$ има непрекъсната производна. Тогава е в сила следната формула

$$pF_1(p)F_2(p) \Leftrightarrow f_1(t)f_2(0) + \int_0^t f_1(\tau)f_2'(t-\tau)d\tau,$$

където $F_1(p) \Leftrightarrow f_1(t)$ и $F_2(p) \Leftrightarrow f_2(t)$.

Доказателство. Съгласно теоремата на Борел имаме

$$F_1(p)F_2(p) \Leftrightarrow \int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau,$$

откъдето по правилото за диференциране на оригинали намираме

$$pF_1(p)F_2(p) \Leftrightarrow \frac{d}{dt}\int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau = f_1(t)f_2(0) + \int_0^t f_1(\tau)\frac{d}{dt} f_2(t-\tau)d\tau,$$

което доказва теоремата. ■

В последното доказателство използвахме правилото за диференциране на интеграла като функция на горната си граница, правилото за диференциране на съставна функция и недоказаното от нас правило за диференциране под знака на интеграла.

4. Намиране на оригинали по известни образи. Да припомним, че ако една функция $f(t)$ е оригинал, то по условие нейните евентуални прекъсвания са само от първи род, което означава, че $f(t)$ има във всяка точка t_0 едностранни граници $f(t_0+0)$ и $f(t_0-0)$. Функцията $f(t)$ ще наричаме ***регулярна*** в точката t_0, когато функцията

(13.16) $$\varphi(u)=\frac{f(t+u)+f(t-u)-f(t+0)-f(t-0)}{u}$$

е непрекъсната в някаква едностранна околност на нулата $(0,\delta]$ при някое достатъчно малко $\delta>0$, и има дясна граница в нулата, т.е. съществува $\lim\limits_{u\to+0}\varphi(u)=\varphi(+0)$. Ако $f(t)$ е регулярна в точката t_0, то $\varphi(u)$ може да се разглежда като непрекъсната в някаква едностранна околност на нулата $[0,\delta]$, $\delta>0$. Както при доказателството на твърдение 11.1, може да се установи, че ако за някое $\delta>0$ функцията $f(t)$ има непрекъсната производна в околностите $[t_0-\delta,t_0)$ и $(t_0,t_0+\delta]$, при което съществуват двете едностранни производни $f'_+(t_0)$ и $f'_-(t_0)$, то $f(t)$ е регулярна в точката t_0. Да отбележим, че въпреки своята неугледност, това достатъчно условие за регулярност покрива на практика всичките основни приложения. Ако функцията $f(t)$ е гладка по части, то тя е регулярна във всяка точка.

Отначало ще докажем следната теорема

Теорема 13.3 *(Мелин)*. Нека $f(t)$ е оригинал с показател за ръст $\hat{\sigma}$ и нека $f(t)$ е регулярна в точката t, а $F(p)$ е образът на $f(t)$. Тогава е в сила следната формула на Мелин

(13.17) $$\frac{f(t+0)+f(t-0)}{2}=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma_0-iN}^{\sigma_0+iN}F(p)e^{pt}\,dp,$$

където σ_0 е кое да е реално число, за което $\sigma_0>\hat{\sigma}$, а интегралът се взема по вертикалната отсечка в комплексната равнина $[\sigma_0-iN,\sigma_0+iN]$ (рис. 13.5).

Доказателство. По условие за някоя константа $M>0$ е изпълнено $|f(t)|\le Me^{\sigma_0 t}$, $t\ge0$. Да въведем помощната функция $g(t)=f(t)e^{-\sigma_0 t}$.

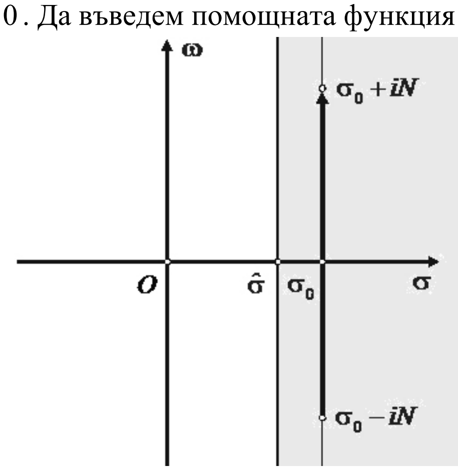

Рис. 13.5.

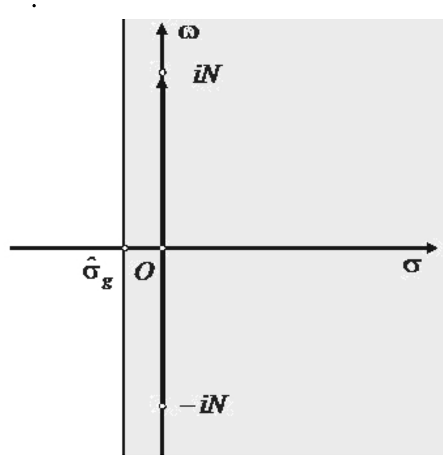

Рис. 13.6.

За $g(t)$ имаме неравенството $|g(t)|\le M$, $t\ge0$. Освен това лесно се проверява, че функцията $g(t)$ също е регулярна в точката t. За показателя за ръст $\hat{\sigma}_g$ на функцията

$g(t)$ имаме $\hat{\sigma}_g < 0$, следователно в този случай в качеството на вертикална отсечка можем да избираме отсечка върху имагинерната ос $[-iN, iN]$ (рис. 13.6).

Ще докажем отначало формулата

(13.18) $$\frac{g(t+0)+g(t-0)}{2} = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2\pi i}\int_{iN}^{iN} G(p)e^{pt}\,dp,$$

където интегралът е по отсечката от имагинерната ос $[-iN, iN]$, а $G(p) = F(p+\sigma_0)$ е образът на $g(t)$. Преобразуваме

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{iN}^{iN} G(p)e^{pt}\,dp = \frac{1}{2\pi i}\int_{-iN}^{iN}\left[\int_{-\infty}^{\infty} g(\xi)e^{-p\xi}d\xi\right]e^{pt}\,dp = \frac{1}{2\pi i}\int_{-iN}^{iN}\left[\int_{-\infty}^{\infty} g(\xi)e^{-p(\xi-t)}d\xi\right]dp,$$

което след смяна реда на интегриране приема вида

(13.19) $$\frac{1}{2\pi i}\int_{iN}^{iN} G(p)e^{pt}\,dp = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\left[g(\xi)\int_{-iN}^{iN} e^{-p(\xi-t)}dp\right]d\xi.$$

Тук сме се възползвали от факта, че

$$G(p) = \int_0^{\infty} g(\xi)e^{-p\xi}d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi)e^{-p\xi}d\xi.$$

Отсечката $[-iN, iN]$ има параметрично представяне $p = i\omega$, $-N \le \omega \le N$, следователно за интеграла по p имаме

$$\int_{-iN}^{iN} e^{-p(\xi-t)}dp = \int_{-N}^{N} e^{i\omega(t-\xi)}di\omega = \frac{1}{t-\xi}e^{i\omega(t-\xi)}\Big|_{-N}^{N} = \frac{1}{\xi-t}\left[e^{iN(t-\xi)} - e^{-iN(t-\xi)}\right],$$

$$\int_{-iN}^{iN} e^{-p(\xi-t)}dp = \frac{2i}{\xi-t}\frac{e^{iN(t-\xi)} - e^{-iN(t-\xi)}}{2i} = 2i\frac{\sin N(t-\xi)}{t-\xi} = 2i\frac{\sin N(\xi-t)}{\xi-t}.$$

След заместване в (13.19) получаваме

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{-iN}^{iN} G(p)e^{pt}\,dp = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} g(\xi)2i\frac{\sin N(\xi-t)}{\xi-t}d\xi = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} g(\xi)\frac{\sin N(\xi-t)}{\xi-t}d\xi.$$

След смяна на променливата $\xi - t = \eta$ последното приема вида

(13.20) $$\frac{1}{2\pi i}\int_{-iN}^{iN} G(p)e^{pt}\,dp = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} g(\eta+t)\frac{\sin N\eta}{\eta}d\eta.$$

Интегралът в дясната страна разделяме на два

(13.21) $$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} g(\eta+t)\frac{\sin N\eta}{\eta}d\eta = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} g(\eta+t)\frac{\sin N\eta}{\eta}d\eta + \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{0} g(\eta+t)\frac{\sin N\eta}{\eta}d\eta.$$

След смяната $\eta \to -\eta$ за втория интеграл отдясно получаваме

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{0} g(\eta+t)\frac{\sin N\eta}{\eta}d\xi = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} g(\eta-t)\frac{\sin N\eta}{\eta}d\eta,$$

откъдето след заместване в (13.21) и (13.20) намираме

(13.22) $$\frac{1}{2\pi i}\int_{-iN}^{iN} G(p)e^{pt}\,dp = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\left[g(\eta+t)+g(\eta-t)\right]\frac{\sin N\eta}{\eta}d\eta.$$

При всяко $\delta > 0$, интеграла в дясната страна на (13.22) можем да разделим на два,

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty [g(\eta+t)+g(\eta-t)]\frac{\sin N\eta}{\eta}d\eta=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^\delta [g(\eta+t)+g(\eta-t)]\frac{\sin N\eta}{\eta}d\eta+\frac{1}{\pi}\int_\delta^\infty [g(\eta+t)+g(\eta-t)]\frac{\sin N\eta}{\eta}d\eta$$

при което съгласно теоремата на Риман-Лебег,

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_\delta^\infty [g(\eta+t)+g(\eta-t)]\frac{\sin N\eta}{\eta}d\eta=0\,.$$

Тук разсъждението е сходно с това при доказването теоремата на Дирихле за поточкова сходимост на фуриеровите редове. Съпоставяйки последния факт с формулата (13.22) намираме, че

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{-iN}^{iN} G(p)e^{pt}dp=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_0^\delta [g(\eta+t)+g(\eta-t)]\frac{\sin N\eta}{\eta}d\eta\,, \tag{13.23}$$

когато поне една от двете граници съществува.

От друга страна за интеграла на Ойлер имаме

$$E=\int_0^\infty \frac{\sin\eta}{\eta}d\eta=\frac{\pi}{2}$$

откъдето намираме

$$\lim_{N\to\infty}\int_0^\delta \frac{\sin N\eta}{\eta}d\eta=\lim_{N\to\infty}\int_0^\delta \frac{\sin N\eta}{N\eta}dN\eta=\lim_{N\to\infty}\int_0^{N\delta} \frac{\sin\eta}{\eta}d\eta=\int_0^\infty \frac{\sin\eta}{\eta}d\eta=\frac{\pi}{2}\,,$$

следователно

$$\lim_{N\to\infty}\left[\frac{1}{\pi}\int_0^\delta [f(t+0)+f(t-0)]\frac{\sin N\eta}{\eta}d\eta\right]=\frac{1}{2}[f(t+0)+f(t-0)]. \tag{13.24}$$

Сега от (13.23-24) получаваме формулата

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{-iN}^{iN} G(p)e^{pt}dp-\frac{f(t+0)-f(t-0)}{2}=$$

$$=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_0^\delta [g(\eta+t)+g(\eta-t)-f(t+0)-f(t-0)]\frac{\sin N\eta}{\eta}d\eta= \tag{13.25}$$

$$==\lim_{N\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_0^\delta \frac{g(\eta+t)+g(\eta-t)-f(t+0)-f(t-0)}{\eta}\sin N\eta d\eta$$

Функцията $g(t)$ е регулярна в точката t следователно съществува $\delta>0$ достатъчно малко такова, че функцията

$$\frac{g(\eta+t)+g(\eta-t)-f(t+0)-f(t-0)}{\eta}$$

е непрекъсната в интервала $[0,\delta]$ и следователно съгласно теоремата на Риман-Лебег, интегралът в дясната страна на равенството (13.25) клони към нула при $N\to\infty$. По този начин доказахме верността на съотношението (13.19).

Връщайки се към функцията $f(t)$ получаваме

$$\frac{f(t+0)e^{-\sigma_0 t}+f(t-0)e^{-\sigma_0 t}}{2}=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{-iN}^{iN} G(p)e^{pt}dp=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{-iN}^{iN} F(p+\sigma_0)e^{pt}dp\,.$$

Умножавайки двете страни на последното равенство с $e^{\sigma_0 t}$ намираме

$$\frac{f(t+0)+f(t-0)}{2}=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{-iN}^{iN}F(p+\sigma_0)e^{(p+\sigma_0)t}dp\,,$$

$$\frac{f(t+0)+f(t-0)}{2}=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{-iN}^{iN}F(p+\sigma_0)e^{(p+\sigma_0)t}d(p+\sigma_0),$$

което след смяната $p+\sigma_0\to p$ преминава в съотношението (13.17),

$$\frac{f(t+0)+f(t-0)}{2}=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma_0-iN}^{\sigma_0+iN}F(p+\sigma_0)e^{(p+\sigma_0)t}d(p+\sigma_0),$$

което искахме да докажем. ■

Интегралът в дясната страна на (13.17) понякога се записва във вида

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma_0-i\infty}^{\sigma_0+i\infty}F(p)e^{pt}dp$$

и се нарича ***обратно преобразование на Лаплас***.

Формулата на Мелин гарантира единственост на оригинала в определен смисъл. Нека оригиналите $f_1(t)$ и $f_2(t)$ имат един и същ образ $F(p)$. Да разгледаме функциите

$$\varphi_1(t)=\int_0^t f_1(\tau)d\tau \text{ и } \varphi_2(t)=\int_0^t f_2(\tau)d\tau\,.$$

Тези функции са непрекъснати навсякъде и имат един и същ образ $\dfrac{F(p)}{p}$. Да разгледаме още две помощни функции

$$\psi_1(t)=\int_0^t \varphi_1(\tau)d\tau \text{ и } \psi_2(t)=\int_0^t \varphi_2(\tau)d\tau\,.$$

Те вече имат непрекъснати производни и отново един и същ образ $\dfrac{F(p)}{p^2}$, следователно по теоремата на Мелин са тъждествено равни, $\psi_1(t)\equiv\psi_2(t)$. Оттук обаче съгласно правилото за диференциране на интеграла като функция на горната си граница имаме

$$\varphi_1(t)\equiv\psi_1'(t)\equiv\psi_2'(t)\equiv\varphi_2(t).$$

Функциите $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$ можем да диференцираме по споменатото правило само в точките, където подинтегралните функции са непрекъснати. Следователно, ако $f_1(t)$ и $f_2(t)$ са непрекъснати едновременно в точката t, то

$$f_1(t)=\varphi_1'(t)=\varphi_2'(t)=f_2(t).$$

Сега отчитайки уговорката, която направихме в началото, че оригиналите нямат изкуствени прекъсвания и навсякъде $f(t)=f(t+0)$, получаваме

Теорема 13.4 ***(за единственост).*** Нека оригиналите $f_1(t)$ и $f_2(t)$ имат един и същ образ $F(p)$. Тогава $f_1(t)\equiv f_2(t)$. ■

Теоремата за единственост красноречиво показва необходимостта за ефективни методи за възстановяване оригинала по известен образ. Както показват примерите с образи на основните функции – полиноми, експоненти и тригонометрични функции, образът в достатъчно много приложения представлява правилна рационална функция на комплексната променлива p,

$$F(p)=\frac{A(p)}{B(p)},$$

където $A(p)$ и $B(p)$ са полиноми, за които $\deg B(p) > \deg A(p)$. Функцията $F(p)$ в този случай има особени точки p_1, p_2, ..., p_n, в нулите на знаменателя $B(p)$, при което всяка такава точка $p_k = \alpha_k + i\beta_k$ представлява полюс от ред равен (или по-малък) от кратността r_k на p_k като корен на $B(p)$. Такава функция може да се запише като сбор от елементарни дроби

(13.26) $F(p) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{r_k} \frac{c_{kj}}{(p-p_k)^j}$,

където c_{kj} са някакви комплексни константи. Тогава от правилата за съответствия между оригинали и образи следва, че оригиналът $f(t)$ представлява ***квазиполином*** във вида

(13.27) $f(t) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{r_k} c_{kj}\frac{t^{j-1}e^{p_k t}}{(j-1)!} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{r_k} \frac{c_{kj}}{(j-1)!} t^{j-1} e^{\alpha_k t}(\cos\beta_k t + i\sin\beta_k t)$,

който има показател за ръст $\hat{\sigma}(f) \le \max\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$. Теоремата за единственост гарантира, че това е търсеният оригинал.

По този начин оригиналът може да се намери чрез формулата (13.27), ако е известно представянето във вид на елементарни дроби (13.26). Това представяне може да се определи по известни методи стига да познаваме корените заедно с кратностите на знаменателя $B(p)$.

Друга (по същество еквивалентна) възможност, която се основава на теоремата за резидуумите, предлага следната

Теорема 13.5 ***(теорема за възстановяване).*** Нека $F(p) = \frac{A(p)}{B(p)}$ е правилна рационална функция с полюси p_1, p_2, ..., p_n, които представляват нулите на знаменателя $B(p)$. Тогава $F(p)$ представлява образ на някакъв непрекъснат оригинал, който може да се определи посредством следната ***формула за възстановяване***

$$f(t) = \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{res}_{p=p_k}\left[F(p)e^{pt}\right] = \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{res}_{p=p_k}\left[\frac{A(p)}{B(p)}e^{pt}\right].$$

Доказателство. Да положим $\sigma_* = \max\{\operatorname{Re} p_1, \operatorname{Re} p_2, \ldots, \operatorname{Re} p_n\}$. Вече знаем, че търсеният оригинал $f(t)$ и има показател на ръст $\hat{\sigma}(f) \le \sigma_*$, следователно ако изберем едно $\sigma_0 > \sigma_*$, то всичките полюси на $F(p)$ лежат в полуравнината $\operatorname{Re} p < \sigma_0$ (рис. 13.7).

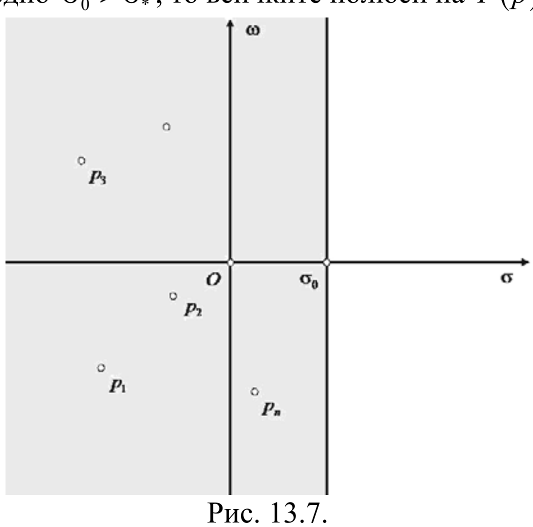

Рис. 13.7.

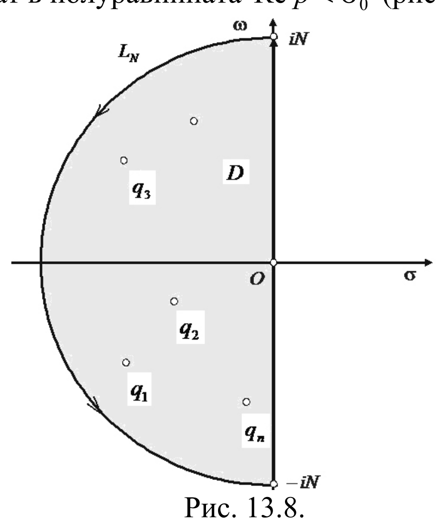

Рис. 13.8.

Тук можем да приложим формулата на Мелин, където интегрирането се извършва по вертикални отсечки $[\sigma_0 - iN, \sigma_0 + iN]$. По-лесно се явява обаче, както при доказателството на теоремата на Мелин, отначало да разгледаме отново помощната функция $g(t) = f(t)e^{-\sigma_0 t}$. За образа $G(p)$ на $g(t)$ имаме

$$G(p) = F(p+\sigma_0) = \frac{A(p+\sigma_0)}{B(p+\sigma_0)}$$

с полюси в точките $q_k = p_k - \sigma_0$, които са разположени в полуравнината $\operatorname{Re} p < 0$. По този начин ще използваме теоремата на Мелин, като интегрираме по вертикални отсечки от имагинерната ос $[-iN, iN]$. Нека $L_N : p = Ne^{i\tau}$, $\frac{\pi}{2} \le \tau \le \frac{3\pi}{2}$, е положително ориентирана полуокръжност с център в нулата и радиус N (рис. 13.8) и нека D е областта с контур Γ, съставен от полуокръжността L_N и отсечката $[-iN, iN]$. При всяко достатъчно голямо N, корените на знаменателя $B(p+\sigma_0)$, които са и полюсите на функцията $G(p)$, попадат изцяло в областта D, понеже техният брой е краен и всичките лежат в полуравнината $\operatorname{Re} p < 0$. Сега от теоремата за резидуумите намираме

(13.28) $\displaystyle\int_\Gamma G(p)e^{pt}\,dp = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{res}_{p=p_k-\sigma_0} \left[G(p)e^{pt}\right],$

където $G(p) = F(p+\sigma_0)$ е образът на функцията $g(t)$. Интегралът в (13.28) записваме като сбор

(13.29) $\displaystyle\int_\Gamma G(p)e^{pt}\,dp = \int_{L_N} G(p)e^{pt}\,dp + \int_{-iN}^{iN} G(p)e^{pt}\,dp.$

Тук ще правим граничен преход при $N \to \infty$, като отначало ще докажем, че

(13.30) $\displaystyle\lim_{N\to\infty} \int_{L_N} G(p)e^{pt}\,dp = 0.$

Да ***фиксираме*** едно $t > 0$. Понеже рационалната функция $G(p)$ е правилна, за всяко достатъчно голямо $N \ge N_0$ е в сила оценката

(13.31) $|G(p)| \le \dfrac{M}{N^s}$, $|p| = N$,

за някаква константа M, където $s = \deg B(p) - \deg A(p) \ge 1$. Полуокръжността L_N има параметрично представяне

$$L_N : p = N\cos\tau + Ni\sin\tau,\ \frac{\pi}{2} \le \tau \le \frac{3\pi}{2},$$

откъдето след заместване в интеграла от (13.30) намираме

$$\int_{L_N} G(p)e^{pt}\,dp = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} G\left(Ne^{i\tau}\right)e^{Nt\cos\tau + iNt\sin\tau} Nie^{i\tau}\,d\tau,$$

което заедно с (13.31) дава оценката

$$\left|\int_{L_N} G(p)e^{pt}\,dp\right| = \left|\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} G\left(Ne^{i\tau}\right)e^{Nt\cos\tau + iNt\sin\tau} Nie^{i\tau}\,d\tau\right| \le \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \left|G\left(Ne^{i\tau}\right)\right| e^{Nt\cos\tau} N\,d\tau,$$

$$(13.32)\quad \left|\int\limits_{L_N} G(p)e^{pt}dp\right| \le \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{M}{N^s} e^{Nt\cos\tau} N e^{i\tau} d\tau \le \frac{M}{N^{s-1}} \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} e^{Nt\cos\tau} d\tau .$$

Сега ще направим оценка за интеграла

$$\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} e^{Nt\cos\tau} d\tau = 0 .$$

За тази цел преобразуваме

$$\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} e^{Nt\cos\tau} d\tau = 2\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} e^{Nt\cos\tau} d\tau = 2\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} e^{-Nt\sin\left(\tau+\frac{\pi}{2}\right)} d\tau = 2\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} e^{-Nt\sin\theta} d\theta ,$$

откъдето въз основа на неравенството

$$\sin\theta \ge \frac{2}{\pi}\theta ,\ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2} ,$$

получаваме

$$\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} e^{Nt\cos\tau} d\tau \le 2\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{2Nt}{\pi}\theta} d\theta = 2\frac{\pi}{2Nt}\left[1-e^{-N}\right] \le \frac{\pi}{Nt} .$$

Оттук замествайки в (13.32) намираме оценката

$$\left|\int\limits_{L_N} G(p)e^{pt}dp\right| \le \frac{M}{N^{s-1}}\frac{\pi}{Nt} = \frac{M\pi}{tN^s} ,$$

което доказва съотношението (13.30), понеже $s \ge 1$.

Граничният преход в (13.29) заедно с (13.28) дава

$$\lim_{N\to\infty} \int\limits_{-iN}^{iN} G(p)e^{pt}dp = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{res}_{p=p_k}\left[G(p)e^{pt}\right],$$

откъдето въз основа теоремата на Мелин, че

$$g(t) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{-iN}^{iN} G(p)e^{pt}dp ,$$

получаваме

$$g(t) = \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{res}_{p=p_k}\left[G(p)e^{pt}\right],$$

което, съгласно определението на $g(t) = f(t)e^{-\sigma_0 t}$, приема вида

$$f(t)e^{-\sigma_0 t} = \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{res}_{p=p_k-\sigma_0}\left[F(p+\sigma_0)e^{pt}\right].$$

Оттук след умножение с $e^{\sigma_0 t}$ намираме

$$f(t) = \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{res}_{p=p_k-\sigma_0}\left[F(p+\sigma_0)e^{t(p+\sigma_0)}\right],$$

от което след смяната $p+\sigma_0 \to p$ веднага получаваме търсената формула

$$f(t) = \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{res}_{p=p_k}\left[F(p)e^{tp}\right]. \ \blacksquare$$

Съгласно правилото за пресмятане на резидууми в полюси, формулата за възстановяване приема вида

(13.33) $$f(t)=\sum_{k=1}^{n}\lim_{p\to p_k}\frac{1}{(r_k-1)!}\left[(p-p_k)^{r_k}\frac{A(p)}{B(p)}e^{p_k t}\right]^{(r_k-1)},$$

където r_k са кратностите на p_k, $k=1,2,\dots,n$. Ако знаменателят $B(p)$ има само прости корени, то те представляват прости полюси за $F(p)$. В този случай (13.33) се свежда до

(13.34) $$f(t)=\sum_{k=1}^{n}\frac{A(p_k)}{B'(p_k)}e^{p_k t}.$$

Например да намерим оригинала $f(t)$ по известен образ

$$F(p)=\frac{1}{p(p^3+1)}.$$

Тук знаменателят $B(p)=p(p^3+1)$ има четири прости корена $p_0=0$ и

$$p_1=-1,\ p_2=\frac{1+i\sqrt{3}}{2},\ p_3=\frac{1-i\sqrt{3}}{2},$$

които са корените на полинома p^3+1, а $A(p)=1$. Имаме $B'(p)=4p^3+1$, следователно

$$B'(p_0)=4p_0^3+1=1,\ B'(p_k)=4p_k^3+1=-4+1=-3,\ k=1,2,3,$$

освен това

$$e^{p_0 t}=1,\ e^{p_1 t}=e^{-t},$$

$$e^{p_2 t}=e^{\frac{1+i\sqrt{3}}{2}}=e^{\frac{1}{2}t}\left[\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t+i\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right],$$

$$e^{p_3 t}=e^{\frac{1-i\sqrt{3}}{2}}=e^{\frac{1}{2}t}\left[\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t-i\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right].$$

Сега от формулата (13.34) намираме

$$f(t)=\frac{A(p_0)}{B'(p_0)}e^{p_0 t}+\frac{A(p_1)}{B'(p_1)}e^{p_1 t}+\frac{A(p_2)}{B'(p_2)}e^{p_2 t}+\frac{A(p_3)}{B'(p_3)}e^{p_3 t},$$

$$f(t)=1-\frac{1}{3}e^{-t}-\frac{1}{3}e^{\frac{1}{2}t}\left[\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t+i\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right]+-\frac{1}{3}e^{\frac{1}{2}t}\left[\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t-i\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right],$$

$$f(t)=1-\frac{1}{3}e^{-t}-\frac{1}{3}e^{\frac{1}{2}t}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t.$$

4. Решаване на диференциални уравнения и системи. Операционното смятане е органически пригодено за решаване на диференциални уравнения и системи с постоянни коефициенти. Да разгледаме уравнението с постоянни коефициенти

(13.35) $$L[y]\equiv c_n y^{(n)}+c_{n-1}y^{(n-1)}+\dots+c_1 y'+c_0 y=f(t),$$

при $t\ge 0$ с начални условия

(13.36) $$y(0)=y_0^0,\ y'(0)=y_0^1,\ \dots,\ y^{(n-1)}(0)=y_0^{n-1}.$$

Тук се предполага, че функцията $f(t)$ изпълнява условията за оригинал. Тогава уравнението (13.35) с началните условия (13.36) може да се решава посредством операционен метод, който се състои в преобразуване по Лаплас на уравнението, намиране на образа на решението $Y(p)$ и възстановяване на решението по някой от разгледаните методи.

Уравнението се преобразува чрез формулите за производните. Имаме

$$f(t) \Leftrightarrow F(p),$$
$$y(t) \Leftrightarrow Y(p),$$
$$y'(t) \Leftrightarrow pY(p) - y_0^0,$$
$$y''(t) \Leftrightarrow p^2 Y(p) - p y_0^0 - y_0^1,$$
$$y'''(t) \Leftrightarrow p^3 Y(p) - p^2 y_0^0 - p y_0^1 - y_0^2,$$
$$\ldots$$
$$y^{(n)}(t) \Leftrightarrow p^n Y(p) - p^{n-1} y_0^0 - p^{n-2} y_0^1 - \cdots - p y_0^{n-2} - y_0^{n-1}.$$

Като заместим в уравнението намираме

$$Y(p)\left(c_n p^n + c_{n-1} p^{n-1} + \cdots + c_1 p + c_0\right) - A(p) = F(p),$$

където $A(p)$ е някакъв полином. Полагайки

(13.37) $L(p) = c_n p^n + c_{n-1} p^{n-1} + \cdots + c_1 p + c_0$,

можем да препишем (13.37) във вида

$$Y(p)L(p) = F(p) + A(p),$$

откъдето за образа $Y(p)$ получаваме

(13.38) $Y(p) = \dfrac{F(p) + A(p)}{L(p)}$,

което открива възможност за възстановяване на търсения оригинал $y(t)$. Тук не е необходимо да се помнят някакви формули, а само принципът, по който се стига до решението.

Например да решим уравнението

$$y'' + 2y' + y = e^{-t}(\cos t + t),$$

с начални условия $y(0) = 2$, $y'(0) = 2$. Тук

$$f(t) = e^{-t}(\cos t + t) = e^{-t}\cos t + e^{-t} t,$$

следователно

$$f(t) \Leftrightarrow \frac{p+1}{(p+1)^2 + 1} + \frac{1}{(p+1)^2}.$$

Имаме

$$y(t) \Leftrightarrow Y(p),$$
$$y'(t) \Leftrightarrow pY(p) - 2,$$
$$y''(t) \Leftrightarrow p^2 Y(p) - 2p - 2.$$

Заместваме,

$$Y(p)\left[p^2 + 2p + 1\right] = \frac{p+1}{(p+1)^2 + 1} + \frac{1}{(p+1)^2} + 2p + 6,$$

$$Y(p) = \frac{1}{(p+1)\left(p^2 + 2p + 2\right)} + \frac{1}{(p+1)^4} + \frac{2}{p+1} + \frac{4}{(p+1)^2}.$$

Чрез разлагане за оригинала на първото събираемо намираме

$$\frac{1}{(p+1)\left(p^2 + 2p + 2\right)} = \frac{1}{p+1} - \frac{p+1}{(p+1)^2 + 1} \Leftrightarrow e^{-t} - e^{-t}\cos t.$$

За другите три събираеми имаме

$$\frac{1}{(p+1)^4} \Leftrightarrow e^{-t}\frac{t^2}{3!}, \quad \frac{2}{p+1} \Leftrightarrow 2e^{-t}, \quad \frac{4}{(p+1)^2} \Leftrightarrow 4te^{-t},$$

следователно

$$y(t) = e^{-t} - e^{-t}\cos t + \frac{t^2}{6}e^{-t} + 2e^{-t} + 4te^{-t}.$$

Да разгледаме уравнението (13.35) с нулеви начални условия,

$$y(0) = y'(0) = \cdots = y^{(n-1)}(0) = 0.$$

Тогава (13.38) приема вида

$$Y(p) = \frac{F(p)}{L(p)},$$

където $L(p)$ е полиномът от (13.37). В този случай, ако

(13.39) $\Phi(t) \Leftrightarrow \dfrac{1}{L(p)}$,

то имаме

$$y(t) \Leftrightarrow F(p)\frac{1}{L(p)}$$

и следвайки теоремата на Борел за образ на конволюция получаваме

$$y(t) = f * \Phi(t) = \int_0^t f(\tau)\Phi(t-\tau)d\tau = \int_0^t f(t-\tau)\Phi(\tau)d\tau, \ t \ge 0.$$

Ако началните условия не са нулеви, то за решенето на (13.35) имаме

$$y(t) \Leftrightarrow [F(p) + A(p)]\frac{1}{L(p)} = F(p)\frac{1}{L(p)} + \sum_{k=0}^{n-1} a_k p^k \frac{1}{L(p)},$$

където $A(p) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k p^k$ е полиномът, породен от началните условия. Сега от правилата на операционното смятане, за решението получаваме

(13.40) $y(t) = \displaystyle\int_0^t f(\tau)\Phi(t-\tau)d\tau + \sum_{k=0}^{n-1} a_k \Phi^{(k)}(t).$

Функцията $\Phi(t)$ от съответствието (13.39) се нарича ***фундаментално решение*** на уравнението (13.35), поради основната роля, която $\Phi(t)$ има при определяне на решението чрез формулата (13.40).

За фундаменталното решение, което очевидно има производни от всеки ред, може да се докаже, че удовлетворява условието $\Phi^{(k)}(0) = 0$, $0 \le k \le n-2$, следователно

$$\Phi^{(k)}(t) \Leftrightarrow p^k \frac{1}{L(p)}, \ 0 \le k \le n-1,$$

поради което е и вярна формулата (13.40).

За илюстрация да решим уравнението

$$y'' + 2y' + 2y = e^t t$$

с начални условия $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$. Тук имаме

$$e^t t \Leftrightarrow F(p),$$
$$y(t) \Leftrightarrow Y(p),$$
$$y'(t) \Leftrightarrow pY(p) - 1,$$
$$y''(t) \Leftrightarrow p^2 Y(p) - p - 2.$$

След заместване получаваме следната операционна форма на поставената задача

$$Y(p)\left[p^2 + 2p + 2\right] = F(p) + p + 4,$$

(13.41) $Y(p)=F(p)\dfrac{1}{p^2+2p+2}+p\dfrac{1}{p^2+2p+2}+4\dfrac{1}{p^2+2p+2}$.

Да намерим фундаменталното решение,

$$\Phi(t)\Leftrightarrow\frac{1}{p^2+2p+2}=\frac{1}{(p+1)^2+1},$$

$$\Phi(t)=e^{-t}\sin t.$$

Сега от (13.41) получаваме

$$y(t)=\int_0^t e^{\tau}\tau e^{-(t-\tau)}\sin(t-\tau)d\tau+\left(e^{-t}\sin t\right)'+4e^{-t}\sin t,\ t\geq 0,$$

откъдето след пресмятане намираме

$$y(t)=\frac{e^{-t}}{25}\left[e^{2t}(5t-4)+29\cos t+78\sin t\right].$$

Системите диференциални уравнения с постоянни коефициенти

$$\begin{aligned}\dot{x}_1&=a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n+f_1(t)\\ \dot{x}_2&=a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n+f_2(t)\\ &\cdots\\ \dot{x}_n&=a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n+f_n(t)\end{aligned}\tag{13.42}$$

с начални условия $x_1(0)=b_1$, $x_2(0)=b_2$, ..., $x_n(0)=b_n$ също могат да се решават със средствата на операционното смятане. Тук се предполага, че функциите $f_k(t)$, $k=1,2,\dots,n$, са непрекъснати и изпълняват условието на експоненциален ръст. Нека $X_k(p)$ са образите на търсените функции $x_k(t)$, а $F_k(p)$ са образите на $f_k(t)$, $k=1,2,\dots,n$. Тогава системата приема следния операционен вид

$$\begin{aligned}pX_1&=a_{11}X_1+a_{12}X_2+\cdots+a_{1n}X_n+F_1(p)+b_1\\ pX_2&=a_{21}X_1+a_{22}X_2+\cdots+a_{2n}X_n+F_2(p)+b_2\\ &\cdots\\ pX_n&=a_{n1}X_1+a_{n2}X_2+\cdots+a_{nn}X_n+F_n(p)+b_n\end{aligned}\tag{13.43}$$

Да положим

$$\mathbf{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix},\ A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix},\ \mathbf{f}(t)=\begin{pmatrix}f_1(t)\\f_2(t)\\\vdots\\f_n(t)\end{pmatrix},$$

$$\mathbf{X}=\begin{pmatrix}X_1\\X_2\\\vdots\\X_n\end{pmatrix},\ \mathbf{F}(p)=\begin{pmatrix}F_1(p)\\F_2(p)\\\vdots\\F_n(p)\end{pmatrix},\ \mathbf{b}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_n\end{pmatrix}.$$

Тогава (13.42) приема следната векторно матрична форма

$$\dot{\mathbf{x}}=A\mathbf{x}+\mathbf{f}(t),\ \mathbf{x}(0)=\mathbf{b},$$

а (13.43) има формата

$$p\mathbf{X}=A\mathbf{X}+\mathbf{F}(p)+\mathbf{b},$$

$$(pE_n-A)\mathbf{X}=\mathbf{F}(p)+\mathbf{b},$$

което чрез обратна матрица може да се реши във вида

(13.44) $\mathbf{X}=\left(pE_n-A\right)^{-1}\mathbf{F}(p)+\left(p-A\right)^{-1}\mathbf{b}$.

Нека $\mathbf{\Phi}(t)$ е матрицата от оригиналите на $\left(pE_n-A\right)^{-1}$. Тогава от (13.44) и според познатите правила на операционното смятане, за оригинала $\mathbf{x}(t)$ получаваме

(13.45) $\mathbf{x}(t)=\mathbf{\Phi}(t)*\mathbf{f}(t)+\mathbf{\Phi}(t)\mathbf{b}=\mathbf{\Phi}(t)\mathbf{b}+\int\limits_0^t\mathbf{\Phi}(t-\tau)\mathbf{f}(\tau)d\tau=\mathbf{\Phi}(t)\mathbf{b}+\int\limits_0^t\mathbf{\Phi}(\tau)\mathbf{f}(t-\tau)d\tau$.

Матрицата $\mathbf{\Phi}(t)$ се нарича ***фундаментална матрица*** на системата линейни диференциални уравнения (13.43).

Например да разгледаме системата от две уравнения

$$\dot{x}=x-y+e^t$$

$$\dot{y}=-x+y+e^{-t}$$

с начални условия $x(0)=1$ и $y(0)=-1$. В матричен вид системата изглежда по следния начин

$$\begin{pmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}e^t\\ e^{-t}\end{pmatrix}.$$

Тук

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix},\ pE_2-A=\begin{pmatrix}p-1 & 1\\ 1 & p-1\end{pmatrix},\ \left(pE_2-A\right)^{-1}=\begin{pmatrix}\dfrac{p-1}{p^2-2p} & \dfrac{-1}{p^2-2p}\\ \dfrac{-1}{p^2-2p} & \dfrac{p-1}{p^2-2p}\end{pmatrix},$$

а за фундаменталната матрица $\mathbf{\Phi}(t)$ намираме

$$\mathbf{\Phi}(t)=\mathbf{L}^{-1}\left\{\left(pE_2-A\right)^{-1}\right\}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\left(1+e^{2t}\right) & \frac{1}{2}\left(1-e^{2t}\right)\\ \frac{1}{2}\left(1-e^{2t}\right) & \frac{1}{2}\left(1+e^{2t}\right)\end{pmatrix}.$$

Съгласно формулата (13.45) за решението получаваме

$$\begin{pmatrix}x(t)\\ y(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\left(1+e^{2t}\right) & \frac{1}{2}\left(1-e^{2t}\right)\\ \frac{1}{2}\left(1-e^{2t}\right) & \frac{1}{2}\left(1+e^{2t}\right)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}+\int\limits_0^t\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\left(1+e^{2\tau}\right) & \frac{1}{2}\left(1-e^{2\tau}\right)\\ \frac{1}{2}\left(1-e^{2\tau}\right) & \frac{1}{2}\left(1+e^{2\tau}\right)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^{t-\tau}\\ e^{-t+\tau}\end{pmatrix}d\tau,$$

което след пресмятане дава

$$x(t)=\frac{1}{3}\left(-e^{-t}+4e^{2t}\right)\text{ и }y(t)=\frac{1}{3}\left(3e^t-2e^{-t}-4e^{2t}\right).$$

5. Обобщени функции. Операционното смятане разкрива естествена възможност за работа с така наречените обобщени функции. Безспорно най-популярната обобщена функция е ***делта функцията*** на Дирак $\delta(t)$. Това е функция, на която в операционното смятане съответства образ $F(p)=1$. Функцията $\delta(t)$ не е определена поточково в обичайния смисъл. Въпреки това в рамките на операционното смятане с нея може да се манипулира по сходен с традиционните функции начин. Например $\delta(t)$ може да се разглежда като ***обобщена производна*** на функцията на Хевисайд $\eta(t)$ над цялата числова ос, т.е. $\eta'(t)=\delta(t)$. Функцията $\delta(t)$ има ролята на единица и при конволюционното произведение, $\delta(t)*f(t)=f(t)$. Може да се определи и производната $\delta'(t)$ като оригинал на образа $F(p)=p$. Изобщо

$$\delta^{(n)}(t)\Leftrightarrow p^n,\ n=0,1,2,\dots.$$

Отместената делта функция $\delta(t-a)$ има образ e^{-ap},

$$\delta(t-a) \Leftrightarrow e^{-pa}, \ a \geq 0,$$

и в конволюция действа по правилото

$$\delta(t-a) * f(t) = f(t-a).$$

Делта функцията може да се апроксимира (рис. 13.9) с редица от обикновени функции, например с функциите,

$$\varphi_n(t) = \frac{n}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2 n^2}, \ n = 1,2,3,\dots.$$

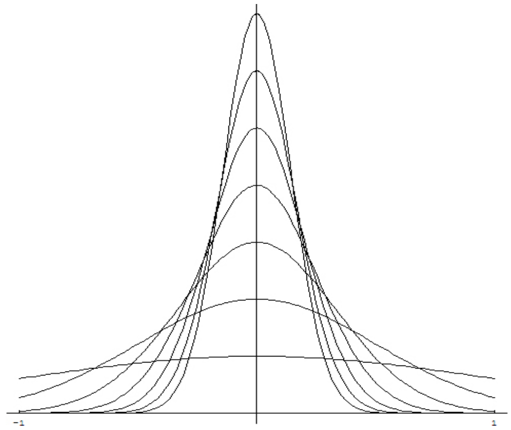

Рис. 13.9.

Площта под всяка крива е точно равна на единица, а всяка следваща е изтеглена повече по ординатната ос. В граничен план делта функцията се получава безкрайност в нулата и нула във всяка друга точка. Във физическите системи се наблюдават понякога явления със сходен характер.

Накрая ще приведем таблица, съдържаща основните правила и често използвани съответствия за преобразованието на Лаплас.

$f(t) \ (= f(t)\eta(t))$	$F(p) = \int_0^\infty e^{-pt} f(t) dt$
$f'(t)$	$pF(p) - f(+0)$
$f''(t)$	$p^2 F(p) - pf(+0) - f'(+0)$
$f^{(n)}(t)$	$p^n F(p) - p^{n-1} f(+0) - p^{n-2} f'(+0) - \dots - f^{(n-1)}(+0)$
$\int_o^t f(\tau) d\tau$	$\frac{F(p)}{p}$
$f * g(t) = \int_0^t f(\tau) g(t-\tau) d\tau$	$F(p)G(p)$
$tf(t)$	$-F'(p)$
$t^n f(t)$	$(-1)^n F^{(n)}(p)$
$e^{at} f(t)$	$F(p-a)$
$f(t-a), \ a > 0$	$e^{-ap} F(p)$
$f(at), \ a > 0$	$\frac{1}{a} F\left(\frac{p}{a}\right)$

$\eta(t)$	$\dfrac{1}{p}$
t	$\dfrac{1}{p^2}$
t^n, $n=0,1,2,\dots$	$\dfrac{n!}{p^{n+1}}$
$e^{\alpha t}$	$\dfrac{1}{p-\alpha}$
$te^{\alpha t}$	$\dfrac{1}{(p-\alpha)^2}$
$t^n e^{\alpha t}$, $n=0,1,2,\dots$	$\dfrac{n!}{(p-\alpha)^n}$
$\sin\omega t$	$\dfrac{\omega}{p^2+\omega^2}$
$\cos\omega t$	$\dfrac{p}{p^2+\omega^2}$
$t\sin\omega t$	$\dfrac{2\omega p}{(p^2+\omega^2)^2}$
$t\cos\omega t$	$\dfrac{p^2-\omega^2}{(p^2+\omega^2)^2}$
$e^{\alpha t}\sin\beta t$	$\dfrac{\beta}{(p-\alpha)^2+\beta^2}$
$e^{\alpha t}\cos\beta t$	$\dfrac{p-\alpha}{(p-\alpha)^2+\beta^2}$

6. Едностранно z-преобразование. В реалните физически системи преобразованието на Лаплас е метод за анализ на непрекъснати аналогови сигнали. Цифровата обработка на сигнали, която се налага в последно време борави с дискретни сигнали, които на практика представляват редици от числа, получени посредством сканиране на непрекъснатия сигнал през определение достатъчно малки по дължина времеви периоди, обикновено с равна дължина $T>0$. По този начин един непрекъснат сигнал $f(t)$, определен за $t\geq 0$, се представя чрез редицата от стойности $f(nT)$, $n=0,1,2,\dots$, т.е. от редицата $f(0)$, $f(T)$, $f(2T)$, $f(3T)$, ... В такъв случай се говори за дискретизация на сигнала със стъпка T. Дискретизираният сигнал $f_d(t)$ се записва като

$$f_d(t)=f(t)\sum_{n=0}^{\infty}\delta(t-nT)=\sum_{n=0}^{\infty}f(nT)\delta(t-nT),$$

откъдето след прилагане преобразованието на Лаплас намираме

$$\mathbf{L}\{f_d\}(p)=\sum_{n=0}^{\infty}f(nT)e^{-npT},$$

което представлява степенен ред на $z=e^{pT}$ и чрез това полагане може да се запише

$$\mathbf{L}\{f_d\}(p)=\sum_{n=0}^{\infty}f(nT)z^{-n}.$$

Последното представлява едностранно z-преобразование на дискретизирания сигнал $\{f(nT)\}$ и дава основание за следното определение.

Определение 13.2. Едностранно z-преобразование на редицата $\{x(n)\}_{n=0}^{\infty}$ се нарича функцията определена от реда

$$\mathbf{Z}\{x(n)\} = X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n) z^{-n} ,$$

разглеждана като функция $X(z)$ на комплексната променлива z в областта на сходимост на този ред.

За удобство разглежданите редици ще считаме определени като нули при отрицателните индекси, $0 = x(-1) = x(-2) = \cdots$, което съответства на вида на лапласовите оригинали.

Областта на сходимост на реда $X(z)$, когато не е празното множество, съдържа външност на кръг с достатъчно голям радиус.

Например ако $x(n) = \eta(n) = 1$, то

$$\mathbf{Z}\{x(n)\} = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} = \frac{1}{1 - z^{-1}} , \; |z| > 1 .$$

Тук $\eta(n)$ е единичната функция на z-преобразованието, определена като $\eta(n) = 1$ за всяко $n = 0,1,2,\ldots$ (и по обща уговорка $\eta(-n) = 0$ за $n = 1,2,3,\ldots$).

Ако $x(n) = a^n$, то

$$\mathbf{Z}\{x(n)\} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n} = \frac{1}{1 - az^{-1}} , \; |z| > |a| .$$

Ако $x(n) = a^n \cos n\omega$, $a \in \mathrm{R}$, $\omega \in \mathrm{R}$, то

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \frac{e^{jn\omega} + e^{-jn\omega}}{2} z^{-n} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(ae^{j\omega}\right)^n z^{-n} + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(ae^{-j\omega}\right)^n z^{-n} ,$$

$$X(z) = \frac{1}{2} \frac{1}{1 - ae^{j\omega} z^{-1}} + \frac{1}{2} \frac{1}{1 - ae^{-j\omega} z^{-1}} ,$$

$$X(z) = \frac{1 - a \cos\omega\, z^{-1}}{1 - 2a \cos\omega\, z^{-1} + a^2 z^{-2}} , \; |z| > |a| .$$

Преобразованието има следните основни свойства.

Линейност. Образ на линейна комбинация е същата линейна комбинация от съответните образи.

Отместване. Нека $X(z) = \mathbf{Z}\{x(n)\}$. Тогава за всяко естествено $m = 1,2,3,\ldots$ е изпълнено (случай на закъснение)

$$\mathbf{Z}\{x(n - m)\} = z^{-m} X(z),$$

а в случая на изпреварване

$$\mathbf{Z}\{x(n + m)\} = z^m X(z) - x(0) z^m - x(1) z^{m-1} - \cdots - x(m-1) z .$$

Например

$$\mathbf{Z}\{x(n-1)\} = z^{-1} X(z) \text{ и } \mathbf{Z}\{x(n+1)\} = zX(z) - x(0) z .$$

Конволюция на редиците $\{x(n)\}$ и $\{y(n)\}$ наричаме редицата $\{\zeta(n)\}$, определена като

$$\zeta(n) = \sum_{k=0}^{n} x(k) y(n-k) = x(0)y(n) + x(1)y(n-1) + \cdots + x(n-1)y(1) + x(n)y(0).$$

Едностранната конволюция притежава всичките характерни свойства на въведената преди конволюция.

Образ на конволюция. Образът на конволюция е равен на произведението от образите на двата множителя,

$$\mathbf{Z}\{\zeta(n)\} = \mathbf{Z}\{x(n)\}\mathbf{Z}\{y(n)\}.$$

Умножение с n. Нека $X(z) = \mathbf{Z}\{x(n)\}$. Тогава

$$\mathbf{Z}\{nx(n)\} = -z\frac{dX(z)}{dz}.$$

Например за редицата $\{x(n) = n\}$ имаме

$$\mathbf{Z}\{x(n)\} = -z\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{1-z^{-1}}\right) = \frac{z^{-1}}{\left(1-z^{-1}\right)^2}.$$

Начално и финално значение. От формулата

$$X(z) = x(0) + \frac{x(1)}{z} + \frac{x(2)}{z^2} + \cdots,$$

непосредствено се вижда, че

$$x(0) = \lim_{z\to\infty} X(z).$$

Ако съществува $x(\infty) = \lim_{n\to\infty} x(n)$, то

$$x(\infty) = \lim_{z\to 1}(z-1)X(z).$$

Обратно z-преобразование $\mathbf{Z}^{-1}\{X(z)\} = \{x(n)\}$ означава, по дадена функция $X(z)$, да се намери редица $\{x(n)\}$, за която $X(z)$ представлява z-преобразование.

Теорема 13.6 ***(теорема за единственост).*** Нека функцията $X(z)$ е аналитична в областта $|z| > R$, за някое крайно R. Тогава съществува единствена редица $\{x(n)\}$, за която $X(z)$ представлява z-преобразование.

Доказателство. По условие имаме, че $X(z)$ се развива в ред на Лоран

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)z^{-n},$$

чиито коефициенти представляват търсената редица. ■

Ако $X(z)$ има краен брой полюси z_1, z_2, ..., z_m, то за самите коефициенти съгласно теоремата за резидуумте имаме

$$x(n) = \frac{1}{2\pi j}\oint_{\gamma} X(z)z^{n-1}dz = \sum_{k=1}^{m}\operatorname*{res}_{z=z_k}\left[X(z)z^{n-1}\right],\ n = 0,1,2,\dots,$$

където γ е положително ориентиран затворен контур около нулата, който лежи изцяло в областта на сходимост и включва всичките полюси.

Обръщането може да се извърши чрез разлагане в елементарни дроби. Нека например

$$X(z) = \frac{1}{\left(1-z^{-1}\right)\left(1-2z^{-1}\right)} = \frac{z^2}{(z-1)(z-2)}.$$

Тук търсим представяне във вида

$$X(z) = a + \frac{b}{z-1} + \frac{c}{z-2}.$$

Константите a, b и c определяме по някой от известните методи и получаваме

$$X(z)=1-\frac{1}{z-1}+4\frac{1}{z-2},$$
което записваме в по-удобен вид
$$X(z)=1-\frac{z^{-1}}{1-z^{-1}}+4\frac{z^{-1}}{1-2z^{-1}}$$
откъдето намираме
$$x(n)=\delta(n)-\eta(n-1)+4.2^{n-1}\eta(n-1),\ n=0,1,2,\dots,$$
т.е. $x(0)=1$, $x(1)=3$, $x(2)=7$, $x(3)=15$ и т.н.

В последната формула $\delta(n)$ означава ***делта функцията*** на z -преобразованието, която се определя като $\delta(0)=1$ и $\delta(n)=0$ за $n=1,2,3,\dots$. Така определената делта функция представлява ***единицата*** за конволюционното умножение.

Ако например
$$X(z)=\frac{z^{-1}+z^{-2}}{(1-z^{-1})(1-2z^{-1})}=\frac{z+1}{(z-1)(z-2)},$$
то чрез познатото разлагане намираме
$$X(z)=-2\frac{1}{z-1}+3\frac{1}{z-2}=-2\frac{z^{-1}}{1-z^{-1}}+3\frac{z^{-1}}{1-2z^{-1}},$$
следователно
$$x(n)=-2\eta(n-1)+3.2^{n-1}\eta(n-1),\ n=0,1,2,\dots.$$

Нека например
$$X(z)=\frac{z^{-1}+z^{-3}}{(1+z^{-1})(1-z^{-1})^2}=\frac{z^2+1}{(z+1)(z-1)^2}.$$
След разлагане в елементарни дроби получаваме
$$X(z)=\frac{1}{2}\frac{1}{z+1}+\frac{1}{2}\frac{1}{z-1}+\frac{1}{(z-1)^2},$$
което записваме във вид, удобен за обръщане
$$X(z)=\frac{1}{2}z^{-1}\frac{1}{1+z^{-1}}+\frac{1}{2}z^{-1}\frac{1}{1-z^{-1}}+z^{-1}\frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2},$$
откъдето намираме
$$x(n)=\frac{1}{2}(-1)^{n-1}\eta(n-1)+\frac{1}{2}\eta(n-1)+(n-1)\eta(n-1),\ n=0,1,2,\dots,$$
т.е.
$$x(0)=0 \text{ и } x(n)=\frac{1}{2}(-1)^{n-1}+\frac{1}{2}+(n-1) \text{ за } n=1,2,3,\dots.$$

Следващата таблица съдържа основните правила и често използвани съответствия за едностранно z -преобразование.

$\{x(n)\}_{n=0}^{\infty}$	$X(z)=\mathbf{Z}\{x(n)\}$
$\{x(n-m)\},\ m=1,2,\dots$	$z^{-m}X(z)$
$\{x(n+m)\},\ m=1,2,\dots$	$z^mX(z)-x(0)z^m-x(1)z^{m-1}-\dots-x(m-1)z$
$\{nx(n)\}$	$-z\frac{dX(z)}{dz}$
$\{a^nx(n)\},\ a\neq 0$	$X\left(\frac{z}{a}\right)$

$\eta(n) = \{1,1,1,\ldots\}$	$\frac{z}{z-1} = \frac{1}{1-z^{-1}}$
$\eta(n-m),\ m = 1,2,3,\ldots$	$\frac{1}{z^{m-1}(z-1)} = \frac{z^{-m}}{1-z^{-1}}$
$\delta(n) = \{1,0,0,\ldots\}$	1
$\delta(n-m) = \{1,0,0,\ldots\}$	$\frac{1}{z^m} = z^{-m}$
$a^n,\ a \neq 0$	$\frac{z}{z-a} = \frac{1}{1-az^{-1}}$
$na^n,\ a \neq 0$	$\frac{az}{(z-a)^2} = \frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$
$n^2a^n,\ a \neq 0$	$\frac{az(z+a)}{(z-a)^3} = \frac{az^{-2}(1+az^{-1})}{(1-az^{-1})^3}$
n	$\frac{z}{(z-1)^2} = \frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2}$
n^2	$\frac{z(z+1)}{(z-1)^3} = \frac{z^{-2}(1+z^{-1})}{(1-z^{-1})^3}$
$\sin \omega n$	$\frac{z \sin \omega}{z^2 - 2z\cos\omega + 1} = \frac{z^{-1}\sin\omega}{1-2z^{-1}\cos\omega + z^{-2}}$
$\cos \omega n$	$\frac{z(z-\cos\omega)}{z^2 - 2z\cos\omega + 1} = \frac{1-z^{-1}\cos\omega}{1-2z^{-1}\cos\omega + z^{-2}}$
$a^n \sin \omega n$	$\frac{za\sin\omega}{z^2 - 2za\cos\omega + a^2} = \frac{z^{-1}a\sin\omega}{1-2z^{-1}a\cos\omega + a^2z^{-2}}$
$a^n \cos \omega n$	$\frac{z(z-a\cos\omega)}{z^2 - 2za\cos\omega + a^2} = \frac{1-z^{-1}a\cos\omega}{1-2z^{-1}a\cos\omega + a^2z^{-2}}$

*handbook – lap – 403
*handbook – z – 479
*handbook – four – 115